The University of Chicago
Libraries

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES
PROMOSSA
DALL' ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE

N. 7

L'ALGEBRA

OPERA DI RAFAEL BOMBELLI DA BOLOGNA

LIBRI IV E V COMPRENDENTI « LA PARTE GEOMETRICA » INEDITA

TRATTA DAL MANOSCRITTO B. 1569

BIBLIOTECA DELL'ARCHIGINNASIO DI BOLOGNA

PUBBLICATA A CURA DI ETTORE BORTOLOTTI

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

L' EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna - Coop. Tipografica Azzoguidi - IX-1929

PREFAZIONE

La vita. — RAFAEL BOMBELLI è l'ultimo, in ordine di tempo, di quella schiera di algebristi bolognesi, coi quali si apre il periodo moderno nella storia della matematica [1]. Fra le due edizioni della sua *Algebra* sta la scoperta della *Aritmetica di Diofanto*, che così potentemente ha promosso lo svolgimento della teoria dei numeri; la *Geometria*, che verrà ora tratta dall'inedito, segna il distacco fra l'Algebra Geometrica degli antichi e la moderna Geometria Analitica.

Non si ha notizia sicura della data, nè del luogo di nascita di RAFAEL BOMBELLI; nel suo libro di Algebra egli si dichiara « Cittadino bolognese », i BOMBELLI infatti appartenevano alla nobiltà del contado bolognese, e si stabilirono a Bologna nei primi anni del secolo XIII, provenienti dal *Castel de' Britti* (sul fiume Idice a km. 12 circa da Bologna). Possedevano case in città, occupavano cariche cittadine, furono notai, massari, sindici, consiglieri del comune; ma nello scorcio di quel secolo tutti i BOMBELLI, che erano di parte Lambertazza (ghibellini), furono banditi dalla città, si dispersero per le ville del contado, e non tornarono se non dopo la cacciata dei BENTIVOGLI, nei primi anni del secolo XVI.

I Rotuli del nostro Studio registrano un DOMENICO BOMBELLI, lettore in Jure Civili dal 1545 al 1561, e le cronache

---

(1) Cfr. per es. G. ENESTROM: *Ueber Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik*. Bibliotheca Mathem., 3, pag. 5 (1902).

cittadine ricordano un FILIPPO BOMBELLI (creato notaro a Bologna nel 1511), notaro, procuratore, causidico, nato nella villa di *Borgo Panigale* sul contado di Bologna, che piantò in Bologna la famiglia, e fu capostipite di una lunga genealogia di notai bolognesi. I BOMBELLI sono in quelle cronache detti « oriundi del Borgo Panigale » ; se, come pare probabile, anche RAFAEL BOMBELLI è nato al Borgo Panigale, agevolmente si spiega la mancanza di notizie, nei nostri archivi, sul conto di lui e della di lui famiglia, poichè l' archivio di quella parrocchia venne distrutto da un incendio, insieme con la chiesa e coi fabbricati adiacenti, nei primi anni del secolo XVII (1).

Le notizie su la vita di RAFAEL BOMBELLI provengono tutte da una unica fonte: la sua *Opera su l'Algebra*, pubblicata nel 1572, e conservata manoscritta nel codice B. 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna.

Dice di aver avuto a precettore messer FRANCESCO MARIA CLEMENTI da Corinaldo, del quale nessun' altra cosa sappiamo all'infuori di quel che lo stesso BOMBELLI ci racconta, cioè che da lui furono essiccate le paludi di Foligno, a' tempi di Paolo III. Pare lecito supporre che il CLEMENTI lo abbia instruito nelle cose di idraulica, e che egli, bolognese, abbia attinto le cognizioni matematiche nello Studio di Bologna, allora, per questa scienza, nel massimo suo splendore.

Il BOMBELLI racconta che per l' opera sua, e per ordine di Monsignor ALESSANDRO RUFINI, vescovo di Melfi, si essiccò la palude Chiana in Toscana « con tanta salude e felicitade de' popoli circonvicini, che ben tutti per una voce confessano questa opera essere stata gloriosa ed immortale... », e che da

(1) Anche l'Archivio della parrocchia di Castel de' Britti, andò bruciato nel 1500. In quell'Archivio ora si conservano i registri delle nascite dal 1567, dei matrimoni dal 1604, dei morti dal 1655. Non c'è traccia della famiglia Bombelli.

una interruzione dei lavori della Chiana trasse origine la sua opera d'algebra:

« spinto io solo dalle amorevolissime esortationi, le quali mi facea V. S. reverendissima (il vescovo di Melfi) e dalla commodità et agio ch'ella mi diede all'amenissima sua villa della Rufina (all'hora che quasi era abbandonata l'impresa della essicatione della palude « Chiana » per colpa di cui lo potea fare) qui, libero da ogni passion d'animo, ritiratomi col nostro compatriotto messer FRANCESCO MARIA SALANDO, scrittore (com'ella sa) de' nostri tempi rarissimo, e persona giudiciosa, e con HERCOLE, mio fratello, anco egli di questa professione, e così ben versato nelle mathematiche, che se malvagia morte avanti tempo nol toglieva, egli a sommo grado in quelle sarebbe gionto, composi la presente opera ».

Quest'opera d'algebra rimase lungo tempo manoscritta, ma fu certamente diffusa fra gli studiosi, poichè nelle Biblioteche di Bologna ne esistono tuttora due esemplari manoscritti, l'uno in cinque libri nella Biblioteca dell'Archiginnasio, l'altro, che comprende il solo terzo libro, nella Universitaria.

Frattanto il BOMBELLI ebbe agio di conoscere l'*Aritmetica di Diofanto*, in un codice della Biblioteca vaticana:

« essendosi ritrovato un'opera greca di questa disciplina nella libraria di nostro Signore in Vaticano, composta da un certo DIOFANTO ALESSANDRINO, autor greco, il quale fu a' tempi di ANTONIN PIO, et havendomela fatta vedere Messer ANTONIO PAZZI reggiano [1], pubblico lettore delle mathematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri, (ancorchè non tratti de' numeri irrationali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine di operare) egli et io, per arricchire il mondo di siffatta opera, ci dessimo a

---

[1] Fu a Roma dal 1567 al 1576, morì a Reggio nel 1585. In una sua lettera a GHERARDO SPINI dice di aver tradotto anche HERONE e PAPPO. (Cfr. Bibl. Modenese del Tiraboschi, tomo IV, pag. 77).

tradurlo, e cinque libri (delli sette che sono) tradutti ne habbiamo, lo restante non havendo potuto finire, per gli travagli avvenuti all'uno e all'altro... » ([1]).

Non avendo potuto arricchire il mondo di siffatta opera, il Bombelli pensò almeno di arricchirne la propria Algebra, inserendo in essa tutti i problemi diofantei di cui era venuto a cognizione; e, nel far ciò, procedette ad una generale revisione dell'opera, che volle apprestare per la stampa, e della quale, infatti, nel 1572, uscirono a Bologna coi tipi di G. Rossi, i primi tre libri.

Alla fine del II libro, e nell'atto di incominciare il libro III, avverte:

« Farò fine di ragionare di queste agguagliationi e dignitadi, ma verrò alle operationi di esse, le quali saranno quelle dimostrationi matematiche (o problemi che dir si vogliano) tanto da' scrittori commendate; che sarà l'ultima parte di quest'opera, riserbandomi con più mio agio e commodità, di dare al mondo tutti questi problemi in dimostrationi geometriche » (pag. 411).

Nelle ultime pagine del volume si scusa di non poter dar subito in luce la parte geometrica della sua opera, « ... perchè non è ancora ridutta a quella perfettione che la eccellentia di questa disciplina richiede, mi son risoluto di volerla prima meglio considerare avanti che la mandi al conspetto degli huomini ».

« Goda dunque il lettore di presente di questa mia prima parte, delle mie fatiche, che in breve l'altra darogli... ».

Questa seconda parte, poi, non fu più pubblicata, e si credeva perduta ([2]).

([1]) Cfr. l'introduzione: « A gli Lettori » quarta pagina (non numerata).

([2]) Fu invece ricuperata, avendone io trovata copia manoscritta nel Codice B. 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna. Questo Codice contiene la intiera opera di Bombelli, cioè la parte algebrica e la geometrica (che occupa

Ciò fa credere che il BOMBELLI sia mancato di vita poco tempo dopo la pubblicazione del suo volume. Ad avvalorare questa credenza sta il fatto che quel SALANDO, che egli aveva presso di sè quale « scrittore de' nostri tempi rarissimo e persona giudiciosa » era lettore « ad artem scribendi » (1) nel nostro studio, e non figura rotulato negli anni 1545-1576 Se vogliamo ammettere che questo sia il periodo che egli ha passato insieme col BOMBELLI, e che sia tornato alla sua cattedra dopo la morte di quello, dovremo assegnare la morte del BOMBELLI in uno degli anni dal 1572 al 1576.

L' « **Algebra di Rafael Bombelli** » raccoglie e coordina tutto il meraviglioso contributo di idee, di risultamenti, di metodi che, nel fervido rinascimento scientifico promosso dalla risoluzione algebrica delle equazioni cubiche, era tumultuariamente sbocciato dalla ardita genialità creatrice degli algebristi italiani della prima metà del secolo XVI.

Ha pregi singolari che la distinguono da ogni altro trattato di quell' epoca.

Non solo, infatti, in essa si presenta per la prima volta una compiuta sistemazione logica della teoria delle equazioni dei primi quattro gradi; ma il concetto informatore di tutta l' opera, la disposizione e l' ordine della materia, i procedimenti costruttivi e dimostrativi essenzialmente analitici in essa seguiti, rappresentano un passo notevole verso la *aritmetizzazione* della scienza matematica.

Il primo dei 3 libri che compongono l' opera, con concetto

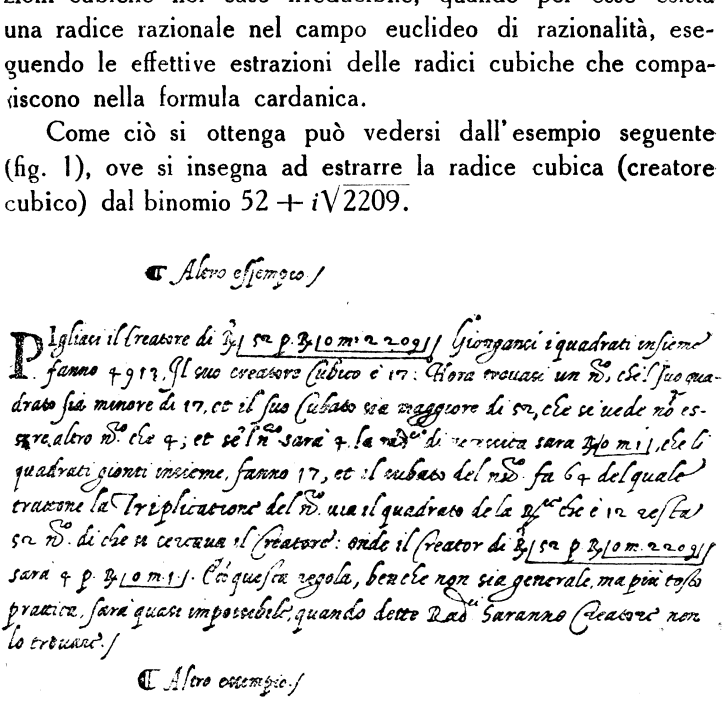
---

i libri IV e V) entrambe in quella prima stesura che il Bombelli dice non ancora ridotta alla perfezione che la eccellenza di questa disciplina richiede. Cfr. Rend. Acc. di Bologna, Anno 1923.

(1) Vale a dire di *Calligrafia*. Questa lettura appare talvolta accoppiata con quella: « Ad Miniaturam ». Per es., per l' anno 1588-89, si trova rotulato: « Ad scribendi artem » : D. Antonius Zanettus, qui etiam est ad miniaturam.

che si direbbe moderno, è interamente dedicato alla successiva estensione del campo aritmetico di razionalità. Qui, per la prima volta, si considerano come enti aritmetici i numeri immaginari, si rappresentano questi con simbolismo opportuno al loro calcolo, e le leggi di questo calcolo vengono effettivamente poste, ampiamente sviluppate ed applicate ad un procedimento che libera dall'immaginario le formule di risoluzione delle equazioni cubiche nel caso irreducibile, quando per esse esista una radice razionale nel campo euclideo di razionalità, eseguendo le effettive estrazioni delle radici cubiche che compaiscono nella formula cardanica.

Come ciò si ottenga può vedersi dall'esempio seguente (fig. 1), ove si insegna ad estrarre la radice cubica (creatore cubico) dal binomio $52 + i\sqrt{2209}$.


Altro essempio.

Pigliaci il Creatore di 52 p. 3 | 10 m. 2209 | Giongansi i quadrati insieme fanno 4912. Il suo creatore cubico è 17: Hora trouasi un nº, che il suo quadrato sia minore di 17, et il suo cubato sia maggiore di 52, che si uede nº essere altro nº che 4; et se l'n sarà 4 la nº di ueruca sara 3 p 10 m 1, che li quadrati gionti insieme, fanno 17, et il cubato del nº fa 64 del quale trauasi la Triplicatione del nº. uia il quadrato de la 3ª che è 12 resta 52 nº. di che si cercaua il Creatore: onde il Creator di 3 | 52 p 3 | 10 m. 2209 | sara 4 p. 3 | 10 m. 1 |. Ò questa regola, benche non sia generale, ma più tosto practica, sarà quasi impossibile, quando detti Rad.ci saranno Creatori non lo trouarò.

Altro essempio.

Fig. 1.

La *teoria delle Equazioni*, trattata nel Libro II, dà una suggestiva e geniale dimostrazione di esistenza, nel campo reale, delle radici, e pone in vista le relazioni di dipendenza fra il problema della risoluzione della equazione cubica ed i pro-

blemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo.

Le equazioni biquadratiche, che prima erano state risolute solo per alcuni casi, che a quel tempo si consideravano come particolari, con completa ed ordinata discussione vengono sistemate a teoria compiuta e perfetta. Infine si costruiscono equazioni algebriche i cui coefficienti sono funzioni di una quantità indeterminata (il Tanto) e si risolvono con formule che esprimono i valori della incognita in funzione della indeterminata che figura nei coefficienti.

Anche il simbolismo e la tecnica dell'algoritmo presentano, nell'*Algebra* di BOMBELLI, notevoli progressi: per l'uso delle parentesi nelle formule algebriche, e (specialmente nel manoscritto) degli indici dei radicali, e per una rappresentazione delle potenze della incognita, che, adottata poi da A. GIRARD, da A. ROMANO, dallo STEVIN..., per successivi adattamenti ha dato luogo alla odierna rappresentazione esponenziale delle potenze.

Il libro del BOMBELLI è stato per più di un secolo testo universale di Algebra Superiore. L'HUYGENS stimava di fare un grande elogio al LEIBNIZ, scrivendogli: « Vous avez plus fait que BOMBELLI... » (1).

Lo stesso LEIBNIZ, che sul libro di lui aveva compiuta la sua educazione algebrica (2), lo considerava come maestro

---

(1) Cfr. « Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern » herausgeben von C. F. GERHARDT, Berlin 1899, pag. 565.

(2) Briefwechsel, loc. cit., pag. 528: « Er hatte sich bis dahin aus den elementaren Lehrbüchern von LANZ und CLAVIUS unterrichtet, welche das algebraische Rechnen bis zur Wurzelausziehung des zweiten und dritten Grades enthalten. Zur Fortzetzung dieser Studien, namentlich in Betreff der Auflosung der cubischen Gleichungen, wählte LEIBNIZ das, für seine Zeit berühmte Werk zu BOMBELLI: *L'Algebra, parte maggiore dell'Aritmetica divisa in tre libri*, Bologna 1572, zum Fuhrer ».

egregio (Egregium certe artis analyticae magistrum... ([1])), ed apprezzava principalmente le ricerche da lui fatte sul caso irreducibile delle equazioni cubiche, che egli pone a fondamento di ulteriori progressi ([2]).

Sull' Opera idraulica compiuta dal BOMBELLI per il prosciugamento della Val di Chiana, abbiamo scarse notizie.

Il TORRICELLI ne fa onorevolissima menzione nelle sue *Scritture sulla bonificazione della Val di Chiana*, ove dice:

« Fu fatto con quell' opera, veramente eroica, il massimo aquisto che si potesse giammai sperare dalle bonificazioni di quei paesi. Io tratto dell' apertura della Chiana fatta per via di canali che si vedono alli ponti di Arezzo. Allora la Chiana era palude serrata affatto, e però non è maraviglia se con aprirla si conquistarono tante terre; le quali oggidì si godono e si coltivano. Adesso la Chiana è aperta affatto, e l' apertura è tanto bassa che è atta a scolare l' acqua di tutte le praterie, di tutte le pasture e di grandissima parte anco delle cannucce e realmente le scola ».

Il FOSSOMBRONI, nelle sue *Memorie idrauliche-storiche sopra la Val di Chiana*, (Bologna 1824), dice che « la maggior parte delle comunità di Val di Chiana, tra il 1525 ed il 1535, affidarono al pontefice Clemente VII le rispettive porzioni di paludi acciocchè, bonificate, fossero poste a coltura. Furono diversi i lavori intrapresi per prosciugare la Chiana; ma la morte di Papa Clemente e del Cardinale Ippolito e del

---

([1]) Ibidem pag. 559.

([2]) Ibidem pag. 552. « Haec difficultas omnibus hactenus algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisdam eorum est, qui non professus sit regulae Cardani in hoc casu exceptionem pati. Primum omnium RAFAEL BOMBELLI, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editum vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio... ».

duca Alessandro, e molto più le civili turbolenze, interruppero ogni cosa e non fu ripresa questa bonifica grandiosa fino all'anno 1551 ».

Se dunque, come afferma il BOMBELLI, la composizione della sua *Algebra* avvenne... « all'hora che quasi era abbandonata l'impresa della essicatione della palude... », dovremo ad essa assegnare una data anteriore al 1551.

Vedremo diffatti, da un insieme di circostanze concomitanti, risultare per il manoscritto bombelliano la data probabile del 1550.

L'opera inedita. — Il Codice B. 1569 della Biblioteca comunale dell'Archiginnasio in Bologna, che contiene manoscritta l'intiera Opera del Bombelli nelle due parti: algebrica e geometrica (entrambe nella prima imperfetta redazione; cioè non ancora ridotte, nè l'una nè l'altra, a quella perfezione che la eccellenza di questa disciplina richiede), è un grosso volume di grande formato (27,5 × 41) di 260 carte, delle quali le prime XVI, non numerate, contengono il frontespizio e l'indice, cui seguono 212 carte numerate dall'1 al 212, e 32 carte non numerate di testo.

Alle carte non numerate, per comodità di riferimento, fu data una numerazione provvisoria a lapis, e cioè furono numerate dall'I al XVI quelle pertinenti al frontespizio ed all'indice, e dal 213 al 244 quelle del testo che non avevano numerazione.

L'indice, dettagliato e preciso, si estende solo agli argomenti trattati nelle 212 carte che erano numerate; quando cessa la numerazione delle pagine, cessa anche l'indice, il che è segno di men accurata elaborazione.

Sono completamente bianche le carte I, XV, 112-114, 155-162, 188, 214-218, 223-226, 244. Queste carte bianche sono sempre fra libro e libro, o fra capitolo e capitolo, per lasciar posto ad introduzioni o ad aggiunte che l'autore aveva in animo di fare e che poi non avvennero.

In epoca imprecisata, forse assai remota, furono strappate alcune carte bianche, per la gola di qualche foglio di quella ottima carta, e così è andata perduta anche qualche pagina del manoscritto. Fra le carte 234, 235 della numerazione provvisoria, manca un intiero fascicolo.

Il frontespizio porta la intitolazione:

L'Algebra - di Raffaello Bombello - Cittadino Bolognese - al Reverendissimo - Monsignore, il Signore - Alessandro Rufini - Vescovo di - Melfi suo Signore -.

Seguono due carte bianche, destinate alla prefazione, poi la « Tavola di quello che ne l' opera si contiene », che occupa 10 carte, si estende alle 212 carte del testo che erano numerate, e comprende la materia dei primi quattro libri.

Il libro V non ha indice, e le carte ad esso pertinenti non furono numerate.

Dal confronto con l'indice si ricava che nelle pagine bianche, che intercedono fra il I ed il II libro, doveva trovarsi il Capitoletto: « A partire per un Binomio di due sorta di Radici », ultimo del libro I, il quale, come si vede nel testo a stampa, avrebbe occupato poco più di mezza facciata nel verso della carta 47.

La carta 48 era evidentemente destinata alla introduzione del libro II.

Il libro III ha una interessante introduzione, diversa da quella che si legge nel testo a stampa, che sarà riprodotta integralmente nella presente edizione.

Fra le carte 234, 235 c'è una evidente lacuna.

Col verso della carta 243 termina il manoscritto, senza che apparisca terminata l'opera.

Il codice è scritto con posato, elegante, chiarissimo carattere, degno della scuola di amanuensi onde uscì quel FRANCESCO DA BOLOGNA che incise gli *aldini*, e per la perspicua

disposizione e la sicurezza con cui sono trattate le formule algebriche, dimostra in chi scrisse speciale educazione matematica [1]. Anche altri manoscritti matematici delle nostre biblioteche appaiono scritti dalla stessa mano.

Il quadro che il professore scriveva alla lavagna accompagnando la esposizione di ogni proposizione, è intercalato nel testo, e serve a raccogliere in lucida sintesi lo svolgimento

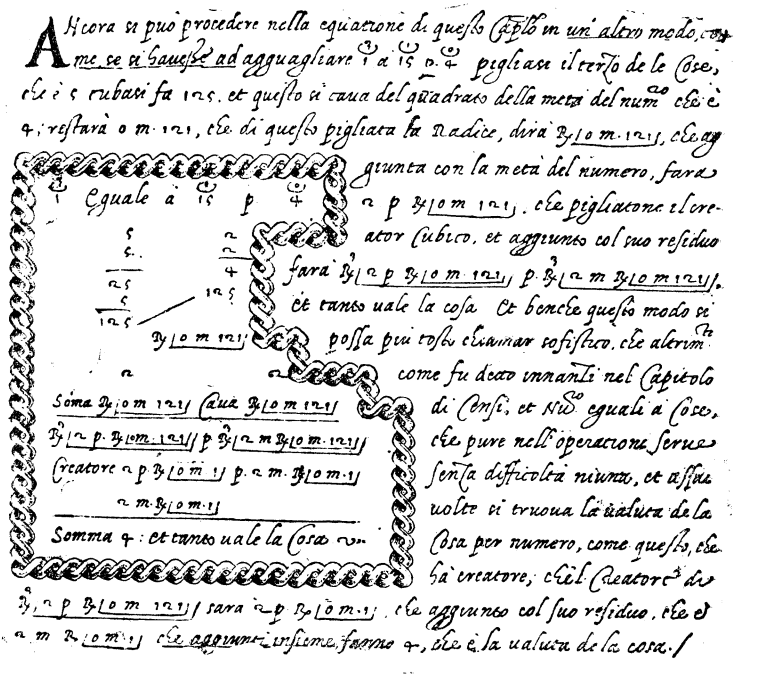


Fig. 2.

---

(1) Se, come appare dalla lettera dedicatoria, il manoscritto è di mano di F. M. Salando, torna a proposito l'elogio di: « Scrittore de' nostri tempi rarissimo e persona giudiciosa », che di lui fa il Bombelli.

del ragionamento, ed a dar chiara idea del simbolismo algebrico e della disposizione del calcolo.

Ecco, come esempio (fig. 2), la risoluzione di una equazione cubica nel caso irreducibile:

Si tratta della equazione: $x^3 = 15x + 4$. La indicazione delle operazioni di calcolo necessarie allo stabilimento della formula cardanica è quanto mai chiara e perspicua. E nella formula cardanica sono manifesti gli indici nei radicali cubici, e l'uso delle parentesi semplici e doppie. I radicali cubici, ove figura l'immaginario $\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{0 - 121}}$, in applicazione di un metodo dallo stesso BOMBELLI insegnato, sono trasformati nei numeri complessi $2 + \sqrt{0 - 1}$, $2 - \sqrt{0 - 1}$, che sono radici (creatore) delle quantità sotto il segno, e dalla loro somma si ha il valore reale 4, soluzione della equazione (la cosa).

Alcune pagine portano, nei larghi margini, postille, fatte in epoca posteriore, che commentano e completano il testo, avvicinandolo alla lezione del libro a stampa. Nel saggio qui riportato (fig. 3) il capitoletto aggiunto in postilla, (Modo di partire per un residuo cubo) è nel testo a stampa alla pag. 132.

In qualche punto vi sono correzioni che evidentemente sono di mano dell'autore, perchè le modificazioni così indicate sono effettivamente introdotte nel testo a stampa.

A riprova di ciò si confronti il passo qui riprodotto (fig. 4) con la pagina 60 del testo a stampa, dove, in conformità delle correzioni qui indicate, si legge:

« Se si vorrà il lato secondo relato di un numero (come sarebbe) 1348498765432100987, facciasi come si vede nella figura segnando il primo punto sopra il 7, e perchè il secondo relato è la settima dignità (come si può vedere nelle abbreviature del secondo libro), e però dal primo punto cominciando dalla parte destra, e venendo alla sinistra sino alla

dus per trouare il nº che ha ad essere partitore, tengasi questo ordine: cubasi la maggiore del partitore cioè ℞ 6 fa 6 ⁿᵒ al qual produtto si aggionga il cubato della minore cioè ℞ 3, che sarà 3, et 3 et 6 fa 9, et questo è partitore, et se ℞ 3 fusse meno si cauarebbe il suo Cubato, doue adesso si aggionge, che cauando 3 di 6 restarebbe 3, cioè se diesse ℞ 6 m ℞ 3 et questo basta à partire una quantità per un Binomio Cubo /

¶ A partire una quantità per un Trinomio Cubo /

IL modo di Partire per un Trinomio Cubo fu ritrouato da Supion del Ferro Bolognese, che fu huomo varissimo in quest'arte. Hauendosi a partire ℞ p ℞ 12 p ℞ 10 p ℞ 7. Facasi in questo modo, quadrassi tutte tre queste Radici Cube ciascuna da sè, che faranno ℞ 144 p ℞ 100 più ℞ 49; poi si moltiplica ℞ 7 via ℞ 10 et via ℞ 12 fa ℞ 84 et ℞ 70. et questo si aggionge à la moltiplicationi di ℞ 10. via ℞ 12. cioè ℞ 120. che fara ℞ 120, et ℞ 84 et ℞ 70; et perche sono tutte nate di più via più, che fa più, et così queste Radici bisogna ad essere tutte più però in questo partimento si fanno per regola diuentar meno, et gionte insieme, diranno m ℞ 120 m ℞ 84 m ℞ 70, che aggionte a i tre quadrati fatti di sopra cioè ℞ 144 p ℞ 100 p ℞ 49 faranno ℞ 147

Fig. 3.

ottava farà il punto, che sarà sopra il primo 3. Poi seguitisi sette altre figure e facciasi l'altro punto, che verrà ad essere sopra il secondo 4, e tirisi la linea A: alla... ».

Nella Biblioteca Universitaria di Bologna ho trovato un secondo esemplare, che contiene il solo III libro dell'opera di BOMBELLI, della stessa mano, ed identico, nella parte che contiene, a quello dell'Archiginnasio. I due manoscritti sono evidentemente copie sincrone di uno stesso originale, e fanno fede della diffusione che ebbe l'opera bombelliana, pur nella edizione manoscritta.

La collazione dei due testi mi ha permesso di constatare che le carte 155-162 lasciate in bianco, come si disse, erano destinate alla introduzione del libro IV, e che il libro III, completo nell'esemplare della Universitaria, non è deficiente che per mezza facciata in quello della Comunale, ove appare troncato alla fine della carta 154.

Data del manoscritto. — Abbiamo sicuri argomenti che ci permettono di assegnare al nostro manoscritto una data di parecchi anni anteriore alla pubblicazione (1572).

Nella prefazione dell'opera a stampa il BOMBELLI racconta infatti di avere tradotto insieme col PAZZI i primi 5 libri di DIOFANTO [1]. Ora il raffronto fra i due testi ci dà la certezza del fatto che la edizione manoscritta fu composta dal BOMBELLI prima che egli avesse conosciuto DIOFANTO.

Troviamo infatti che a pagina 201 del testo a stampa il BOMBELLI dichiara di non voler usare per l'incognita la voce « cosa » essendo quella « voce universalissima e comune ad ogni sostantia, così ignota come nota »; ma di voler usare la voce « tanto », perchè meglio appropriata a quantità di

---

(1) ANTONIO MARIA PAZZI fu a Roma lettore dal 1567 al 1575: (Cfr. « Bibl. Modenese » del Tiraboschi, tomo IV, pag. 70).

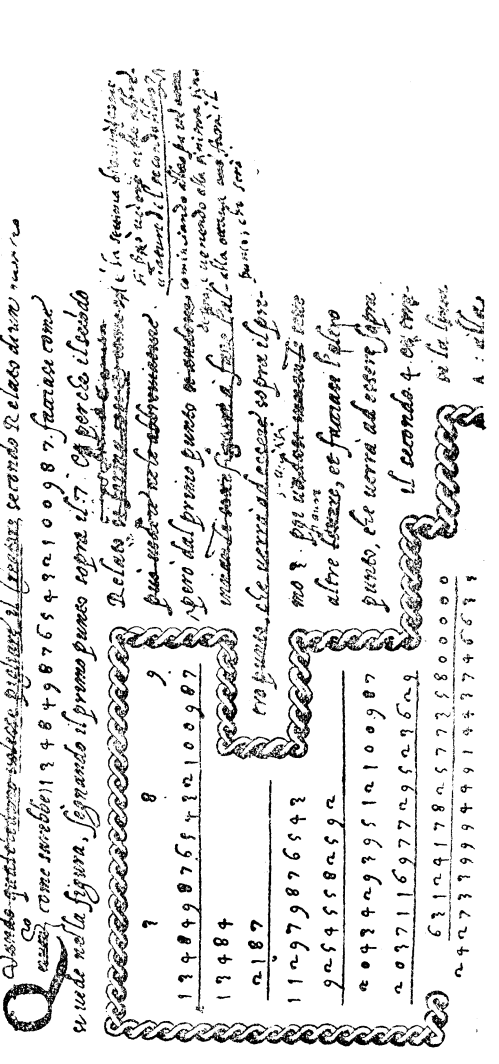


Fig. 4.

numeri e per aver trovato « che DIOFANTO così la noma, il che non è piccolo argomento, questa essere la sua propria e vera voce ».

Similmente (pagina 202), dice di non voler più usare la voce « censo » .... « tanto sconvenevole che più dir non si potrebbe.... però mi son risoluto di seguitare DIOFANTO, (come ho fatto nel restante) e chiamarlo « potenza ».

Ma le nuove voci diofantee non compariscono che nel testo a stampa, dove infatti sono costantemente usate; nel manoscritto invece, non si vedono affatto (se non per correzioni posteriori) e si continuano ad usare gli antichi, deprecati vocaboli cossici.

Più oltre, nella prefazione al libro terzo, il testo a stampa esorta il lettore a volerlo difendere « quando lo audisse accusare per aver deviato dall' uso de' scrittori di questa disciplina, i quali quando hanno voluto trattare di problemi aritmetici mai sempre sotto velame di attioni e negotj humani l' hanno fatto » ; e di non scandalizzarsi trovando che alcuni fra i problemi del terzo libro furono tolti da DIOFANTO.

Conseguentemente a queste premesse vediamo, nell' opera a stampa, il BOMBELLI costantemente rifuggire da questioni pratiche e materiali, e presentare i suoi problemi sotto la più austera forma speculativa, e troviamo inseriti in questo terzo libro non meno di 143 problemi diofantei; mentre, nella edizione manoscritta, non troviamo nemmeno uno di questi 143 problemi di DIOFANTO, ed i quesiti quivi trattati hanno tutti quella veste di pratica materialità, che ad essi solevano dare i matematici medioevali.

Non cade dunque alcun dubbio che la edizione manoscritta non sia stata composta dal BOMBELLI prima di aver avuto cognizione dell' opera di DIOFANTO.

E, siccome il BOMBELLI è stato il primo che in occidente abbia inteso e divulgato DIOFANTO, così dal confronto delle due lezioni si potrà vedere quale precisamente sia stata

l'influenza di DIOFANTO sullo sviluppo delle teorie algebriche in Italia.

Aggiungeremo, per maggiore precisione, che il codice diofanteo fu mostrato al BOMBELLI dal PAZZI nel tempo in cui questi era lettore a Roma, cioè posteriormente al 1567.

Proseguendo l'esame del testo, troveremo altri argomenti che ci permetteranno di fissare entro limiti più ristretti la data della compilazione del nostro manoscritto.

Vediamo infatti a pag. 297 del testo a stampa, ricordato un passo del *Commento del Barbaro ai Dieci libri dell'Architettura di Vitruvio*, ove si espongono le « inventioni di PLATONE ed ARCHITA tarentino... nel voler duplare l'altare ». Questa invenzione di PLATONE è esposta dal BOMBELLI alla pag. 49 del testo a stampa, come seconda dimostrazione del « Modo di trovare il lato cubico di un numero in linea », ed è largamente usata nel Libro secondo, per costruire quelle « dimostrazioni in superficie piana », che il BOMBELLI dice di aver trovato dopo aver tanto investigato, e che ci danno, in particolare, la prima dimostrazione della esistenza di radici reali per la equazione cubica nel caso irreducibile.

Ora tutta questa materia non è contenuta nel manoscritto, ove non si dà la costruzione di PLATONE, non si espongono dimostrazioni in superficie piana e non si nomina il BARBARO.

Da tuttociò è manifesto che, al tempo in cui compilava il manoscritto, il BOMBELLI non conosceva il commento del BARBARO, e, poichè questo commento è uscito per le stampe l'anno 1556, così par ragionevole far risalire ad epoca anteriore l'età del manoscritto medesimo.

Altrettanto si dica a proposito dei problemi sui *poliedri regolari*, che il BOMBELLI risolve nel Libro sesto. La incertezza che dimostra sul numero di questi poliedri e sul modo onde essi si possono pensare generati, ci prova che

al tempo in cui componeva il suo libro non conosceva ancora il passo di PAPPO, ove i poliedri archimedei sono enumerati e descritti. E, poichè la celebre traduzione di PAPPO fatta dal COMANDINO, è stata pubblicata nel 1558, abbiamo un altro argomento in favore della opinione superiormente esposta.

Altri non trascurabili elementi, da noi già considerati, si ricavano dalle notizie che ci dà lo stesso BOMBELLI sulla sua attività scientifica, i quali, come abbiamo visto, concorrono nel fissare la compilazione del manoscritto a data anteriore al 1551.

Infine osserveremo che ad analoghe conclusioni porta l'esame esterno, estrinseco del Codice. Il carattere è stato dagli intendenti assegnato alla metà del secolo XVI, e la filagrana della carta (magnifica carta bambacina, spessa, quasi tutta di una risma), è registrata nel manuale del BRIQUET con la indicazione: « Lucca, 1548, Archivio di Stato ».

D'altra parte il manoscritto è certamente posteriore alla pubblicazione della *Ars Magna* (1545), e risente ancora del fervore di battaglia destato dalle dispute del FERRARI col TARTAGLIA (1547,1548); ritengo quindi di non essere lungi dal vero se lo dico composto intorno al 1550.

Analisi del manoscritto. — I primi due libri sono nel manoscritto sostanzialmente identici a quelli contenuti nell'opera a stampa. Il Libro terzo differisce da quello che si legge nel testo a stampa, per la mancanza di problemi indeterminati (diofantei), che sono sostituiti da problemi di pratica applicazione. Notevole in questo libro il senso di generalizzazione, per cui, dopo aver risoluto algebricamente ogni proposto problema, il BOMBELLI enuncia la regola di risoluzione che vale per tutti quei problemi che differiscono dal proposto solo per i valori

numerici delle quantità note, ed, in un secondo tempo, si propone il medesimo problema, dove per altro i dati non si suppongono numericamente determinati, ma dipendenti da quantità indeterminata (il Tanto) che egli rappresenta coi simboli da lui introdotti per le potenze della incognita, e risolve il problema con espressioni che sono funzioni esplicite di quella indeterminata.

I Libri quarto e quinto contengono la *Parte Geometrica*, rimasta fino ad ora inedita.

Il Libro quarto si presenta come diviso in tre parti, che diremo Capitoli. La divisione risulta, oltre che dalla diversità della materia, dalle pagine bianche intercalate fra capitolo e capitolo.

Al primo capitolo si può dare il titolo di « Algebra Geometrica », o, come dice il BOMBELLI, di *Algebra linearia*. Dopo una breve introduzione, dove sono ricordate le costruzioni geometriche elementari, definisce le operazioni aritmetiche sui segmenti. Insegna cioè a: « *sommare de linee, sottrarre, moltiplicare, partire, trovare il creatore* (estrarre la radice), e *la lunghezza delle dignità* (cioè innalzare a potenza) ».

Il CARTESIO, che quasi un secolo dopo di lui iniziava con gli stessi principii la sua geometria, sente il bisogno di scusarsene... « *je ne craindray pas d' introduire ces termes de Arithmetique en la Geometrie* ».

Del pari, e come più tardi fece il CARTESIO, per rendere possibile la moltiplicazione, il quoziente, le potenze dei segmenti, il BOMBELLI introduce nelle sue costruzioni il *segmento unitario* (fig. 5): e, più ardito dello stesso CARTESIO, non teme la introduzione nella sua Algebra linearia di segmenti negativi (fig. 6) e di aree negative o nulle. (fig. 7).

L' estrazione di radice quadrata, che: « nell' algebra linearia non patisce la difficoltà che parte nel numero », è eseguita con la costruzione che serve a trovare la media propor-

Dimostratione della lunghezza delle dignità essendo noto la Cosa

Essendo noto la valuta della Cosa rispettiua à una misura data si può trouare in lunghezza tutte l'altre dignità, et perche à qualche duno non capirà, che essendo noto la valuta della Cosa senza altro si possa trouare la valuta del censo, et dell'altre dignità perche nell'operatione di Algebra in numero dato che si sa la valuta della Cosa subito si trouerà la valuta del censo quadrando essa valuta, come sarebbe se la Cosa valesse 3 il censo valerà 9 senza cercare altro, et in linee addimando una misura, dico, che el procedere dell'uno non è differente dal procedere dell'altro perche se la Cosa vale 3 quel 3 è numero rispetto à l'unità, et tale proportione è da detta unità al 3 valuta della Cosa come detto 3 al 9 valuta del Censo, et così va procedendo la proportione rispetto à quella unità con la misura data farà l'effetto della unità in numero Sia la comune misura ò vero misura data la linea A, et la linea B sia la valuta della Cosa, et volendosi trouare la lunghez-

Fig. 5.

Sotrare di linee

Il sotrare di linee non è altro, che togliere della maggiore una parte pari à la minore, quando la minore si sa da cauare della maggiore, et quello che resta fuora del taglio sarà il restante; ma se si sarà à cauare la maggiore della minore si farà il medesimo et quello, che resta sarà meno: come per essempio sia la linea b.d della quale se ne habbia à cauare la a. facciasi la b.c. pari à la a. la c d sarà il restante, ma se si sarà à cauare la b.d della a. la c d sarà il restante, ma sarà meno

la h i sarà per essere pari à la b c lato del censo, et viene ad essere pari à la r s, et li detti due suplementi saranno meno, et si sauerà il censo a b c meno meno li due suplementi d o c f, et b c h i più il quadrato c g f i eguale à nulla per finire il quadrato a e h m u s ma-

Fig. 7.

zionale fra il dato segmento e l'unità. *L'estrazione di radice cubica* è costruita mediante una delle costruzioni instrumentali che servono a « trovare due medie proporzionali fra la comune misura et la linea di che se ne ha da pigliare il creatore ».

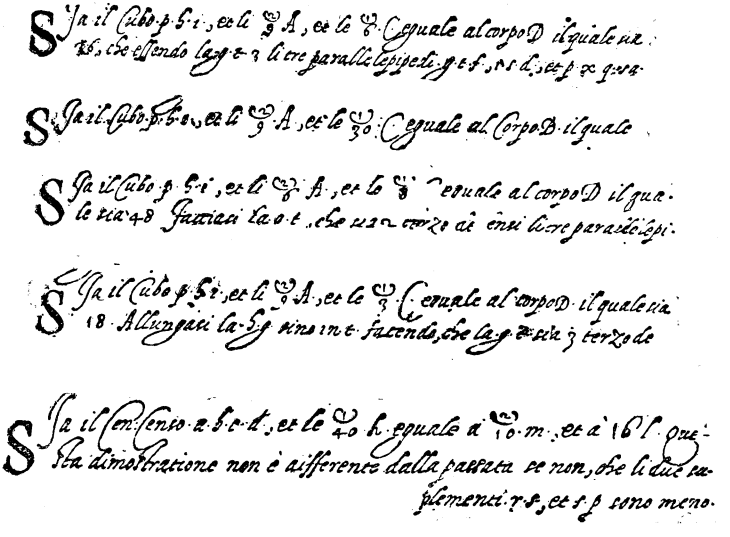


Fig. 8

La risoluzione geometrica delle equazioni è fatta dal BOMBELLI con procedimento analitico; egli rappresenta con un segmento arbitrariamente scelto la incognita della equazione (o, se occorre, una potenza della incognita) ed eseguisce su questo e sui segmenti che figurano come coefficienti le operazioni indicate dalla equazione, ne risulta così una relazione fra figure geometriche che permette di costruire il segmento incognito.

Rappresentando le quantità note con segmenti e questi con lettere dell'alfabeto, le equazioni che scrive il BOMBELLI

assumono forma letterale, come si vede dagli esempi che qui sono recati, (fig. 8) nei quali, quando si prescinda da quelle note numeriche che il BOMBELLI pone, come esemplificazione pratica, accanto ai coefficienti letterari (sottoposti alle potenze della incognita) si vedranno i prodromi della *logistica speciosa*, più tardi introdotta dal VIETA.

Notevole in questo capitolo è anche la proposizione 33: « *Dimostratione del partire per più o vero men numero* » ove, con geniale estensione della prop. 5 del Libro secondo di EUCLIDE, si dimostra la formula che dà il quoziente della somma o della differenza di due cubi, per la somma o la differenza delle basi.

Il Capitolo secondo, ad imitazione del Libro decimo di EUCLIDE, tratta geometricamente della struttura del campo di razionalità, che si ottiene aggiungendo al campo euclideo una irrazionalità cubica.

Nel Capitolo terzo il BOMBELLI riprende tutti quei problemi, che aveva trattato nel libro terzo dell'Algebra e dei quali, come già ho detto, egli aveva dato due gradi di successiva generalizzazione analitica, e li traduce in altrettante questioni geometriche, li riporta cioè nell'Algebra geometrica, ove figurano coefficienti letterali, che conferiscono al problema massima generalità.

Ma il suo procedimento è l'inverso di quel che segue l'algebra geometrica degli antichi; egli infatti non risolve direttamente il problema geometrico, per ricavare la risoluzione analitica dalla interpretazione aritmetica della costruzione eseguita, ma si vale della risoluzione algebrica da lui svolta nel Libro terzo, per ricavarne la costruzione geometrica; ed invece di considerare la costruzione geometrica come procedimento necessario alla giustificazione della validità dei risultamenti ottenuti per via analitica, fa consistere la dimostrazione della costruzione geometrica nella corretta interpretazione delle

deduzioni logiche ottenute con la regola d'algebra (« la dimostratione nasce dalla sua operatione algebrica »). Parmi superfluo il far rilevare l'importanza storica di questo fatto, mentre perfino il VIETA riteneva di non potersi esimere dal dare dimostrazione geometrica di ogni suo procedimento analitico.

Il Libro quinto tratta della applicazione dell'algebra a problemi di geometria. Questo Libro, che certamente è il più imperfetto nella elaborazione, si compone di due Capitoli. Il primo tratta della inscrizione di poligoni nel cerchio, della divisione delle figure piane in parti aventi fra loro rapporto assegnato, e degli elementi di topografia. Il secondo, dei poliedri regolari e di tre poliedri semiregolari.

In questa trattazione si ha esempio della determinazione di un punto del piano di un dato triangolo mediante coordinate ortogonali, ed è notevole, a proposito della inscrizione nel cerchio dell'ennagono regolare, la riduzione del problema della trisezione dell'angolo alla risoluzione di una equazione cubica nel caso irreducibile.

La presente edizione riproduce dal Codice B. 1569 la *Introduzione al Libro terzo* (diversa da quella che si legge nel libro a stampa), ed i *libri quarto e quinto* che sono tratti ora dall'inedito.

La trascrizione è integrale, fu rispettata la grafia e furono conservati anche gli idiotismi, caratteristici del dialetto bolognese, che l'autore ha profuso con generosa prodigalità.

Le aggiunte al testo dell'editore (contrassegnate da parentesi quadra), consistono quasi esclusivamente nella numerazione dei capoversi e delle carte del Libro quinto.

Le figure, che solo in infima parte si trovano nel manoscritto, furono tracciate in modo che rispondessero al testo; e fu questa non breve, nè lieve fatica.

La note a piè di pagina sono dell'editore, e furono poste a chiarimento del testo, specialmente nei punti ove questo si richiama a passi dei primi tre Libri del manoscritto.

Considerando poi che anche la edizione del 1572 è rara e mal nota, mentre d'altra parte la cognizione del contenuto di essa è necessaria alla comprensione dell'inedito, l'editore ne ha fatto una analisi accurata e minuta che ha premesso, come introduzione, alla riproduzione del testo.

ANALISI
DELL' " ALGEBRA " DI RAFAEL BOMBELLI

L'algebra / Opera / di RAFAEL BOMBELLI da Bologna / Divisa in tre libri / Con la quale ciascuno da sè potrà ve/ nire in perfetta / cognitione della teoria dell'Aritmetica / Con una Tavola copiosa delle materie, che / in essa si contengono. / Posta hora in luce à beneficio degli studiosi di / detta professione.

In Bologna / Per GIOVANNI ROSSI. 1572. Con licenza de' Superiori.

Consta di carte 28 senza numero, con frontespizio, dedicatoria, tavola d'indice e prefazione; poi 650 facciate di testo e due carte in fine con errata e registro.

Alcuni esemplari portano la data 1579, ma appartengono anch'essi alla medesima edizione: fu in essi soltanto cambiato il frontespizio e ristampata la dedicatoria.

L'opera è dedicata: Al reverendissimo / Monsignor, il Signor / Alessandro Rufini, / Vescovo digniss. / di Melfi, / Signore e padron suo osservadiss.

La lettera dedicatoria e la prefazione sono interessanti, dal punto di vista storico, per le notizie che ci danno (le sole autentiche) su la vita e le opere dell'autore.

Libro primo. — Il libro primo tratta delle successive estensioni di numero e del campo di razionalità.

Considera come operazioni atte ad estendere il campo, la somma di due elementi non riducibili per somma e la estrazione di radice.

Suppone noto il calcolo aritmetico nel campo assoluto di razionalità, e procede subito ad una prima estensione con la introduzione di *radicali semplici* che insistono sui numeri razionali [1].

Sviluppa il *calcolo dei radicali*, ed in particolare insegna la *estrazione di radice aritmetica esatta ed approssimata*.

È notevole la regola che egli dà per « formare il rotto nella estratione della radice quadrata », cioè per calcolare la radice approssimata di numeri non quadrati.

Ecco, in linguaggio moderno, il procedimento da lui indicato:

Pongasi che si voglia calcolare un valore prossimo di $\sqrt{13}$. Fatto

$$\sqrt{13} = 3 + x,$$

si avrà

$$13 = 9 + 6x + x^2,$$

cioè

$$4 = 6x + x^2 \qquad (1).$$

Trascurando in prima approssimazione x^2, si ha

$$x = \frac{4}{6}, \ \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6}.$$

Volendo un valore più prossimo, si faccia nella (1),

$$x^2 = x \cdot x = \frac{4}{6} x$$

---

[1] Egli dice p. es, (pag. 4): « La radice cuba è il lato cubico di un numero non cubo, il quale è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice Cuba ». In altri termini, è un ente non appartenente al campo dei numeri (razionali) ma è un nuovo elemento che chiamiamo a quel modo; il quale non si può definire (nominare) altrimenti che col dare le leggi secondo cui esso viene combinato, mediante le operazioni aritmetiche coi numeri razionali.

ne verrà

$$4 = \left(6 + \frac{4}{6}\right) x, \quad x = \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}, \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}.$$

Il BOMBELLI dice che « procedendo come si è fatto di sopra si approssimarà come l'huomo vorrà » ; ma, non avendo egli lasciati indicati i calcoli (come da noi si è fatto), non estrinsecò la frazione continua, che fu più tardi rivelata dal CATALDI (1).

Questa trattazione puramente aritmetica è completata con la costruzione geometrica della radice quadrata di un numero, che egli suppone rappresentato da un segmento. Ed in questa costruzione egli dà un primo esempio di applicazione del *segmento unitario* nelle costruzioni geometriche.

I medesimi problemi sono di poi risoluti per le *Radici Cubiche*. Insegna ad estrarre la radice cubica da un numero dato, dà una regola per il calcolo approssimato (2) e per la *costruzione geometrica del lato cubico di un dato segmento*, costruzione che egli identifica con quella della *inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti*.

Siccome peraltro tali costruzioni « giammai si sono effettuate se non instromentalmente », il BOMBELLI dà due costruzioni instromentali, delle quali la seconda è quella solitamente attribuita a PLATONE.

Tratta anche delle *estrazioni di radici quarte, quinte,...* avvertendo tuttavia che: « Non era l'animo mio di trattare di simil sorta di radici (come cosa superflua), per non esser

---

(1) ETTORE BORTOLOTTI, « *La scoperta delle frazioni continue* ». (Boll. della Mathesis. A. XI. 1919, pag. 101).

(2) Posto $N = a^3 + r = (a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$, trascurando x^3, si ha per determinare x la equazione di 2° grado: $3ax^2 + 3a^2x = r$.

necessaria, non havendo i capitoli da agguagliare del primo incomposto over relato con l'altre dignità; ma a preghiera degli amici son stato forzato metterlo, protestandomi, che se venisse mai un altro TARTAGLIA, esso direbbe ch'io nol ponessi per non sapere le lor operationi... » (1).

Il *prodotto, il quoziente di radicali semplici,* genera ancora elementi dello stesso campo, ma la *somma o la differenza di due radicali,* o di un radicale e di un numero razionale, genera nuovi elementi, che egli, seguendo la nomenclatura euclidea, chiama: *Binomi* e *Recisi.*

Ma, prima di trattare di questi nuovi elementi e del campo che per la loro introduzione viene generato, egli insegna a distinguere quelle somme di radicali quadratici e cubici che, per la natura loro particolare, possono trasformarsi in radicali semplici, cioè insegna a *sommare ed a sottrarre di radici, o di radici e di numeri* quando questo sia possibile, Perchè, nel fatto, questi non sono nuovi elementi; ma appartengono ancora al campo primitivo.

Lo studio dei binomi e dei residui euclidei, fatto in modo puramente analitico, occupa circa 30 pagine del libro le quali contengono ciò che è necessario di conoscere del *decimo libro di Euclide,* per la risoluzione delle equazioni quadratiche.

L'applicazione di un radicale quadratico sui binomi e sui recisi euclidei, dà origine a nuovi elementi, che egli chiama genericamente: *Radici Legate.* I quali, aggiunti al campo primitivo, generano una nuova estensione del Campo di raziona-

---

(1) Cfr. pag. 53. Nelle dispute del Tartaglia col Ferrari, una delle contestazioni su cui il Tartaglia maggiormente ha insistito è stata appunto quella di non avere il Ferrari saputo estrarre le radici dei gradi più elevati al modo che egli riteneva per migliore.

Nel manoscritto dell'Archiginnasio, c'è la regola per l'estrazione di radici di indice qualunque; ma non c'è questo accenno al Tartaglia.

lità. Ma, prima di studiare la struttura di questo campo, egli considera *quelle Radici Legate che possono esser trasformate in semplici binomi o recisi.* In altri termini insegna il modo di « *Trovare il lato dei Binomi e dei Recisi* » quando questa estrazione è effettuabile.

Esaurito così lo studio del campo numerico opportuno alla risoluzione delle equazioni riducibili ai primi due gradi, il BOMBELLI procede ad una nuova estensione, con la introduzione di radicali cubici su gli elementi del campo considerato.

Ed anzitutto considera *Binomi cubici,* cioè somme o differenze di radicali cubici, e chiama *Residuo cubico* del binomio $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$, la espressione $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, « che moltiplicata via il detto binomio fa numero », cioè dà prodotto razionale.

Anche per queste nuove espressioni dà le regole del calcolo aritmetico, ed in particolare insegna la *regola per rendere razionale il denominatore di una frazione che contenga la somma di due o di tre razionali cubici,* regola che, nella edizione manoscritta, egli attribuisce a SCIPIONE DAL FERRO.

La sovrapposizione di un radicale cubico alla somma od alla differenza di due radicali quadratici, dà origine a nuove più complicate espressioni, che egli indica col nome di *Radici Legate Cube.*

Anche per tali espressioni egli dà le regole di calcolo numerico, e in particolare si occupa del problema di « trovare il lato cubo di un *binomio* », cioè di trasformare una espressione della forma $\sqrt[3]{\sqrt{n} \pm m}$ nel binomio (o reciso) $\sqrt{v} \pm u$.

Egli dimostra che questo problema si riconduce a quello della risoluzione della equazione cubica

$$x^3 + 3\sqrt[3]{n - m^2} \cdot x = 2m$$

in quanto che tale equazione è risoluta dalla espressione:

$$2u = \sqrt[3]{\sqrt{n} + m} - \sqrt[3]{\sqrt{n} - m} \text{ (1)}.$$

L' ultima estensione del campo numerico, resa necessaria per la risoluzione delle equazioni cubiche nel caso irreducibile, consiste nella introduzione dei *numeri immaginari*. Il BOMBELLI dapprima (come si vede nél manoscritto) ritenne di poter senz' altro applicare alle radici quadrate dei numeri negativi le leggi di calcolo proprie delle radici aritmetiche di numeri positivi, e rappresentò i numeri immaginari sotto forma di radicali, con simboli della forma $R\ (0 \cdot m \cdot 1)$, cioè $\sqrt{0 - 1}$.

Ma poi si accorse che questi erano enti di natura speciale, alla cui rappresentazione occorrevano simboli appropriati, e pel cui calcolo occorreva stabilire speciale algorismo.

Vale la pena di riportare testualmente le parole con cui egli incomincia questa nuova parte del suo trattato:

« Ho trovato un' altra sorte di R. c. legate molto differente dall' altre, la qual nasce dal capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso capitolo si dimostrarà, la qual sorte di *R. q.* ha nel suo algorismo diversa operatione dell' altre e diverso nome. Perchè, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare nè più, nè meno, però lo chiamerò *più di meno* quando egli si dovrà aggiungere, e, quando si dovrà cavare lo chiamerò *men di meno*, e questa operatione è necessaris-

(1) Pag. 152. Cfr. E.T. BORTOLOTTI, *L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI.* (Periodico di matematica), Serie IV, vol. 5., 1925, pag. 159.

sima più che le altre *R. c. L.* per rispetto delli capitoli di potenze accompagnati con li cubi o tanti o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di *R.* che quelli dove nasce l'altra *la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch' io sin che ho trovato la sua dimostratione in linee* (come si dimostrarà nella dimostratione del detto capitolo in superficie piana).

« E prima trattarò del moltiplicare, ponendo la regola del più et meno:

più via più di meno fa più di meno $\{ (+)(+i) = i \}$
meno via più di meno fa meno di meno $\{ (-)(+i) = -i \}$
più via meno di meno fa meno di meno $\{ (+)(-i) = -i \}$
meno via meno di meno fa più di meno $\{ (-)(-i) = +i \}$
più di meno via più di meno fa meno $\{ (+i)(+i) = - \}$
più di meno via men di meno fa più $\{ (+i)(-i) = + \}$
meno di meno via più di meno fa più $\{ (-i)(+i) = + \}$
meno di meno via men di meno fa meno $\{ (-i)(-i) = - \}$

(pagina 169).

« Si deve avvertire che tal sorte di R. legate non possono intravenire se non accompagnato il binomio col suo residuo... e avvertiscasi che quando si dice il *Residuo di un Binomio*, che quello che si chiama *p. di m.* nel binomio si chiamerà *m. di m.* nel residuo ».

Introdotto così anche il concetto di *numeri complessi*, ed avvertito che nella risoluzione delle equazioni (cubiche a coefficienti reali) ogni radice complessa è sempre accompagnata dalla sua coniugata, il BOMBELLI espone le regole del calcolo dei numeri complessi, e ne fa numerose, interessanti applicazioni.

Notevole è il paragrafo sul *Modo di trovare il lato cubico di simili qualità di Radici* ove il BOMBELLI si propone di

trasformare una espressione della forma $\sqrt[3]{m \pm i \sqrt{n}}$, in un'altra della forma; $u \pm iv$.

È da ammirare la sicurezza con cui egli procede nei calcoli, anche se complicati da radicali, sui numeri complessi, la qual sicurezza fa strano contrasto con le incertezze, i paralogismi, gli errori che su tale argomento si commisero quando si vollero considerare i numeri immaginari come radici dei numeri negativi, e parve lecito l'applicare ad essi tutte le regole che si hanno nel calcolo dei radicali aritmetici.

La notazione bombelliana, il *p. di m.*, (in apparenza tanto stravagante), vale esattamente quanto il simbolo *i*, introdotto dal GAUSS con considerazioni analoghe a quelle che il BOMBELLI ha esposto nel passo da me riportato, e la preventiva assiomatica enunciazione che egli ha fatto delle regole di calcolo per quel nuovo simbolo, ci dà un esempio notevole di una aritmetica fondata su postulati opportunamente ed arbitrariamente scelti.

Libro secondo. — Il Libro secondo studia i *polinomi algebrici* e le *equazioni algebriche dei primi quattro gradi.*

Conservando nella sua esposizione quel rigore di metodo che abbiamo ammirato nel libro primo, il BOMBELLI incomincia con la definizione di variabile (*il tanto*) e delle sue potenze; ed introduce un sistema di simboli (*caratteri*) atti a la rappresentazione della variabile e delle potenze di essa.

La notazione che egli introduce è a tipo *esponenziale*, consiste nell'uso di un semicircolo sovramontato da numeri che rappresentano gli esponenti delle potenze.

Anche la variabile stessa (*il tanto*) è rappresentata col solito semicircolo e con l'esponente 1 : ⌊. Nel manoscritto adopera lo stesso simbolo, con l'esponente 0 per indicare quantità nota ⌀. Nel libro a stampa, per evidente difficoltà tipografica, il semicircolo è sostituito da una mezza parentesi tonda rovesciata ⌊.

Alle definizioni seguono immediatamente le regole del calcolo, che sono quelle da noi oggi usate per il prodotto, la potenza, la radice, il quoziente dei monomi algebrici ([1]).

La somma algebrica di più monomi genera enti più complicati: i *polinomi algebrici*,. Il BOMBELLI (senza naturalmente dare ad essi questo nome!) espone ordinatamente tutte le regole del calcolo dei polinomi algebrici, che egli, di regola, ordina secondo le potenze crescenti o decrescenti della variabile.

Notevoli sono le regole e gli esempi della *divisione di un polinomio ordinato per la somma o per la differenza della variabile e di quantità nota* ([2]) « e questo (dice) è un passo importantissimo per lo agguagliare di cubo, tanti e numero, come si vedrà, che assai volte non si possono agguagliare se non col *Più di meno*, senza questa regola ». E, sempre in vista della applicazione alla risoluzione delle equazioni, insegna ad aggiungere una quantità opportuna ad un trinomio di secondo grado, affinchè la somma risulti quadrato esatto di un binomio di primo grado.

A questo studio preliminare sui polinomi e sulle frazioni algebriche segue la teoria delle equazioni, o, come egli dice, *dello agguagliare*.

Incomincia dalle equazioni di primo grado di tipo più semplice, e sale gradatamente fino alle equazioni di quarto

---

([1]) Ecco, per il prodotto dei monomi: « quando si haverà a moltiplicare dignità, si sommaranno i numeri delle abbreviature posti di sopra [gli esponenti] e di quelli si formarà una abbreviatura di dignità; et il numero che sarà disparo a esse dignità [il coefficiente] si moltiplicarà semplicemente come si moltiplicano gli altri numeri »...

Moltiplichisi 3 $\underset{\smile}{1}$ via 10 $\underset{\smile}{1}$, farà 30 $\underset{\smile}{2}$ ... (pag. 205).

(Cioè: $3x \times 10x = 30x^2$)

([2]) Pagine 224-230.

grado complete, esaminando tutti i possibili casi, con discussione ordinata, precisa, esauriente.

Per ogni tipo di equazione dà la regola pratica di risoluzione, enunciata in tutte lettere, e la dimostrazione geometrica, all'uso della *algebra geometrica* degli antichi; perchè: « A benchè questa scientia sia Aritmetica (come la chiamano DIOFANTO Autore greco e li indiani) però non resta che il tutto non si possi provare per figure geometriche (come fa EUCLIDE nel secondo, sesto, decimo). Però, volendo che il lettore resti in tutto soddisfatto, mi sono risoluto porre tutte le dimostrationi dello agguagliare, cioè Capitolo per Capitolo, tanto in linea senza numero, quanto in linea composto di numero... » (1) (pag. 241).

Il BOMBELLI tuttavia non disconosce il valore di dimostrazioni puramente analitiche, che sviluppa in taluni casi, ed è questo un altro passo da lui compiuto per la Aritmetizzazione dell'algebra (2).

Troviamo per esempio, alla pagina 248, la dimostrazione della regola per la risoluzione delle equazioni di secondo grado fatta nei termini seguenti:

« Ma, volendosi procedere col trovare il lato e ridurre detto Capitolo a tanti uguali a numero, *e tal operare serve come se fusse la dimostratione*, faccisi in questa guisa:

« Agguaglisi

$$2 \overset{2}{\smile} \text{ p. } 12 \overset{1}{\smile} \text{ a } 32.$$

« Riduchisi a $1 \overset{1}{\smile}$ (come si è detto di sopra), si haverà

$$1 \overset{2}{\smile} \text{ p. } 6 \overset{1}{\smile} \text{ eguali a } 16.$$

---

(1) Con esemplificazione numerica.

(2) Il LIBRI nella sua Histoire des Sciences Math. en Italie, diceva dell'opera del BOMBELLI: *C'est la qu'on voit pour la première fois la rigueur de la synthèse appliquée aux démonstrations algébriques.* (Vol. III. pag. 184).

« Operisi come si mostrò di sopra, quando si disse di pigliare il lato di potenze e tanti, che, pigliato la metà delli tanti, che è 3, et aggiuntolo al lato della potenza, che è 1 ⊥, fa 1 ⊥ p. 3, che il suo quadrato è

1 ⌣ p. 6 ⊥ p. 9,

e noi volevamo 1 ⌣ p. 6 ⊥, però se si aggiongerà 9 ad ambe due le parti, si haverà

1 ⌣ p. 6 ⊥ p. 9 eguali a 25,

che, tolto il lato di 1 ⊥ p. 6 ⊥ p. 9, sarà 1 ⊥ p. 3, e questo è eguale al lato di 25, cioè a 5, che, levato il 3 da ciascuna delle parti, resterà 2 eguale a 1 ⊥, ed il tanto valerà 2 ».

Ed ecco anche un esempio di risoluzione di equazioni di secondo grado a radici complesse (pag. 262):

« Ma se si haverà ad agguagliare

1 ⌣ p. 20 a 8 ⊥,

che il quadrato della metà delli tanti è 16, qual è minore di 20, e questo agguagliamento non si può fare se non in questo modo sofistico:

« Cavisi 20 di 16 resta *m. 4* il suo lato è *p. di m. 2*, e questo si cava ed aggionge alla metà delli tanti, che sarà

4. p. di m. 2 ovvero 4. m. di m. 2.,

e ciascuna di queste quantità da sè, sarà la valuta del tanto ».

Come si vede, qui il BOMBELLI considera entrambe le radici complesse coniugate.

Osserverò ancora che, contrariamente alla opinione di alcuni storici, nell' *Algebra di Bombelli* non mancano esempi

di equazioni scritte al modo moderno, col porre eguale allo zero un polinomio ordinato secondo le potenze della incognita [1].

Dopo aver insegnato a risolvere le equazioni del quarto e del sesto grado, che, per contenere solo potenze pari (o con esponente multiplo di 3) della incognita, si riducono facilmente al secondo, il BOMBELLI ammonisce il lettore perchè « totalmente applichi l'animo » (pag. 280) dovendosi incominciare lo studio delle equazioni cubiche.

Risolve anzitutto il « Capitolo di *Cubo e Tanti eguale a Numero* » ($x^3 + px = q$); avvertendo che: « questa equatione si cava dal dire: *Trovami dui numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccino la terza parte delli tanti* $\left(uv = \frac{p}{3}\right)$ *e che il cubato dell'uno cavato del cubato dell'altro resti ... il numero* ($u^3 - v^3 = q$) ».

E ciò dimostra coll'osservare che, dalla posizione $x = u - v$ si ricava l'identità:

$$x^3 + 3uvx = u^3 - v^3;$$

e che la proposta

$$x^3 + px = q$$

si riduce alla scritta identità quando u, v siano tali da rendere

$$\begin{cases} 3uv = p, \\ u^3 - v^3 = q. \end{cases}$$

---

(1) Cfr. p. es. pag. 250: Agguaglisi

4 $\underset{\smile}{1}$ p. 8 m. R. q. [128. p. 8 $\underset{\smile}{2}$] à zero.

pag. 278:

1 $\underset{\smile}{6}$ m. 10 $\underset{\smile}{3}$. p. 16. Eguale à 0,

1 $\underset{\smile}{6}$ m. 40 $\underset{\smile}{3}$. p. 8. Eguale à zero.

Ma, seguendo l'uso dei tempi, egli dà a questa dimostrazione una forma geometrica, mostrando come un cubo materiale si scomponga nei due cubi e nei sei parallelepipedi rappresentati dalla nota formula ([1]) che dà il cubo del binomio.

Ed avendo visto l'analogia di questo problema con quello classico della *inserzione delle due medie proporzionali*, dà una costruzione geometrica, per via instromentale, della radice, che è una geniale imitazione di quella attribuita a PLATONE.

Questa costruzione, nel caso di equazioni cubiche aventi una sola radice reale, poteva ritenersi superflua, ma si presentava invece come necessaria nel caso irreducibile, poichè in tal caso quella scomposizione del cubo che serve alla dimostrazione non è materialmente possibile.... « però (dice il Bombelli) non parendo tale agguagliatione generale, son andato tanto investigando che ho trovato una dimostratione in superficie piana generalissima; ma perchè dove intervengono li corpi, le linee medie non si possono ritrovare se non per via d'instromento, però non paia ad alcuno strano se questa dimostratione haverà la medesima difficultà, che, quando non l'havesse, saria stata vana la inventione di PLATONE ed ARCHITA TARENTINO con altri valenthuomini, nel voler duplare l'altare overo cubo (come largamente ne ha parlato il BARBARO nel commento del suo Vitruvio). Però havendo

---

([1]) Nota *ab antiquo*: LEONARDO PISANO, nel *Liber Abbaci*, (pag. 378) le annuncia nel modo seguente: « *Cum itaque linea divisa in duas partes fuerit, erunt cubi ipsarum portionum cum triplo multiplicationis quadratis uniuscuisque sectionis in aliam, aequales cubo totius linee* ». Ed al tempo di Bombelli questa regola era già stata liberata da ogni rappresentazione geometrica, pel fatto che la si era estesa a potenze di grado superiore al terzo.

Il BOMBELLI dunque non avrebbe avuto bisogno di ricorrere alla rappresentazione geometrica per sviluppare la sua dimostrazione.

lo scudo di tanti valenthuomini, non mi affaticarò in volere sostentar tale dimostratione non si poter fare altramente che con l'instromento » (1).

Questa dimostrazione, (che non si trova nel manoscritto ma solo nell'opera a stampa) è veramente interessante per la storia dell'algebra, perchè ci offre una *dimostrazione generale di esistenza* per le radici reali dell'equazione cubica, che non esclude il caso irreducibile (2).

Già il CARDANO aveva osservato che la equazione cubica $x^3 = px + q$, nel caso irreducibile non si può risolvere con la formula generale di SCIPIONE DAL FERRO, ma che talvolta si può ridurre al secondo grado con l'aggiungere (o togliere) ai due membri un numero cubo a^3, tale che entrambi i membri della equazione risultino divisibili per la somma (o la differenza) $x + a$.

« Perchè il cubato del terzo delli tanti supera il quadrato della metà del numero, però bisogna tenere questa regola messa dal CARDANO, di aggiongere un numero cubo ad ambedue le parti, overo cavarlo, del quale pigliato il suo lato cubo, sia in tal proportione a uno, per regola, qual'è il numero alli tanti... (pag. 293) $\left(\text{cioè aggiungere o togliere un numero } a^3 \text{ tale che sia } a = \frac{a^3 + q}{p}\right)$ ».

---

(1) Pag. 297. — In queste dimostrazioni si vede costantemente usato dal BOMBELLI il *segmento unitario*, per la rappresentazione di aree e di volumi mediante segmenti e rettangoli.

Il commento del BARBARO fu pubblicato nel 1556. Il passo qui ricordato è alle pag. 206-207.

(2) Cfr. E. BORTOLOTTI: *La trisezione dell'angolo ed il caso irreducibile dell'equazione cubica nell'Algebra di Raffaele Bombelli.* (Rend. Acc. d. Bologna, a. 1923).

Il BOMBELLI osserva che il *numero* a, *da determinare in modo che tutta l'equazione risulti divisibile per* x — a, *deve essere radice della equazione proposta,* preannunziando così uno dei più importanti teoremi della teoria delle equazioni (pag. 302).

« ... Agguagliasi 1 ⌣ p. 2. a 3 ⌣, levisi il 2 da ogni parte, si haverà 1 ⌣ egual a. 3 ⌣ m. 2. Hora per la *regola del Cardano* di partire l'una e l'altra quantità per ⌣ più un numero, e per trovare qual debbia esser detto numero, prima si formarà questa domanda: Trovami un numero cubo, del quale cavato 2 cioè quel *m. 2* che è con li tanti, lo restante sia tanto quanto è il lato di detto numero cubo moltiplicato per 3, numero delli tanti » (1).

Ma poi, ed è qui veramente l'essenziale suo contributo a questa teoria, egli osserva che *anche nel caso irreducibile la formula di Scipion dal Ferro*

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

può dare il valor reale della radice, nonostante che essa sia complicata con gli immaginari (col più di meno) *ogni qualvolta si riesca a trovare il lato cubico delle espressioni che in essa compariscano, perchè allora si dovranno sommare numeri complessi coniugati, la cui somma è numero reale.*

« Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal capitolo in questa guisa. Agguaglisi 1·⌣ à 15 ⌣. p. 4, piglisi il terzo delli tanti che è 5, cubisi, fa 125, e questo si cavi

(1) Cioè il numero cercato deve esser radice della equazione $x^3 - 2 = 3x$. Questa è la *trasformata* a *radici contraria della proposta,* ed il BOMBELLI ha fatto tale trasformazione per evitare la radice negativa — 1 (quantità da aggiungere ai due membri delle $x^3 = 3x - 2$, perchè siano divisibili per $x - 1$).

del quadrato della metà del numero, che è 4, resta *m. 121* (il quale si chiamerà più di meno) che di questo pigliata la *R. q.* sarà *p. di m. 11*, che aggionta con la metà del numero, fa 2 p. di m. 11, che pigliatone il lato cubico ed aggionto col suo residuo, fa *2. p. di m. 1* et *2. m. di m. 1.* che gionti insieme fanno 4, e 4 è la valuta del Tanto (pag. 293).

[Poichè

$$\sqrt[3]{2+11i}=2+i,\quad \sqrt[3]{2-11i}=2-i,$$

si ha

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=4].$$

« Et benchè a molti parerà questa cosa stravagante, perchè di questa opinione fui ancho io già un tempo, parendomi più tosto sofistica che vera, nondimeno tanto cercai, che trovai la dimostratione, la quale sarà qui sotto notata, sì che questa ancora si può mostrare in linea, che pur nelle operationi serve senza difficultade alcuna, et assai volte si trova la natura del tanto per numero ».

« Però ben vi applichi l'animo il lettore; che anco egli si trovarà ingannato » (pagine 293, 294).

La dimostrazione che qui dà il BOMBELLI consiste nel provare che il problema della effettiva estrazione di radice dal binomio e dal reciso che compariscono nelle formule risolutive, coincide con quello della ricerca di una radice cubica razionale (nel campo euclideo) della equazione proposta.

Perciò il BOMBELLI giustamente conclude che la risoluzione algebrica della equazione cubica nel caso irreducibile si può fare, col metodo da lui proposto, e *serve a dare effettivamente, attraverso l'immaginario, le radici reali della equazione, tutte le volte che questa ammette una radice razionale nel campo euclideo, ma che, in ogni altro caso, è risolutamente impossibile nel campo reale* (senza il più di meno).

« Quanto al trovare una regola generale colla quale si possa agguagliare questo capitolo senza il p. di m. sino ad hora tengo impossibile; perchè si trova la regola quando il tanto val numero over un binomio (quando esiste una radice razionale od irrazionale quadratica della forma $a + \sqrt{b}$) ...e queste valute si trovano per le regole date. Ma già non si può trovare che il Tanto vaglia una radice quadrata, nè una R. c., nè un binomio che sia maggiore il numero che la Rq, nè un composto di numero e R. c., nè un composto di due R. quadrate, nè un composto di RR. q. più numero ([1]).

« Si che (quanto al mio giudizio) tengo impossibile ritrovarsi tal regola generale. E, non mi confidando delle ragioni assignate, quando detto capitolo ha havuto tal sproportione, che non si è potuto cavare il cubato del terzo delli tanti del quadrato della metà del numero (com'è 1 ⌣3 eguale a 9 ⌣1 p. 9), *qual agguagliamento mi serviva in dividere l'angolo in tre parti pari* (come a suo luogo si dirà) ho trovato più sorti di trasmutationi » (pag. 320, 321).

Il BOMBELLI dunque intendeva di sviluppare la *relazione fra il problema della trisezione dell'angolo e quello della risoluzione della equazione cubica nel caso irreduttibile*, in quella sua *Parte Geometrica*, che non ebbe tempo di ridurre alla perfezione che la eccellenza di quest'arte richiede, e che rimase inedita nel manoscritto B. 1559 della comunale di Bologna e che ora viene pubblicata. Vedremo che in

---

([1]) Queste esclusioni sono veramente troppe, e le fatiche di matematici che dopo il Bombelli si occuparono di questo argomento si rivolsero infatti allo scopo di togliere alcune di esse e ad estendere il campo delle equazioni cubiche che, nel caso irreducibile, possono risolversi algebricamente nel campo reale. — Notevoli in questo senso le ricerche del LEIBNIZ — Solo ai giorni nostri, e col sussidio della Teoria dei gruppi di sostituzione, il problema è stato completamente risoluto.

questo manoscritto si trova effettivamente risoluto il problema della trisezione dell'angolo, nella occasione della inscrizione dell'ennagono regolare nel cerchio. Quivi si dimostra infatti che tale problema conduce ad una equazione cubica nel caso irreducibile, e si osserva « che sino ad hora non vi è regola per agguagliarlo per non esser proportione fra di loro... » (1).

Le trasmutationi cui accenna il BOMBELLI nel passo sopra riportato, sono da lui esplicitamente dichiarate e ripetutamente applicate per la riduzione delle equazioni cubiche generali al tipo trinomio fondamentale.

E sono le trasformazioni lineari che tuttora si adoperano nella teoria delle equazioni algebriche. E cioè:

A *radici contrarie*, per trasformare una equazione avente radici negative in un'altra avente radici dello stesso valore assoluto ma positive.

A *radici moltiplicate ed a radici reciproche*, $\left(x = \frac{q}{y}\right)$ per trasformare le equazioni del tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ in altre del tipo $y^3 + pqy + q^2 = 0$, ove non compariscono termini quadratici.

A *radici aumentate* $\left(\text{della forma } x = y - \frac{a}{3}\right)$ per trasformare una equazione cubica completa in un'altra priva del termine quadratico (2).

---

(1) Carte 231 del manoscritto.

(2) Cfr. p. es. pag. 348, *Delle trasmutationi in diversi modi* — « ...Meglio è sempre ponere $\underline{l}$ meno il terzo delle potenze al contrario, cioè se le potenze sono con il cubo, ponere m,, se sono al contrario ponere p, et così trasmuteranno li Capitoli senza fastidio »..... in altri termini volendo far sparire il termine quadratico della equazione

$$x^3 + ax^2 + \ldots, \text{ conviene porre } x = y - \frac{a}{3}.$$

Giovandosi di queste trasmutazioni il BOMBELLI fa la discussione completa della equazione cubica, esaminando partitamente e minutamente tutti i casi possibili e per ogni caso sviluppando (col sussidio di molti esempi numerici) le formule di risoluzione ed esaminando la natura e la molteplicità delle radici ([1]).

La teoria delle equazioni del quarto grado, sviluppata in 59 pagine del libro, costituisce un notevole contributo personale del BOMBELLI.

La risoluzione delle equazioni biquadratiche era stata fatta dal FERRARI in un caso che può ora considerarsi come generale; ma allora era troppo nuova perchè il CARDANO avesse osato farne una teoria completa, ove ogni lacuna avrebbe potuto essere indizio di ignoranza.

Il BOMBELLI si accinse a quest'opera, per quei tempi formidabile, e sviluppò completamente quella teoria, risolvendo e discutendo separatamente con acume, ordine e sicurezza di metodo, tutti i 42 casi che si possono presentare ([2]).

Questa è la ragione per cui taluni storici danno il BOMBELLI come autore della risoluzione generale delle equazioni di quarto grado.

Libro terzo. — Giunto alla fine del secondo libro, e nell'atto di dar principio al Libro terzo, il BOMBELLI rinnova la promessa della pubblicazione della parte geometrica:

([1]) Da questa discussione sono escluse le equazioni $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con coefficienti tutti positivi (o nulli) perchè ad esse non possono convenire radici positive.

([2]) Cfr. E. BORTOLOTTI: *Sulla scoperta della risoluzione algebrica delle equazioni del quarto grado.* (« Periodico di Matematica », Serie IV. Vol. VI. N. 4, luglio 1926).

« ...farò fine di ragionare di queste agguagliationi e dignitàdi, ma verrò alle operationi di esse, le quali saranno quelle dimostrationi matematiche (o problemi che dir vogliamo) cotanto da' scrittori commendate: che sarà l'ultima parte di quest'opera, riserbandomi poi con più mio agio e comodità, di dare al mondo tutti questi problemi in dimostrationi geometriche » (pag. 411).

Il BOMBELLI ha sempre in vista la maggior possibile generalizzazione dei problemi che imprende a trattare, perciò egli d'ordinario non si contenta di risolvere per via analitica il problema aritmetico proposto, ma ne fa immediatamente la estensione a tutti i casi che da esso non differiscono se non per il valore delle quantità numericamente date, con la enunciazione in tutte lettere di una regola generale che prescinde da ogni valore numerico e tien luogo delle formule algebriche che si hanno nella nostra algebra letterale.

Poi suppone proposto il medesimo problema, con la condizione che nei dati figuri la indeterminata (il tanto), e sviluppa la soluzione con formule che esprimono la incognita in funzione della indeterminata preventivamente introdotta nei coefficienti.

Ed ecco un gran passo, che nessun algebrista aveva ancor fatto (che si trova anche nel manoscritto, redatto anteriormente alla traduzione di DIOFANTO) e che di tanto accosta il BOMBELLI al VIETA, che fu considerato come creatore dell'algebra letterale moderna.

Ma, per meglio intendere il procedimento del BOMBELLI recherò ad esempio la classica questione che egli risolve al Problema quarantanovesimo (pag. 447).

« Faccisi di 10 due parti tali, che moltiplicate l'una via l'altra, faccino 16 ».

Dopo di aver risoluto algebricamente questa questione aritmetica, il BOMBELLI enuncia la Regola:

« Se si haverà a dividere una quantità in due parti, che

moltiplicata l'una via l'altra faccino un terminato numero, piglisi il mezzo della quantità, che si deve dividere, e quadrisi, e del prodotto se ne cavi il terminato numero, e del restante se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà di detta quantità, che la somma sarà una delle parti addomandate ».

Si pone poi il Quesito: « Faccisi di 12. p. 1 ⊥ due parti tali, che moltiplicata l'una via l'altra faccino 20 ».

E trova come soluzione la formula

$$\text{Rq.}[16.\ \text{p. } 6 \perp \text{p. } \tfrac{1}{4} \overset{2}{\perp}].\ \text{p. } 6.\ \text{p. } \tfrac{1}{2} \perp .$$

Egli dunque si è proposto l'equazione

$$y^2 = (12 + x)\, y - 20 = 0$$

e l'ha risoluta con la formula

$$y = \sqrt{16 + 6x + \frac{x^2}{4}} + 6 + \frac{x}{2}.$$

Questo problema si trova anche nel manoscritto che il BOMBELLI scriveva intorno al 1550, risoluto nella identica forma e completato con la interpretazione geometrica: « Voglio dividere la linea *.a.b.* in due tal parti, delle quali fattone un parallelogramma sia pari alla superficie *.l.i.k.* » (1).

---

(1) Quello delle *migliaia di problemi riuniti in un unico enunciato e risoluti con una sola formula... per merito dell'algebra letterale*, è un abusato luogo comune. Si ottiene lo stesso risultato anche con la semplice esibizione di un esempio numerico opportunatamente scelto. Ed il BOMBELLI giustamente osservava, nella introduzione al terzo libro: « Et dico che con questo solo esempio per Capitolo, sebbene l'operante non intendesse li fondamenti, nè ove nascano le lor regole, solo con gli esempi che ho dati potrà uguagliarli tutti, potendosi ».

Il terzo Libro dell'Algebra costituisce un' interessantissima raccolta di problemi dei primi quattro gradi, che il BOMBELLI risolve dando prova di vera virtuosità, con la eleganza dei procedimenti analitici, con la semplicità della interpretazione geometrica, con l' arte con cui sa evitare, anche nei più intricati problemi del terzo e del quarto grado, i procedimenti analitici che danno luogo a costruzioni spaziali, nella interpretazione geometrica.

Di essi ci occuperemo appunto nell' esame dei problemi geometrici che il BOMBELLI ha risoluto nel suo *Libro quarto*, che sarà ora pubblicato.

Mi basti ora il ricordare che fra tali problemi e la maggior parte di quelli del quinto libro sono compresi tutti quelli dei primi quattro libri del DIOFANTO, problemi che il BOMBELLI per primo ha fatto conoscere in occidente, dando così il primo impulso alla rinascita fra noi della *Teoria dei numeri.*

L'ALGEBRA

PARTE MAGGIORE DELL'ARITMETICA

DI RAFAEL BOMBELLI

LIBRO TERZO

[INTRODUZIONE]

Essendo stata la mia intentione di voler mettere insieme tutta la operatione d'Alzebra; acciò che con quest'opera sola, chi vorrà imparare tal scientia, gl'habbia a bastare, però mi è parso di bisogno fare questo terzo libro di dimande (2), per dimostrare, come si hanno a fare le positioni. C. 115 (1).

Et perchè cominciarò tanto basso, che a gl'intendenti pareranno dimande di pochissimo valore, così ho giudicato necessario per un principiante: et perchè ancora giovaranno le dimande basse per saper fare poi le ardue: de le quali ve ne sono molte, che pare che habbiano due positioni (3) siche tutto non sarà senza bisogno et misterio a più intelligentia dell'arte.

Et non voglio in questo terzo libro mancare di quello, che forse a qualcheduno parerà ch'io sia mancato nel libro passato. A li principianti parerà forse ch'io sia stato troppo breve, et massime ne gl'ultimi quarantadue Capitoli (4). Et a li intendenti troppo lungo. Quanti a li primi dico che tai Capitoli sono difficilissimi et se un principiante non sarà caminato innanzi senza perdere niente di detto libro, et massima di quei Capitoli di Cubi, Censi, Cose, et numero, non

(1) I numeri segnati a margine indicano le corrispondenti carte del mns.

(2) di problemi.

(3) due soluzioni,

(4) Si tratta dei 42 casi che presenta la discussione delle equazioni biquadratiche.

potrà intendere li sudetti Capitoli. Però ho messo uno essempio per ciascuno: ove forse parerà, ch'io sia stato troppo breve. Quanto a questo dico che sono tali li capi di detti Capitoli, che s'io havessi voluto a uno per uno mettere tutte le sue attioni, come altre volte ho detto; non mi sarebbe bastato per essi soli quanto sarà tutta l'opera. Et dico che con questo solo essempio per Capitolo se bene l'operante non intendesse li fondamenti ne ove nascano le lor regole, solo con gl' essempi che ho dati potrà agguagliarli tutti, *potendosi.*

Et ove dico cavasi il tale del tale, et che sia maggiore quello che si ha da cavare: però non resta, che la regola non sia buona: perchè quello che resterà sarà meno ([1]).

Sichè non mancando di niente circa a le regole date si haverà tanta la satisfatione, quanto s'io havessi posto tutti gli
C. 115 v. essempii di ciascun capitolo da se.

Et per questo rispetto, quanto a li principianti sono stato breve; et quanto a gl' intendenti sono stato lungo; però nel presente libro niuno tenga a vile le dimande debili, che farò nel principio di detto libro, che tutto è fatto, come ho di sopra detto, per bisogno di chi vorrà dar principio ad imparare detta scientia et Arte.

La positione è sempre ponere, che la valuta della cosa addimandata sia una quantità: la quale da gli inventori di quest'arte è stata chiamata *cosa*: benchè quanto al mio giudizio, meglio se le confaceva dire *quantità.* Et essendo stata inventione arabica potrebbe essere, che in quella lingua essa cosa significhi quantità: benchè non lo affermo: perchè tanto è a dire una quantità, quanto una cosa di numero. Et il quadrato di detta quantità è stato chiamato *Censo*; che manco

---

([1]) Qui ammette esplicitamente che le *soluzioni negative non costituiscono eccezione.*

non sò dove sia derivato tal nome, et meglio quanto a me era dire *quadrato di quantità*. Il *Cubo* ritiene il vero nome: perchè il Cubo è un corpo simile a un dato, che ha lunghezza, larghezza, et altezza, et tutte pari. Così il Cubo in Algebra è la moltiplicatione della cosa triplicata, che viene ad essere il medesimo. Nondimeno ho seguitato et seguiterò l'ordine de gl'altri, perchè questo non è di sustanza niuna (1).

Et verrò a le dimande col modo de le loro positioni. Et notasi, che tutte le dimande, che vengono ne lo agguagliare a Cose eguali a numero, tali dimande si possono solvere ancora per la regola de la proportione chiamata dal volgo del tre, o vero per il Cataino; et chi non è intendente di detta regola del tre, et della pratica de rotti: malamente potrà intendere il presente operare: perchè è necessario havere li primi principii per intendere quest'arte: onde verrò a gl'essempii; et prima tratterò de le dimande che si solvono col primo Capitolo di Cose eguale a numero, et di mano in mano, secondo l'ordine de Capitoli del libro passato, formerò, et solverò le dimande del presente libro.

---

(1) Nel testo a stampa (dopo aver letto DIOFANTO) il BOMBELLI sostituisce le voci di *cosa* e *censo*, con quelle diofantee, di *tanto* e *potenza*.

L'ALGEBRA

PARTE MAGGIORE DELL'ARITMETICA

DI RAFAEL BOMBELLI

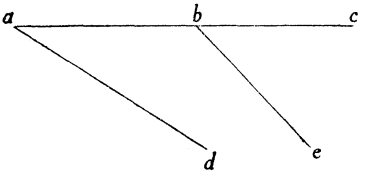
LIBRO QUARTO

[Cap. I.]

[ALGEBRA LINEARIA]

L' *aggiungere di linee insieme* sempre si ha da intendere, C. *163.*
che si aggiungano in lunghezza, et tutte due facciano solamente una linea retta, et quando si dirà *linea* si intenderà nel presente libro *linea retta*, non dicendo altro.

Quando si dirà *dal punto tale tirasi la linea tale*, et che non dica altro, se 'l punto sarà nella estremità di una linea o in una linea, si harà da intendere, che tal linea, che si ha da tirare in che parte si voglia, eccetto che a diritura della linea, che tocchi il punto, come per essempio.



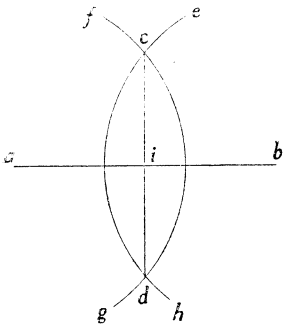
Sia la linea . *a* . *b* ., et, che si dica dal punto . *a* . tirasi la . *a* . *d* . sempre si intenderà, che si tiri dove si voglia pure, che tocchi il punto . *a* ., et che la . *a* . *c* ., et la . *a* . *d* . dove si toccano nel punto . *a* . facciano angolo, et il medesimo se ne la linea . *a* . *c* . fusse il punto . *b* ., et che si havesse a tirare la . *b* . *e* . si ha da intendere nel medesimo modo.

Quando si dirà *superficie*, et non dicendo altro si ha da

intendere *rettilinea*, cioè che tutte le linee, che la circondano siano rette (1).

§ [1]. Dividere una linea in due parti pari (2).

Sia la linea . *a* . *b* ., la quale si habbia ha dividere in due parti pari : facciasi, che 'l compasso sia aperto più, che non è il mezzo della detta linea, et mettendo il piede immobile del compasso nella estremità . *a* ., et facciasi la parte di circulo . *g* . *f* .: poi mettasi il piede imobile del compasso nel punto . *b* ., et facciasi la parte del circulo . *e* . *h* ., le quali due parti di circolo si taglieranno . *c* ., et . *d* ., et dalla intersicatione . *c* ., et . *d* . si tirarà la linea retta . *c* . *d* ., che taglierà la . *a* . *b* . in due parti pari in punto . *i* .; et questa è *la X del primo de gli elementi* (3) benchè la sua dimostratione, dice che si faccia sopra la . *a* . *b* . un triangolo equilatero, ma questa dimostratione in sustantia è la medesima.



---

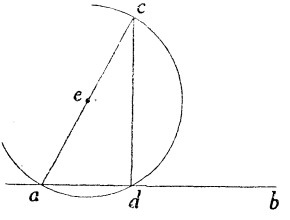
(1) *Superficie,* sta per figura superficiale, e più precisamente per *figura piana rettilinea*; limitata, chiusa, circondata da segmenti rettilinei.

(2) *Pari* — sta per *uguali;* locuzione dialettale costantemente usata dal BOMBELLI,

(3) Si intenda del 1° Libro degli Elementi di EUCLIDE.

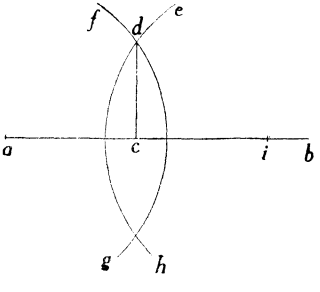
§ [2]. Da un punto segnato in una linea tirare una perpendiculare.

Sia la linea . *a* . *b* ., et sia il punto . *c* . dal quale si voglia tirare una perpendicolare sopra la . *a* . *b* . Tirasi la . *a* . *c* . sopra la quale si faccia il semicirculo . *c* . *d* . *a* ., che taglierà la . *a* . *b* . in punto . *d* ., et dal punto . *c* . si tiri la . *c* . *d* ., la quale sarà la perpendiculare addimandata; et questa si prova per la XXXI *del terzo degl' elementi* perchè l' angolo . *c* . *d* . *a* . è retto. *C. 163 v.*



§ [3]. Da un dato punto in una retta tirare una linea che gli sia perpendiculare.

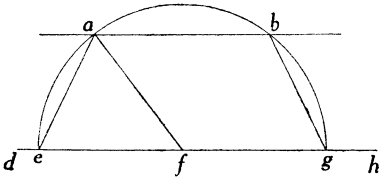
Sia la linea . *a* , *b* ., et dal punto . *c* . si habbia a tirare una perpendiculare. Facciasi la . *c* . *i* . pari a la . *a* . *c* ., et tenendo il piede del compasso fermo nel punto . *i* . si faccia la parte del circulo . *e* . *h* ., et tenendo il piede del compasso nel punto . *a* . si faccia la parte del circulo . *f* . *g* ., come fu mostro nel dividere una linea in due parti pari, le quale parti di circulo si taglieranno in punto . *d* ., et dal punto . *c* . si tiri la . *c* . *d* ., che sarà la perpendiculare addimandata; et



questa è *la* XII *del primo degl' elementi,* et in sustantia è la medesima dimostratione.

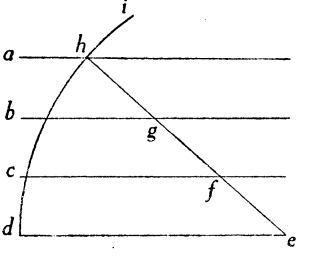
§ [4]. Da un dato punto signato fuori d'una linea tirare una retta, che gli sia parallela.

Sia il punto . *a* ., et la linea . *d* . *h* ., dal quale punto si habbia a tirare una retta, che gli sia parallela. Tirasi la . *a* . *f* . come si voglia, che tocchi la linea . *d* . *h* .: poi facciasi il semicirculo . *e* . *a* . *g* ., facendo . *f* . centro, et dal punto . *e* . tirasi la . *e* . *a* ., et dal punto . *g* . si tiri la . *g* . *b* . pari a la . *e* . *a* . et dal punto . *a* . al punto . b . si tiri la . *a* . *b* ., la quale sarà parallela a la . *d* . *h* ., perchè il triangolo . *e* . *a* . *f* . è pari al triangolo . *f* . *b* . *g* ., che essendo pari de lati saranno ancora pari d'altezza: et questa è *la* XXXI *del primo.*



C. *164.* **§ [5]. Dividere una linea in tre parti pari.**

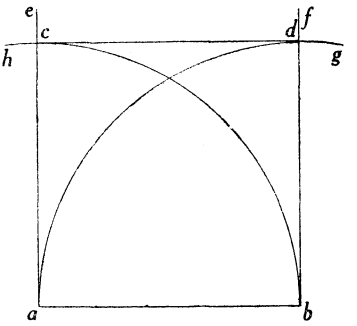
Sia la linea . *d* . *e* ., la quale si habbia a dividere in tre parti pari. Tiransi le tre rette *a*, *b*, c, tutte parallele a la . *d* . *e* ., egualmente distante, ma che siano distante manco della terza parte della . *d* . *e* ., et dal punto . *e* . si tiri la . *e* . *h* . pari a la . *e* . *d* .,



la quale si trovarà in questo modo: aprasi il compasso quanto è la . *e* . *d* ., et nel punto . *e* . si mette il piede imobile del compasso, et facciasi la parte del circulo . *d* . *i* ., che taglierà la . *a* . in punto . *h* ., et dal punto . *h* . tirasi la . *h* . *e* . come fu detto, la quale taglierà la *b* in *g* et la . *c* . in . *f* ., le tre parti addimandate saranno . *e* . *f* ., et . *f* . *g* ., et . *g* . *h* ., che tutte saranno pari fra di loro.

Et volendo dividere detta . *d* . *e* . in cinque parti o più si tiraranno tante linee, quanto sone le parti, et una più, che si hanno da fare, tutte parallele, et egualmente distante fra di loro in tal modo, che quella, che è più lontano non sia distante a la . *d* . *e* . più della lungheza di detta . *d* . *e* . .

§ [6]. Fare un quadrato sopra una data linea.



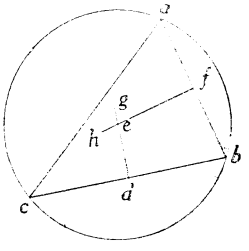
Sia la linea . *a* . *b* . sopra la quale si habbia a fare un quadrato. Tiransi dal punto . *a* ., et . *b* . le due perpendiculare . *a* . *e* ., et . *b* . *f* .: poi facciasi le parti de circuli . *b* . *h* ., et . *g* . *a* ., che . *a* . sia centro del' uno, et . *b* . centro del' altro, et . *b* . *h* . taglierà la . *a* . *e* . in punto . *c* ., et . *a* . *g* . taglierà la . *f* . *b* . in punto . *d* ., et dal punto . *c* . al punto . *d* . si tiri la . *c* . *d* ., che ciuderà il quadrato addimandato, cioe . *a* . *b* . *d* . *c* .

§ [7]. Dato tre punti fare un circulo che li tocchi.

Siano li tre punti . *a* . *b* . *c* . et si voglia fare un circulo che la circunferentia li tocchi tutti tre. Tiransi le tre

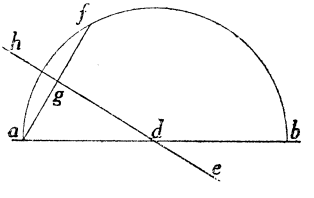
linee . *a* . *c* . , . *c* . *b* . , et . *b* . *a* . , et dividasi la . *c* . *b* . in due parti pari in punto . *d* . et la . *a* . *b* . in punto . *f* ., et tirasi dal punto . *d* . la perpendiculare . *d* . *g* ., et dal punto . *f* . la perpendiculare . *f* . *h* . le quale si taglieranno in punto . *e* ., et . *e* . sarà il centro del circulo addimandato; che tirato la . *e* . *b* ., et fattola semidiametro del circulo, si farà il circulo . *b* . *a* . *c* .; et questa è *la* V *del quarto degl' elementi.*

C. *164 v.*

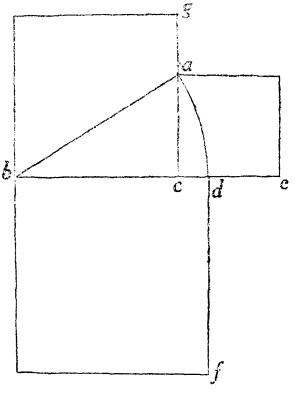


§ [8]. Fare un semicirculo, che tocchi una de l'estremità d'una linea, et un punto fuor d'essa.

Sia la linea . *a* . *b* ., et il punto segnato fuor di essa . *f* . sopra la quale si habbia a fare un semicirculo, che tocchi la estremità . *a* ., et il punto . *f* . Tirasi la linea . *a* . *f* ., la quale si divida in due parti pari in punto . *g* ., et tirasi la . *h* . *e* ., che passi per il punto . *g* . come si è mostrato nel tagliare la linea in due parti pari, la quale taglierà la . *a* . *b* . in punto . *d* ., et mettasi il piede del compasso nel punto . *d* ., che sia aperto sino nel punto . *a* ., et facciasi il semicirculo . *a* . *f* . *b* . il quale sarà il semicirculo addimandato: Et notasi, che se 'l punto . *f* . sarà a dritura della . *a* . *b* . si tratterà del imposibile, et se la . *a* . *b* . non fusse lunga quanto la . *a* . *c* . diametro del semicirculo si allungherà tanto detta . *a* . *b* ., che sia pari a la . *a* . *c* . perchè in quello, che si ha da prevalersi di questa dimostratione non importerà.



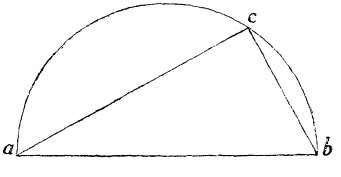
§ [9]. Fare di due quadrati uno solo.



Siano li due quadrati . *b* . *c* . *g* ., et . *a* . *c* . *e* . : de li quali se ne voglia fare uno che gli sia pari in superficie ; se saranno congiunti come dimostra la figura, si tirerà la linea . *b* . *a* ; della quale se ne formerà il quadrato . *b* . *d* . *f* . facendo la linea . *b* . *d* . pari a la . *b* . *a* .. Dico detto quadrato . *b* . *d* . *f* . essere pari a li detti due quadrati . *b* . *c* . *g* ., et . *a* . *c* . *e* . : come per la XXXXVII (¹). Et se detti due quadrati fossero disgiunti si segnerà la . *c* . *a* . pari a la . *c* . *e* ., et farassi nel medesimo modo.

§ [10]. Cavare un quadrato d'un altro quadrato, et del resto farne un quadrato. *C. 165.*

Sia un quadrato fatto sopra la linea . *a* . *b* ., del quale se ne habbia a cavare un quadrato fatto sopra la linea . *a* . *d* . ; et si voglia la linea del quadrato, che sia pari al restante. Facciasi sopra la . *a* . *b* . il semicirculo . *a* . *c* . *b* ., et tirasi la . *c* . *b* . pari a la . *a* . *d* ., et dal punto . *c* . si tiri la . *c* . *a* ., la quale sarà la linea del quadrato addimandato, perchè tanto

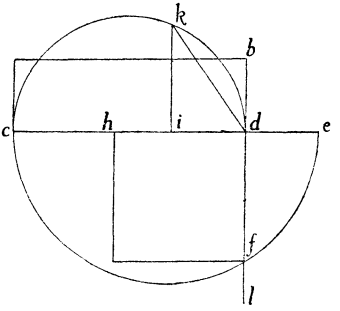


(⁰) La XXXXVII del 1° Libro degli Elementi di EUCLIDE.

può la . *a* . *b* . in se, quanto la . *a* . *c* . , et la . *c* . *b* . ciascuna di loro in se, et aggiunte insieme. Come per essempio se la . *a* . *b* . fusse 10, et la . *c* . *b* . 6, la . *c* . *a* . sarà 8 perchè il quadrato della . *a* . *c* . è 64, et il quadrato della . *c* . *b* . è 36, che aggiunte insieme fanno 100; si che havendo noto la . *a* . *b* ., et la . *c* . *b* . si caverà il quadrato della . *c* . *b* . , che è 36 del quadrato . *a* . *b* . , che è 100, resta 64, che 'l suo creatore (1) è 8, et tanto è la . *a* . *c* .

§ [11]. Fare d' un parallelogrammo (2) un quadrato.

Sia il parallelogrammo . *c* . *d* . *b* , et che si habbia a fare un quadrato che gli sia pari in superficie: Allungasi la . *c* . *d* . sino in . *e* . facendo la . *d* . *e* . pari a la . *d* . *b* ., et allungasi la . *b* . *d* . sino in . *l* ., et sopra la . *c* . *e* . si faccia il semicirculo . *c* . *f* . *e* . , che taglierà la . *d* . *l* . in punto . *f* ., et la . *d* . *f* . sarà il lato del quadrato addimandato, che fatto sopra essa il quadrato . *f* . *d* . *h* . detto quadrato sarà pari al parallelogrammo . *c* . *d* . *b* . come fu addimandato perchè tanto può la . *c* . *d* . in la . *d* . *e* . , che è pari a la . *d* . *b* . quanto la . *d* . *f* . in sè.



Et ecci un'altro modo di trovare detta . *d* . *f* . , et è que-

---

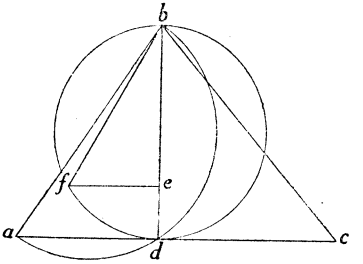
(1) Creatore o Lato di un numero è, secondo il BOMBELLI, la radice di esso numero.

(2) *Parallelogrammo* per *rettangolo;* più oltre (§ 14) il B. avverte esplicitamente che: « quando si dirà parallelogrammo, non dicendo altro, saranno rettangoli ».

sto. Facciasi la . *d* . *i* . pari a la . *d* . *b* . , et sopra la . *c* . *d* . si faccia il semicirculo . *c* . *k* . *b* . , et dal punto . *i* . si tiri la perpendiculare . *i* . *k* . sino alla circunferentia . *k* . et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *d* ., la quale sarà la linea del quadrato addimandato, perchè tanto può la . *d* . *i* . in la . *d* . *c* . quanto la . *d* . *k* . in se; et questa è la [XLVII del 1° degli Elementi].

§ [12]. Fare un quadrato, che sia pari ad un triangolo dato. *C. 165 v.*

Sia il triangolo . *a* . *b* . *c* . , et che si voglia fare un quadrato, che gli sia pari in superficie. Facciasi sopra la . *a* . *b* . il semicirculo . *a* . *d* . *b*. , che taglierà la . *a* . *c* . in punto . *d* ., et la . *b* . *d* . sarà la perpendiculare del triangolo, et sopra la . *b* . *d* . facciasi il circulo . *b* . *f* . *d* ., et facciasi la . *b* . *e* . pari al mezzo della . *a* . *c* ., et dal punto . *e* . si tiri la . *e* . *f* . ad angolo retto sino a la circunferentia del circulo, et dal punto . *f* . si tiri la . *f* . *b* . ; dico la detta . *f* . *b* . essere il lato del quadrato addimandato perchè se si moltiplicarà il mezzo della . *a* . *c* . via la . *b* . *d* ., il produtto sarà la superficie del triangolo . *a* . *b* . *c* . ; et il medesimo effetto farà la . *b* . *d* . via la . *b* . *e* ., mezzo della . *a* . *c* ., quanto la . *b* . *f* . in se per la propositione detta nella passata.

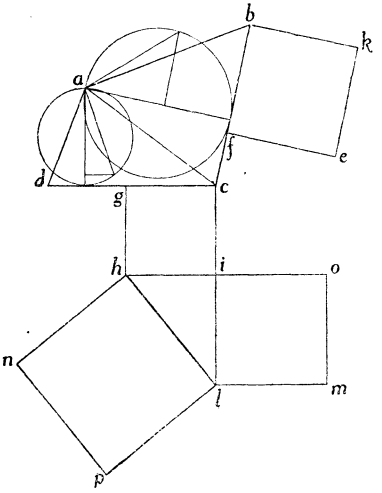


§ [13]. Fare un quadrato pari a una superficie data.

Sia la superficie data . *a* . *b* . *c* . *d* . della quale se ne voglia fare un quadrato. Et perchè ogni figura rettilinea si può

redurre in tanti triangoli meno due quanto sono le faccie: Come se un quattro faccie si volesse ridurre in triangoli cavasene due faccie per regola, resta due, et in tanti triangoli si può dividere un quattro angoli, et un cinque faccie si può dividere in tre triangoli, cioè due manchi delle faccie. Sia il quattro faccie proposto . *a* . *b* . *c* . *d* . il quale si dividerà in due triangoli tirando la linea . *a* . *c* ., li quali saranno . *a* . *d* . *c* ., et . *a* . *b* . *c* . li quali si ridurranno ciascuno di loro da se in un quadrato, come ho mostrato per la precedente et il quadrato . *b* . *f* . *e* . *k* . è pari al triangolo . *a* . *b* . *c* ., et il quadrato . *g* . *h* . *i* . *c* . è pari al triangolo . *a* . *d* . *c* . Hora aggiungendosi il quadrato . *b* . *k* . *e* . *f* . con il quadrato . *c* . *g* . *h* . *i* ., et facendone uno solo tale quadrato sarà eguale a la superficie data.

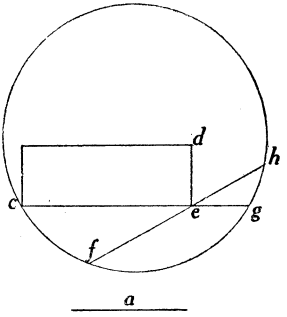
C. 166.



Et benchè io abbia dato il modo come si aggiungano detti quadrati, non voglio restare di replicarlo perchè non mostrai se non le linee. Allungasi la . *c* . *i* . sino in . *l* . faccendo che la . *i* . *l* . sia pari a la . *b* . *f* . sopra la quale facciasi il quadrato . *i* . *l* . *m* . *o* ., che sarà pari al quadrato . *b* . *f* . *e* . *k* ., et da l'angolo . *h* . a l'angolo . *l* . si tiri la . *h* . *l* . sopra la quale si faccia il quadrato . *h* . *l* . *p* . *n* ., et questo è il quadrato, che sarà pari a la superficie . *a* . *b* . *c* . *d* : et se bene tale demostratione pare diferente nel aggiungere di due quadrati da la dimostratione passata, ma in effetto è tutt' una, et è cavata da *la XLVII del primo degl' elementi.*

§ [14]. Fare sopra una data linea un parallelogrammo pari a un parallelogrammo dato.

Sia il parallelogrammo . *c* . *e* . *d* ., et che si habbia a farne un'altro, che gli sia pari, sopra la linea . *a* . : allungasi la . *c* . *e* . sino in . *g* ., facendo la . *e* . *g* . pari a la . *e* . *d* ., et dal punto . *e* . si tiri la . *e* . *f* . come si voglia pure, che facci angolo et sia pari a la . *a* . : poi facciasi il circulo . *c* . *h* . *f* . *g* ., che tocchi li tre punti . *c* . *g* . *f* ., et allungasi la . *e* . *f* . sino a la circunferentia . *h* . ; dico la . *e* . *h* . essere la linea, che fatto di essa, et della linea . *a* . un parallelogrammo sarà pari al parallelogrammo . *b* . *c* . *e* . *d* . : perchè tanto può la . *c* . *e* . in la . *e* . *g* ., che è pari a la . *e* . *d* . quanto la . *f* . *e* . in la . *e* . *h* . ; et questo si prova per *la* XXXV *del terzo de gl' elementi*. Et notasi, che quando si dirà parallelogrammo non dicendo altro saranno rettangoli.



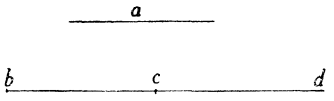
§ [15]. Sommare de linee.

Il sommare di linee non è altro che aggiungerle insieme in lunghezza, come si è mostrato in principio di questo però non metterò altra figura.

§ [16]. Sotrare di linee.

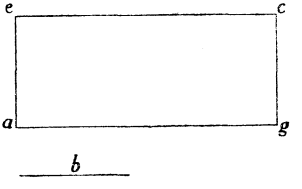
Il sotrare di linee non è altro, che tagliare della maggiore una parte pari a la minore, quando la minore si ha da cavare *C. 166 v.*

della maggiore, et quello che resta fuora del taglio sarà il restante; *ma se si harà* (1) *a cavare la maggiore della minore si farà il medesimo et quello, che resta sarà meno* (2): come per esempio sia la linea . *b* . *d* . della quale se n'habbia a cavare la . *a* . facciasi la . *b* . *c* . pari a la . *a* . , la . *c* . *d* . sarà il restante, ma se si harà a cavare la . *b* . *d* . della . *a* . , la . *c* . *d* . sarà il restante, *ma sarà meno.*



§ [17]. Moltiplicare di linee.

Il moltiplicare di linee non è altro, che fare di esse un parallelogrammo, come per essempio, che si habbia a moltiplicare la . *a* . *g* . nella . *b* . Tirasi dal punto . *a* . , et dal punto . *g* . le due perpendiculare . *g* . *c* . et . *a* . *e* . , che ciascuna di loro sia pari a la . *b* ., et dalli due punti . *e* ., et . *c* . si tiri la . *e* . *c* . ; il parallelogrammo . *e* . *a* . *g* . *c* . è il produtto della linea . *a* . *g* . in la . *b* . Et notasi, che quando si dirà moltiplicare una linea in se stessa, si haverà da fare un quadrato sopra detta linea, et tal quadrato sarà il produtto.



§ [18]. Partire di linee.

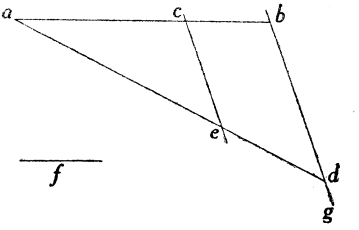
Il partire di linee non si può fare se non è dato *una comune misura* (3); come sarebbe se si havesse a partire la

(1) *harà* — del dialetto bolognese — per *avrà*.

(2) È da notare in questo punto la considerazione di *segmenti negativi*.

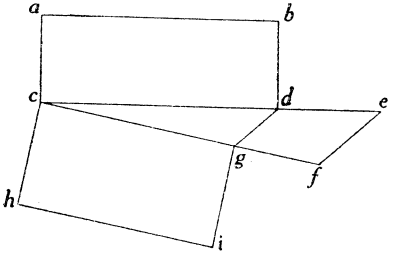
(3) La introduzione del *segmento unitario* è fatta in questo punto dal BOMBELLI.

linea . *a* . *e* . per la . *a* . *c* . , et non dicendo altro non si possono partire, ma se si darà la . *f* . per comune misura, prima facciasi, che le due linee che si hanno da partire fra di loro si toccano insieme ne l'una delle estremità in modo, che facciano angolo, come si vede de le due preposte, et a la . *a* . *c* . , che è partitore se gli aggiunga la . *c* . *b* . pari a la . *f* . , et dal punto . *c* . al punto . *e* . si tiri la . *c* . *e* . , et dal punto . *b* . si tiri la . *b* . *g* . parallela a la . *c* . *e* . : poi allungasi la . *a* . *e* . sino che tocchi la . *b* . *g* . , che sarà in punto . *d* . , et la . *e* . *d* . sarà l'avvenimento (1) perchè tanto può la *a* . *c* . in la . *e* . *d* . , quanto la . *a* . *e* . in la . *c* . *b* . perchè sono quattro linee proportionali. Et questa è *la XII del sesto degl' elementi.*



C. 167.

Della quale dimostratione se ne cava la dimostratione di *fare un parallelogrammo sopra una data linea, che sia pari a un parallelogrammo dato.* Sia la linea . *c* . *g* . sopra la quale si habbia a fare un parallelogrammo pari al parallelogrammo . *a* . *b* . *d* . *c* . Allungasi la . *c* . *g* . sino in . *f* . , et sia . *g* . *f* . pari a la . *a* . *c* . : poi tirasi la . *d* . *g* . , et dal punto . *f* . si tiri la . *f* . *e* . parallela a la . *g* . *d* . , et allungasi la . *c* . *d* . sino in . *e* . ; la . *d* . *e* . sarà la linea per fare l'addimandato parallelogrammo che, tirato le due perpendiculare . *g* . *i* . ,

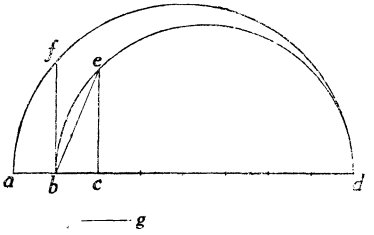


(1) *Avvenimento* — per *la cosa richiesta* — si usa anche (da gli autori di quel secolo) per: *il risultato di una effettuata operazione.*

et . *c* . *h* ., ciascuna di loro pari a la . *d* . *e* ., et dal punto . *h* . al punto . *i* . si tiri la . *h* . *i* ., il parallelogrammo . *c* . *h* . *i* . *g* . sarà il parallelogrammo addimandato perchè tanto può la . *c* . *g* . in la . *g* . *i* . che è pari a la . *d* . *e* . quanto la . *c* . *d* . in la . *g* . *f* ., che è pari a la . *d* . *b* .

§ [19]. A TROVARE IL CREATORE (1) IN LINEE.

Perchè nel Libro [I°] si mostrò il modo di trovare il creatore d'un numero quadrato, et per aprosimatione di un numero non quadrato, mi è parso necessario ancora di mostrarlo in linee e havendosi a trattare dell' *Algebra linearia:* il *quale creatore non patisce le difficultà, che pate nel numero; perché sempre si troverà il creatore d'ogni preposta linea, essendo noto la comune misura.* Come per essempio sia la linea . *b* . *d* . la quale sia 7 cioè sette volte la linea . *g* ., et che di detta linea se ne voglia il creatore. Ci sono più modi, ma solo metterò due, parendomi che bastino.



C. 167 v. Allungasi la . *d* . *b* . sino in . *a* ., et sia la . *a* . *b* . pari a la . *g* ., et sopra la . *a* . *d* . si faccia il semicirculo . *a* . *f* . *d* ., et dal punto . *b* . si tiri ad angolo retto la . *b* . *f* . sino che tocchi la circunferentia in . *f* ., la . *b* . *f* . sarà il creatore della . *b* . *d* . cioè di 7.

L'altro modo si è questo: facciasi sopra la . *b* . *d* ., della quale se n'ha da pigliare il creatore, il semicirculo . *b* . *e* . *d* : poi facciasi la . *b* . *c* . pari a la . *g* ., et dal punto . *c* . si tiri

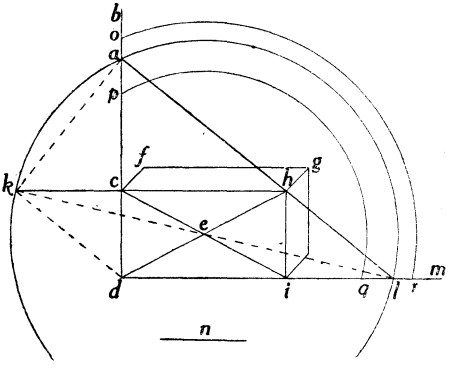
(1) *Creatore,* come già si è avvertito, sta per *radice,* o *lato.*

ad angolo retto, fino a la circunferentia, dal punto . c . la . c . e . , et dal punto . b . si tiri la . b . e . la quale sarà il creatore della . b . d . .

Et notasi, che il trovare il creatore d'una linea non è altro, che *trovare la linea del quadrato, che sia pari a un parallelogrammo dato* o vero, *essendo dato più quadrati, che siano de lati pari, trovare un quadrato, che gli sia pari,* et il lato di quello sarà il creatore de li quadrati dati; Come per essempio la linea . b . d . , che è divisa in sette parti da la linea . b . g . , se sopra detta linea saranno fatti sette quadrati, che habbiano i lati pari a una di dette parti, la . b . f . sarà il lato de un quadrato, che sarà pari a detti sette.

§ [20]. Dimostratione del creatore cubico in linee.

Il trovare il creatore cubico d'una linea essendo data una misura nota non è altro che volere *trovare il lato d'un*



cubo, che sia pari a un parallelepipedo dato, che la sua base sia un quadrato fatto della misura nota, et la sua altezza sia la linea della quale se n'ha da pigliare il creatore o vero

è il *trovare due medie proportionali fra la comune misura, et la linea che se n'ha da pigliare il creatore; et la minore sarà il detto creatore.*

Benchè molti si siano afaticati in trovare dette due linee, ma sino a hora non si è trovato chi habbia fatto dimostratione se non per via istrumentale delli quali ne metterò due modi... (1) il quale è più in uso de gl'altri. Sia la linea . *d* . *i* . , et la misura comune la linea . *n* . , et della . *d* . *i* . se n'habbia a pigliare il creatore Cubico. Tirasi la . *d* . *b* . ad angolo retto
C. 168. della . *d* . *i* . , et allungasi la . *d* . *i* . sino in . *m* . , et facciasi la . *d* . *c* . pari a la . *n* . , et dal punto . *i* . si tiri la . *i* . *h* . pari a la . *n* . , et parallela a la . *d* . *c* . , et tirasi la . *d* . *h* . dividendo il parallelogrammo . *c* . *d* . *i* . *h* . : poi tirasi la . *c* . *i* . , et la . *d* . *h* . le quali si taglieranno in punto . *e* . , nel qual punto si metterà il piede imobile del compasso, et facciasi la parte del circulo . *o* . *r* . a caso, et tirasi la . *o* . *r* . , la quale passerà o disotto o disopra, o nel punto . *h* . , che passando nel punto . *h* . , si haveria l'intento, ma dato, che passi di sopra si astringerà il compasso, et si farà la parte del circulo . *q* . *p* . ; et dato, che passi disotto si anderà facendo tanti circuli, essendo sempre . *e* . centro, sino, che tirato la corda di uno tocchi l'angolo . *h* . , come si vede del circulo . *a* . *l* . , che la sua corda tocca l'angolo . *h* . ; Et notasi, che dette parti de circuli hanno da toccare nell'estremità la linea . *d* . *b* . , et la . *d* . *m* . ; siche toccando la corda . *a* . *l* . , et l'angolo . *h* . , la . *i* . *l* . sarà il creatore Cubico addimandato.

Et questa dimostratione non è altro, che *trovare due linee medie fra* la . *n* . *et la* . *d* . *i* . , cioè in continua proportione, che tal proportione haverà la . *h* . *i* , (che è pari a la . *n* .) a la . *i* . *l* . come la . *a* . *c* . a la . *c* . *h* . che è pari a la

(1) Il manoscritto ha qui un piccolo spazio bianco.

. *d* . *i* . ; et la proportione, che è dalla . *n* . a la . *i* . *l* . , è come la proportione della . *i* . *l* . a la . *a* . c . [1], et il parallelogrammo fatto della . *i* . , et della . *a* . *c* . è pari al parallelogrammo . *c* . *d* . *i* . *h* . ; et questa dimostratratione è, che, essendo dato il parallelepipedo *c* . *d* . *i* . *h* . *g* . *f* . , che la sua base . *g* . *h* . *i* . sia un quadrato, che el suo lato sia pari a la . *n* . , cioè a la . *i* . *h* . , et che la sua altezza sia pari a la . *d* . *i* . (benchè in questa figura il parallelepipedo stia a giacere, et non ritto), et che si cerchi il lato d'un cubo, che sia di quadratura pari al detto parallelepipedo.

---

(1) Si vede facilmente che il punto . k . di incontro della . le . col prolungamento della . hc . appartiene alla circonferenza . al . , perciò l'angolo . kah . è retto; e si ha kc : ac : : ac : di; cioè, per essere . kc . = . il . , il : ac : ac : di. Ed, avendo dimostrato che n : il : : ac : di, si ricava appunto che n : il : : il : ac : : ac : di, cioè che, *il* ed . *ac* . sono le due medie proporzionali richieste fra il segmento . di . e l'unità . n . in altri termini, che . il . è la radice cubica richiesta.

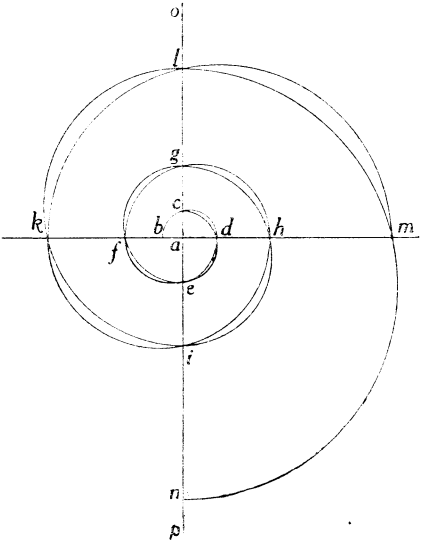
Se si conduce anche la retta . dk . si scorge che, per essere . kc . = . il . media proporzionale fra . dc . , . ca . , l'angolo . dka . è retto, e ciò suggerisce la costruzione meccanica attribuita a PLATONE delle due medie proporzionali. La qual costruzione è sostanzialmente riportata nella edizione a stampa alla pag. 49, ove si eseguisce per mezzo della opportuna collocazione di due squadre, e forse era questa la seconda costruzione accennata nel manoscritto, ma ivi non sviluppata.

Su questa stessa questione il BOMBELLI ritorna nel testo a stampa, in occasione della dimostrazione della regola di « *Agguagliare cubo eguale a tanti e numero* » a pag. 297. Più oltre, quando appunto si tratterà di tale dimostrazione, torneremo sull'argomento.

Questa costruzione ha dato luogo a quesiti che si vedono trattati nelle « *disputazioni matematiche* » medioevali (Cfr.: « *Un quesito di Zuan da Coi* ed *il problema di Delo* » — in « Periodico di Mat. » Serie IV, volume VII (1927) pagine 240-242.

§ [21. Dimostratione della lunghezza delle dignità essendo noto la cosa (1).

Essendo noto la valuta della Cosa rispettiva a una misura data *si può trovare in lunghezza tutte l'altre dignità;* Et perchè a qualcheduno non capirà, che essendo noto la valuta della Cosa senza altro si possa trovare la valuta del Censo, et dell'altre dignità perchè nell'operatione di Algebra in numero, dato che si ha la valuta della Cosa subito si troverà la valuta del Censo quadrando essa valuta; come sarebbe se la Cosa valesse 3 il Censo valerà 9 senza cercare altro, et in linee addimandando una misura; dico, che 'l procedere dell'uno non è differente dal procedere dell'altro perchè se la cosa vale 3 quel 3 è numero rispetto a l'unità, et tale proportione è da detta unità al 3, valuta della Cosa, come detto 3 al 9 valuta del Censo, et



8 v.

(1) Della introduzione nell'algebra geometrica della *rappresentazione con segmenti delle potenze,* e in generale dei prodotti di più segmenti, effettuata qui dal BOMBELLI in modo al tutto generale, si fa solitamente merito al CARTESIO (1637), come di uno dei capitali progressi che a lui deve la scienza essendo questo passo necessario alla rappresentazione geometrica delle espressioni aritmetiche. (Cfr. p. es. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik* im XVI und XVII Jahrundert. Leipzig 1903, pagine 204-205).

così va procedendo la proportione rispetto a quella unità, così *la misura data farà l'effetto della unità in numero.*

Sia la comune misura o vero misura data la linea . *A* . , et la linea . *a* . sia la valuta della Cosa, et volendosi trovare la lunghezza dell'altre dignità, facciasi così: tirasi la linea . *k* . *m* . et la . *n* . *o* . che si tagliano ad angolo retto in punto . *a* ., et facciasi la . *a* . *b* . pari a la . *A* . , linea nota, et la . *a* . *c* . pari a la . *a* . , valuta della Cosa. Per trovare la valuta del Censo, facciasi il semicirculo . *b* . *c* . *d* . , che tocchi li due punti . *b* . et . *c* . , la . *a* . *d* . sarà la valuta del Censo, et così come in numero essendo la . *b* . *a* . 1 , et la . *a* . *c* . 1 $\underline{1}$ (1) la . *a* . *d* . sarà 1 $\underline{2}$, perchè tanto può la . *b* . *a* . in la . *a* . *d* . quanto la . *a* . *c* . in sè stessa. Et per trovare il Cubo facciasi il semicirculo . *c* . *d* . *e* . sopra la . *l* . *n* . , che tocchi li due punti . *c* . , et . *d* . la . *a* . *e* . sarà il Cubo, et fatto il semicirculo C. 169.
. *d* . *e* . *f* . , che tocchi li due punti . *d* . et . *e* . , la . *a* . *f* . , la . *a* . *g* . sarà il Censo Censo, et fatto il semicirculo . *e* . *f* . *g* . la . *a* . *g* . sarà il Primo relato, et fatto il semicirculo . *f* . *g* . *h* . che tocchi li due punti . *f* . et . *g* . , la , *a* . *h* . sarà il Censo Cubo, et fatto il semicirculo . *g* . *h* . *i* . , che tocchi li due punti . *g* . et . *h* . , la . *a* . *i* . sarà il secondo relato, et fatto il semicirculo . *h* . *i* . *k* . , che tocchi li due punti . *h* . et . *i* . , la . *a* . *k* . sarà il Censo Censo Censo, et fatto il semicirculo . *i* . *k* . *l* . , che tocchi li due punti . *i* . et . *k* . , la . *a* . *l* . sarà il Cubo Cubo, et fatto il semicirculo . *k* . *l* . *m* . che tocchi li due punti . *k* . et . *l* , la . *a* . *m* . sarà il Censo primo relato, et fatto il semicirculo , *l* . *m* . *n* . , che tocchi li due punti . *l* et . *m* . , la . *a* . *n* . sarà il terzo relato; come anche si può vedere col numero: sia la . *b* . *a* . 1,

---

(1) I segni delle potenze della quantità variabile (della *cosa*) nel manoscritto sono sovrapposti al coefficiente, così: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$..., ma, nelle stampe, (ed anche nel manoscritto, ove intervengono formule complicate), lo stesso BOMBELLI trova più opportuno lo scriverli accanto, così: 1 $\underline{1}$, 1 $\underline{2}$ ..., e così faremo qui anche noi.

et la . *a* . *c* . , valuta della Cosa 2, la . *a* . *d* . sarà 4 perchè tanto può la . *a* . *b* . in la . *a* . *d* . quanto la . *a* . *c* . in sè. La . *a* . *e* . sarà 8 per la medesima raggione perchè tanto può la . *a* . *c* . in la . *a* . *e* . quanto la . *a* . *d* . in se; la . *a* . *f* . sarà 16, la . *a* . . *g* . 32, la . *a* . *b* . 64, la . *a* . *i* . 128, la . *a* . *k* . 256, la . *a* . *l* . . 512, la . *a* . *m* . 1024, la . *a* . *n* . 2048, le quale linee sono messe da banda egualmente distanti, come si può vedere; le quale linee sono tutte in continoa proportione, et di qui si cava il vero modo di fare le rivolute, ma perchè nelle intersecatione si conosca manco l'angolo ove questa è fatta di mezzi circuli si possono fare di quarti o vero di ottavi, che verranno più belli, ma il vero fondamento è cavato da queste linee continoe proportionali.

§]22]. DIMOSTRATIÒNE DE LO AGGUAGLIARE COSE A NUMERO (1).

Nella regola data nel secondo libro del' agguagliare cose a numero si è detto, che si parti il numero per il numero delle Cose, et lo avvenimento è la valuta della Cosa, et per dimostrare dove naschi tal regola. Sia il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . , che la linea . *a* . *b* . sia 1 , et la . *b* . *c* . 4, il quale

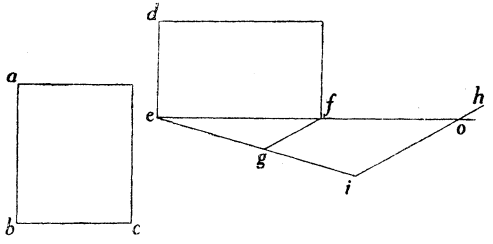
---

(1) In queste dimostrazioni il BOMBELLI procede rappresentando con un segmento arbitrariamente scelto la grandezza incognita (eventualmente una potenza della incognita) ed eseguendo poi sopra questo segmento, e sopra segmenti rappresentanti grandezze note, le operazioni indicate dalla equazione da risolvere. Dalle relazioni fra gli elementi delle figure risultanti ricava poi le regole di risoluzione.

Alla rappresentazione geometrica dei numeri, dati od incogniti, si accompagna una rappresentazione letterale, che si vedrà meglio sviluppata nel seguito. Questa è sempre illustrata da una semplificazione numerica.

Qui si tratta della equazione $ax = b$, che il BOMBELLI enuncia dicendo: *cose eguali a numero.*

parallelogrammo sia eguale al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . il quale sia 20 di superficie: essendo noto la . *b* . *c* . bisogna che tutto il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . sia pari al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . ; però se si partirà 20 per la . *b* . *c* . , che è 4 ne viene 5, et C. 169 v.
tanto è la . *b* . *a* . , che essendo la . *a* . *b* . 5, et la . *b* . *c* . 4 tutta la superficie del parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . sarà 20, che è pari al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . , che pure è 20; ed essendo la dimostratione facilissima non ne dirò altro: ma dato,

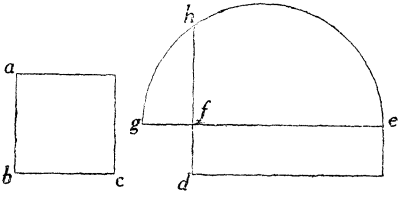


che si habbia a fare tale agguagliamento in linee non è altro, che fare un parallelogrammo sopra la . *b* . *c* . , che sia pari al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . , et *benchè si sia detto il modo non restarò di replicarlo.* Tirasi la . *e* . *g* . pari a la . *b* . *c* . , et la . *g* . *i* . pari a la . *d* . *e* . , et dal punto . *g* . si tiri la . *g* . *f* . , et dal punto . *i* . si tiri la . *i* . *h* . , che siano parallele fra di loro, et allungasi la . *e* . *f* . sino che tagli detta . *i* . *h* . , che la taglierà in punto . *o* . ; dico la . *f* . *o* . essere la valuta della Cosa et se la linea . *a* . *b* . , che è 1⅓ sarà lunga quanto è la . *f* . *o* . il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . sarà eguale, o vero pari, al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . , perchè tanto può la . *f* . *o* . in la . *e* . *g* . , che è pari a la . *b* . *c* . , quanto la . *e* . *f* . in la . *g* . *i* , che è pari a la . *d* . *e* . Et questa regola si cava dal modo del partire di linee, come si è mostrato: et tale agguagliamento si può fare con la dimostratione, che insegna fare sopra una data linea un parallelogrammo pari a un parallologrammo

dato, et la data linea viene ad essere la . *b* . *c* . , che per essersi mostrato a suo luogo non starò a replicarlo.

§ [23]. Dimostratione dell' agguagliare censo a numero (1).

Sia il quadrato . *a* . *b* . *c* . , che ciascuno suo lato sia 1 ⊔ il quale sia eguale al parallelogrammo . *e* . *f* . *d* . il quale sia 25: tale agguagliare non è altro, che fare un quadrato, che



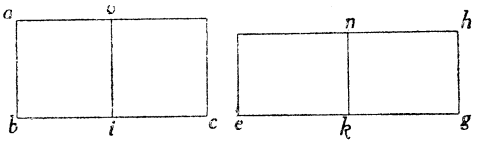
sia pari di superficie al parallelogrammo . *e* . *f* . *d* . , il quale quadrato in numero sarà 5 per lato: ma volendo fare l' agguagliamento in linee allungasi la . *e* . *f* . sino in . *g* . facendo la . *f* . *g* . pari a la . *f* . *d* , , et sopra la . *e* . *g* . facciasi il semicirculo . *e* . *h* . *g* . , et allungasi la . *f* . *d* . sino in . *h* . , la . *f* . *h* .
C. 170. sarà la valuta della cosa perchè se la . *a* . *b* . , et la . *b* . *c* . saranno pari a la . *f* . *h* . , il quadrato . *a* . *b* . *c* . sarà pari al parallelogrammo . *e* . *f* . *d* . perchè tanto può la . *e* . *f* . in la . *f* . *g* . , pari a la . *f* . *d* . , quanto la . *f* . *h* . in sè; et ancora tale agguagliamento si può fare con ciascune delle dimostrationi, che si sono mostrate a fare di un parallelogrammo un quadrato.

---

(1) Si tratta della equazione $x^2 = ab$.

§ [24] DIMOSTRATIONE DI AGGUAGLIARE CENSI A NUMERO (1).

L'agguagliare di più o vero meno d'un Censo si procede in un altro modo, come per essempio: Sia il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* ., et che il lato . *a* . *b* . sia 1 ⌣, et . *b* . *c* . sia 2 ⌣



il quale parallelogrammo sia eguale al parallelogrammo . *e* *g* . *h* . il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . sarà di superficie 2 ⌢, che divisi l'uno, et l'altro in due parti pari, facendo . *b* . *i* . pari a la . *a* . *b* . il quadrato . *a* . *b* . *i* . sarà 1 ⌢ il quale sarà eguale al parallelogrammo . *k* . *n* . *g* . *h* ., essendo . *g* . *k* . pari a la . *k* . *e* . il quale parallelogrammo (se) sarà 16, che fatto un quadrato, che gli sia pari, il suo lato sarà 4, et tanto sarà la . *a* . *b* . valuta della cosa, et questo basta quanto al numero: ma volendo fare l'agguagliamento in linee: l'agguagliare non vuol dire altro, che *fammi un parallelogrammo, che le linee, che lo compongono*

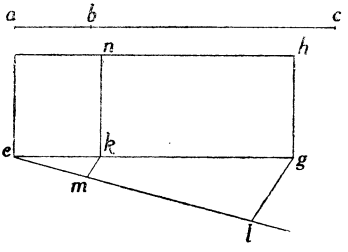
---

(1) In questo, come in ogni altro caso in cui la massima potenza della incognita ha coefficiente diverso dalla unità (più o vero meno di uno), la operazione di dividere tutti i termini della equazione per il coefficiente della massima potenza della incognita, si traduce geometricamente nella costruzione di quarte proporzionali dopo il coefficiente della massima potenza, l'unità, ed i coefficienti dei successivi termini della equazione.

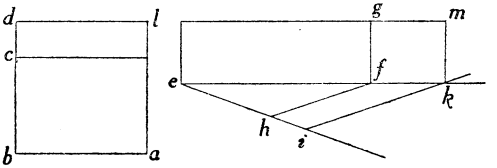
Il primo caso, qui considerato come più semplice, è che il coefficiente della massima potenza della incognita sia 2 e si tratti della equazione

$$2x^2 = ab.$$

siano in proportione l'una a l'altra, come è la . a . b . a la . b . c . il quale sia pari di superficie al parallelogrammo . h . g . e . .



Et per trovare tale parallelogrammo: tirasi la . e . l . pari a la . b . c ., et la . e . m . pari, a la . a . b ., et tirasi la . g . l ., et la . k . m . parallele fra di loro, et dal punto . k . si tiri la pendicolare . n . k . : poi facciasi la . b . i . pari a la . a . b ., et sopra essa si tiri la perpendiculare . o . i . : dico che si haverà il censo . a . b . i . eguale al parallelogrammo . n . k . e . : Et questo si prova per la proportione, perchè tale proportione ha la . b . i . a la . b . c . quale ha la . e . k . a la . k . g ., et nel resto dell'agguagliamento si procederà come nella passata, et si trovarà la valuta della cosa cioè quanto ha da essere
C. 170 v. lunga la . a . b . . Ma se il Censo sarà *parte*, cioè minore



d'un censo ([1]) si farà in questo modo. Sia il parallelogrammo . a . b . c ., et che il lato . a . b . sia 1 $\underline{1}$, et . b . c . parte di cosa, il quale sia eguale al parallelogrammo . e . f . g . . Per fare tale agguagliamento: allungasi la . b . c . sino in . d . facendo la . b . d . pari a la . b . a ., et si haverà il quadrato . a . b . d . l ., che sarà 1 $\underline{2}$, et al parallelogrammo . e . f . g . se gli aggiungerà un altro parallelogrammo che gli sia in proportione come . l . d . c . al . c . b . a . il quale modo di aggiungere sarà questo.

([1]) Cioè, se il coefficiente di x sarà minore della unità.

Tirasi la . *e* . *h* . , et la . *h* . *i* . pari a la . *b* . *c* . , et a la . *c* . *d* . : poi tirasi la . *h* . *f* . , et la . *l* . *k* . parallele fra di loro, ed allungasi la . *e* . *f* . sino in . *k* . , et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *m* . pari et parallela a la . *f* . *g* . ; dico, che il parallelogrammo . *g* . *f* . *k* . *m* . essere la parte, che si ha da aggiungere addimandata, perchè tale proportione è dalla . *e* . *f* . a la . *f* . *k* . come la . *b* . *c* . a la . *c* . *d* . , et la medesima proportione è nelli parallelogrammi perchè sono parallele comuni. Però si haverà il censo . *a* . . *b* . *d* . *c* . eguale al parallelogrammo . *e* . *k* . *m* . , et nel resto si farà come è stato detto.

§ [25]. Dimostratione dell' agguagliare censo et cose a numero.

Sia il Censo *a* . *b* . *f* . , et le cose . *b* . *d* . *h* . *f* . cioè, che . *a* . *b* . *c* . sia $1\underline{2}$, et . *b* . *d* . 6, *a* . *c* . $1\underline{1}$. Il quadrato . *a* . *b* . *f* . sarà $1\underline{2}$ et il parallelogrammo . *b* . *d* . *h* . *f* . sarà $6\underline{1}$ il quale Censo è $6\underline{1}$ si habbiano da agguagliare al quadrato . *m* . *n* . *o* . *p* . il quale sia 16, (1). La . *m* . *o* . sarà 4 cioè il creatore di 16, et

---

(1) L'equazione proposta, è $x^2 + \overline{eb}, x = \overline{mo}^2$.
Si pone

$$x = \overline{ab},\ x^2 = \text{quad. } af;\quad 2\overline{eb}.\, x = \text{rett. } df.$$

La risoluzione si fa rappresentando la somma $x^2 + 2\,\overline{eb}.\, x$ col gnomone *eaikfg*, poi *completando il quadrato al*, cioè facendo

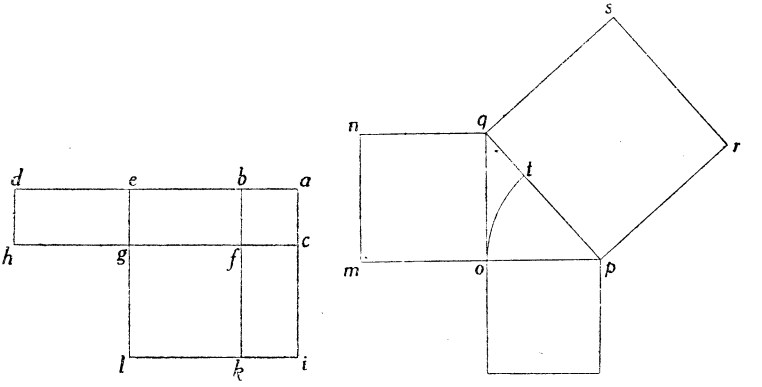
$$x^2 + 2\overline{eb}x + \overline{eb}^2 = \overline{mo}^2 + \overline{eb}$$

onde

$$(x + \overline{eb})^2 = \overline{mo}^2 + \overline{eb}^2,\quad x = \sqrt{\overline{mo}^2 + \overline{eb}^2} - \overline{eb}$$

Il caso in cui il termine in x^2 ha coefficiente diverso dalla unità (se il censo fosse più o meno di un censo), si riduce con la medesima operazione (costruzioni di quarte proporzionali) indicata al n. 24.

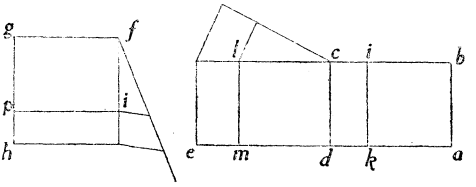
volendo fare tale agguagliamento, cioè trovare quanto sia la . *a* . *c* ., dividasi il parallelogrammo . *b* . *d* . *h* . *f* . con la linea . *e* . *g* . a rettangolo: poi sopra la . *c* . *f* . si faccia un paralle-
C. 171. logramo . *c* . *f* . *k* . pari al parallelogrammo . *e* . *g* . *h* ., et per essere pari la . *g* . *e* . . a la . *a* . *b* . sarà ancora pari a la . *c* . *f* ., et la . *g* . *h* . sarà pari a la . *e*. *d* ., la quale sarà 3 per essere



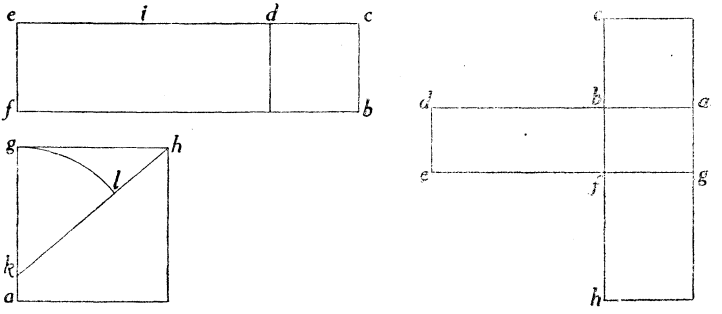
il mezzo della . *b* . *d* ., et la . *f* . *g* . sarà pur 3 per la medesima raggione, et si haverà il gnomone . *e* . *a* . *i* . *k* . *f* . *g* . eguale al quadrato . *m* . *n* . *o* ., che volendo finire il quadrato . *e* . *a* . *i* . *l* . bisogna aggiungerli il quadrato . *g* . *f* . *k* . *l* ., che ciascuno suo lato è 3, che aggiunto a ciascuna delle parti si haverà il quadrato . *a* . *e* . *i* . *l* . eguale al quadrato . *p* . *q* . *r* . *s* . il quale quadrato sarà 25, et in linee si sommaranno li due quadrati . *g* . *f* . *k* . *l* ., et . *m* . *o* . *q* . *n* ., come si è mostrato a suo luogo facendo . *o* . *p* . pari a la . *f* . *g* ., la . *p* . *q*, sarà 5 per essere tutto il quadrato . *p* . *q* . *r* . 25, et tanto ha da essere la . *i* . *l* . essendo la . *l* . *k* . 3, la . *k* . *i* . di necessità sarà 2 . ; si che fatto la . *p* . *t* . pari a la . *l* . *k* ., et la . *t* . *q* . sarà la valuta della cosa . cioè la . *k* . *i* .

Et se il quadrato . *m* . *n* . *o* . *q* . non fusse quadrato, cioè che fusse un parallelogrammo o vero una superficie rettilinea

si farà un quadrato, che gli sia pari di superficie, et se il censo fusse più o meno d' un censo, si aggiungerà o si sminuirà le cose, et il numero proportionalmente, come si fece nel capitolo di censi eguali a numero. Come per essempio:



Sia li censi . *a* . *b* . *c* . et le cose . *c* . *d* . *e* . eguale al quadrato . *f* . *g* . *h* . , et sia la . *a* . *b* . 1 $\underline{1}$. La . *b* . *c* . se sarà maggiore si farà la . *b* . *i* . pari a la . *b* . *a* . , et così il quadrato . *a* . *b* . *i* . *k* . sarà 1 $\underline{2}$, che se ne sarà levato la parte . *i* . *k* . *d* . *c* . ; però si levarà delle cose a la medesima proportione, et così del quadrato . *f* . *g* . *h* . , come si fece nel capitolo di censi eguali a numero, et come ancora si vede nella figura, et si haverà



il censo . *a* . *b* . *i* . *k* . , et le cose . *d* . *c* . *l* . *m* . eguali al parallelogrammo . *g* . *f* . *p* . *i* . , et nel resto si procederà come si è mostrato; et perchè nell'operationi de quesiti, che verranno a questi capitoli perchè saranno fatti con brevità ne darò il modo per non haverlo a replicare.

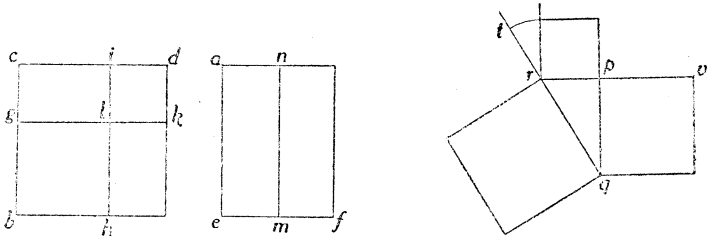
Sia il censo . *b* . *c* . *d* ., et le cose . *d* . *e* . *f* . eguale al
C. 171 v. quadrato . *a* . *g* . *h* . Dividasi la . *d* . *e* . in due parti pari in punto . *i* . ; et facciasi la . *g* . *k* . pari a la . *d* . *i* ., et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *h* . , et facciasi . *k* . *l* . pari a la . *g* . *k* . , et . *l* . *h* . sarà la valuta della cosa, et è la medesima dimostratione detta di sopra perchè la . *d* . *i* . viene ad essere il lato del quadrato, che si ha da aggiungere a ciascuna delle parti, et la . *h* . *k* . viene ad essere il lato delli due quadrati, che si aggiungano inseme, et la . *k* . *l* . viene ad essere la parte, che se ne lieva accioche resti la valuta della cosa . *b* . *c* .

Ma se il parallelogrammo delle cose non haverà linea niuna che sia pari al lato del censo, come si vede nella figura il censo . *a* . *b* . *c* ., et le cose . *d* . *e* . *f* ., che nè la linea . *d* . *e* ., et . *e* . *f* . ciascuna da se non è pari a la . *a* . *b* . lato del censo. In questo caso bisogna fare un parallelogrammo [*gfh*] sopra una linea [*fg*] pari a la . *a* . *b* . il quale sia pari al parallelogrammo . *d* . *e* . *f* ., et tale parallelogrammo saranno le cose, et nel resto dell' agguagliare si procederà come si è mostrato.

§ [26]. Dimostratione dell' agguagliare censi a cose, et numero.

Sia il Censo . *b* . *c* . *d* . eguale a le cose . *a* . *e* . *f* ., et al numero . *v* . *p* . *q* . , et sia . *a* . *e* . 1 $\underline{1}$, et . *e* . *f* . 6, et il quadrato . *v* . *p* . *q* . 27, . *b* . *c* . sarà 1 $\underline{1}$ per essere lato del censo . *b* . *c* . *d* ., et . *v* . *p* . sarà R 27. Per fare tale agguagliamento dividasi il parallelogrammo . *a* . *e* . *f* . in due parti pari con la linea a rettangolo . *m* . *n* . che . *e* . *m* . , et . *m* . *f* . ciascuna di loro sarà 3: poi facciasi li parallelogrammi . *h* . *i* . *d* ., et . *c* . *g* . *k* . pari al parallelogrammo . *a* . *e* . *m* . , et . *m* . *n* . *f* . , et si haverà
C. 172. il censo . *b* . *c* . *d* . meno li due supplementi . *h* . *i* . *d* ., et . *c* . *g* . *k* . eguale al quadrato . *v* . *p* . *q* ., et a finire il quadrato . *h* . *b* . *g* . *l* .

gli manca il quadrato . *i* . *d* . *k* . *l* ., che ciascuno suo lato è 3 : però aggiungasi tal quadrato a ciascuna delle parti facendo la . *p* . *r* . pari a la . *d* . *k* ., che è 3, si haverà il quadrato . *b* . *g* . *l* . *h* . eguale al quadrato . *q* . *r* . *s* ., che è 36, che pigliato linee di l'una, et l'altra parte, si haverà la . *g* . *l* . eguale a la . *r* . *q* ., la quale è 6 (1), cioè il creatore di 36, et perchè la . *d* . *k* . è meno perchè li due suplementi erano meno (2) si aggiungerà a la . *r* . *q* . facendo la . *r* . *t* . pari a la . *k* . *l* ., che è 3, tutta la . *q* . *t* . sarà 9 et sarà eguale a la



. *g* . *k* ., che è 1 $\frac{1}{2}$ per essere pari al lato del censo, però la cosa valerà 9 cioè la linea . *q* . *t* . : ma volendo fare tale agguagliamento con brevità facciasi così: Essendo pari la . *a* . *e* . a la . *b* . *c* . pigliasi il mezzo della . *e* . *f* ., et aggiungasi a la . *v* . *p* . cioè la . *p* . *r* . : poi tirasi la . *q* . *r* . a la quale se gli aggiunga il pezzo . *r* . *t* . pari a la . *r* . *p* . o vero la . *f* . *m* ., che tutto è

---

(1) Nella riproduzione di questa figura si è alquanto alterata la proporzione delle linee. Dovrebbe risultare

$$\overline{qr} = \overline{gl}, \ \overline{qt} = \overline{gk}.$$

(2) L'equazione proposta era

$$x^2 = 2\overline{em}x + \overline{pv}^2$$

cioè

$$(x - em)^2 = \overline{pv}^2 + \overline{rp}^2 \ ; \ \text{con} \ \overline{em} = \overline{kl} = \overline{rp}$$

e qui si tratta appunto di *costruire questa formula.*

uno, la . *q* . *t* . sarà la valuta della cosa; et se il parallelogrammo . *d* . *e* . *f* . non haverà un lato pari al lato del censo, si procederà nel modo, che si è detto nel Capitolo passato.

§ [27]. Dimostratione dell'agguagliare censo et numero a cose [1].

Sia il censo . *a* . *b* . *c* . *d* ., et il quadrato . *c* . *g* . *h* . *i* . , il quale sia 16, eguale al parallelogrammo . *r* . *s* . *t* . *u* . , il quale

---

[1] La dimostrazione non è sostanzialmente diversa da quella fatta nei casi precedenti; ma sono notevoli:

1° La considerazione di aree negative.

2° La considerazione di equazioni col secondo membro eguale allo zero.

L' equazione proposta è:

$$x^2 + \overline{cg}^2 = \overline{su}.x$$

cioè:

$$x^2 - \overline{su}.x = -\overline{cg}^2$$

od anche

$$x^2 - \overline{su}.x + \overline{cg}^2 = 0,$$

pongasi

$$x = \overline{bc} = \overline{sr},$$

con che

$$x^2 = \text{quad. } ac, \quad \overline{su}.x = \text{rett. } ru.$$

Fatto

$$\overline{ck} = \overline{ce} = \overline{om} = \overline{oh} = \frac{\overline{su}}{2}$$

si ha

$$-\overline{cg}^2 = x^2 - \overline{su}.x = \text{quad. } ac - (\text{rett. } ci + \text{rett. } de).$$

Se a questa differenza (*negativa*) *si aggiunge* $\overline{cg}^2$, *si ha* ***nulla***, cioè:

$$0 = x^2 - \overline{su}.x + \overline{cg}^2 = \text{quad. } fi + \text{quad. } \overline{cg} - \text{quad. } hm$$

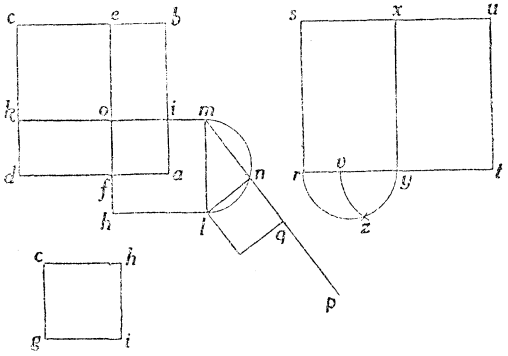
da cui

$$\text{quad. } fi = \text{quad. } hm - \text{quad. } \overline{cg}$$

infine

$$\left(x - \frac{\overline{su}}{2}\right)^2 = \left(\frac{su}{2}\right)^2 - \overline{cg}^2, \quad x = \frac{\overline{su}}{2} + \sqrt{\left(\frac{su}{2}\right)^2 - \overline{cg}^2}.$$

sia 10 ⊥ : cioè la . *r* . *s* . 1 ⊥, et la . *r* . *t* . 10. Per fare tale agguagliamento dividasi il parallelogrammo . *r* . *s* . *t* . *u* . in due parti pari con la linea rettangoli . *y* . *x* . : poi facciasi li due suplementi . *d* . *e* . *c* . *f* . , et . *b* . *c* . *k* . *i* . pari al parallelogrammo . *r* . *s* . *y* . , la . *b* . *i* . sarà 5 per essere pari a la . *r* . *y* , mezzo della . *r* . *t* . , et la . *k* . *i* . sarà 1 ⊥ per essere pari a la . *b* . *c* . C. 172 v.



lato del censo, et viene ad essere pari a la . *r* . *s* . , et li detti due suplementi saranno meno, et si haverà il censo . *a* . *b* . *c* . meno li due suplementi . *d* . *e* . *c* . *f* . , et . *b* . *c* . *k* . *i* . più il quadrato . *c* . *g* . *h* . *i* . eguale a nulla. Per finire il quadrato . *l* . *o* . *h* . *m* . vi manca il gnomone . *h* . *l* . *m* . *f* . *a* . *i* . , et perchè tutto il quadrato . *h* . *l* . *m* . *o* . è 25 per essere la . *m* . *l* . 5 . , et il quadrato . *a* . *f* . *i* . è 16, si cavaranno l'uno del'altro come si è mostrato a suo luogo, facendo il semicirculo . *l* . *n* . *m* . , et tirando la . *m* . *n* . pari a la . *h* . *i* . , et dal punto . *n* . tirando la . *l* . *n* . sopra la quale fatto il quadrato . *l* . *n* . *q* . il quale sarà pari il sopradetto gnomone, et tale quadrato sarà 9 perchè la *l* . *m* . è 5, la . *n* . *m* . è 4 per esser pari a la . *h* . *i* . la . *l* . *n* . sarà 3, et il suo quadrato 9; siche si haverà il quadrato . *a* . *o* . *f* . *i* . eguale al quadrato . *l* . *n* . *q* . , che, pigliato la linea di l'uno, et dell'altro, si haverà la . *a* . *i* . eguale alla . *q* . *n* . , et perchè la . *l* . *m* . è meno, et è 5, si levarà, et

aggiungerà a la . *q* . *n* . facendo la . *p* . *q* . pari a la . *k* . *c* . cioè 5; si che tutta la . *p* . *n* . sarà 8, et sarà eguale a la . *k* . *i* , che è 1 ⊥ per essere pari a la . *b* . *c* . ; sichè la cosa valerà 8.

Ma volendo fare con brevità: Pigliasi il mezzo della . *r* . *t* . , cioè la . *r* . *y* . sopra la quale si faccia il semicirculo . *y* . *z* . *r* . , et tirasi la . *r* . *z* . , pari a la . *c* . *g* . : poi dal punto . *z* . si tiri la . *z* . *y* . et facciasi la . *y* . *v* . pari a la . *z* . *y* . , la . *v* . *t* . sarà la valuta della cosa; et se il quadrato . *c* . *g* . *h* . non sarà quadrato si ridurrà a superficie quadrata, et se uno de li due lati . *r* . *s* . o vero . *r* . *t* . non sarà pari al lato del censo . *a* . *b* . *c* . si farà come si è detto ne gl' altri capitoli passati, et notasi che se il quadrato . *c* . *g* . *h* . *i* . sarà maggiore del quadrato . *o* . *h* . *l* . *m* . si tratterà dell' imposibile.

§ [28]. Dimostratione della trasmutatione de capitoli.

Essendo nel secondo libro nella maggior parte de Capitoli posto la sua trasmutatione non ho voluto mancare di mettere la sua dimostratione, ma per non essere troppo lungo ne metterò solo tre essempij li quali basteranno, cioè da chi
C. 173 saranno bene intesi, per tutti gl' altri. Et prima sia il censo . *a* . *b* . *c* . , et le 6 ⊥ . *e* . *c* . *d* . eguale alla superficie . *f* . (1) la quale sia 20. La . *c* . *d* . sarà 6 perchè la . *e* . *c* . è 1 ⊥ per essere lato del censo il parallelogrammo . *e* . *c* . *d* . è 6 ⊥, la . *b* . *c* . è 1 ⊥ per essere pur lato del censo, et tutta la . *b* . *d* . è . 1 ¹ p. 6, et la . *a* . *b* . è 1 ⊥, et tutto il parallelogrammo . *a* . *b* . *d* . è 20

---

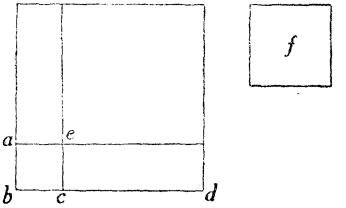
(1) L'equazione $x^2 + \overline{cd}.x = f$, cioè $x(x + \overline{cd}) = f$, con la posizione

$$y = x + \overline{cd},$$

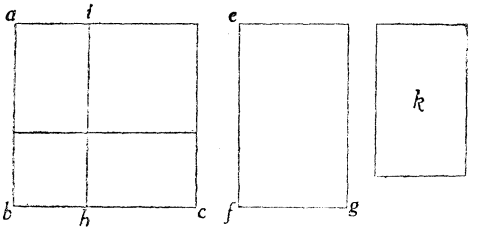
si muta nella

$$y^2 - \overline{cd}\, y = f.$$

per essere pari a la superficie . *f* . , et perchè la linea . *b* . *d* . è 6 più della . *a* . *b* . si dirà: trovami un parallelogrammo, che la . *b* . *d* . sia 6 più della . *a* . *b* . , et che la sua superficie sia 20. Che, posto che la . *b* . *d* . sia 1 ⊥, la . *b* . *a* . sarà 1 ⊥ m . 6, che moltiplicato l'una via l'altra, fanno 1 ⊥ m . 6 ⊥, et questo è eguale a 20, perchè il parallelogrammo . *a* . *b* . *d* . ha da essere 20, che, agguagliato, la cosa valerà *R* 29 *p*. 3, et tanto è la . *b* . *d* . , che trattone la . *c* . *d* . , che è 6, resta *R* 29 *m*. . 3, et tanto è la . *b* . *c* . , che è la cosa avanti la trasmutatione; et questo basta quanto al primo essempio.



Dato il censo . *a* . *b* . *c* . che sia eguale al parallelogrammo . *e* . *f* . *g* . il quale sia 6 ⊥, et a la superficie . *k* . (¹) la quale



sia 16, et dato che la . *e* . *f* . sia 1 ⊥, la . *f* . *g* . sarà 6, per essere il parallelogrammo . *e* . *f* . *g* . 6 ⊥, che, levato del censo . *a* . *b* . *c* . il parallelogrammo . *i* . *h* . *c* . pari al parallelogrammo . *e* . *f* . *g* .

(¹) L'equazione $x^2 = \overline{fg} \,.\, x + h$, cioè: $x(x - \overline{fg}) = h$ con la posizione

$$y = x - \overline{fg}$$

si muta nella

$$y^2 + \overline{fg} \,.\, y = h.$$

restarà il parallelogrammo . *a* . *b* . *h* . il quale sarà 1 $\underline{2}$ *m* . 6 $\underline{1}$, il quale ha da essere pari a la superficie . *k* . che è 16, et la . *b* . *h* . sarà 1 $\underline{1}$ m . 6, per essere la . *h* . *c* . 6, cioè quanto è la . *f* . *g* ., però si dirà eguale il parallelogrammo . *a* . *b* . *h* . alla . *k* ., che è 16 di superficie, et la linea . *b* . *h* . è 6 meno della . *b* . *a* .. Che, posto che la . *b* . *h* . sia 1 $\underline{1}$, la . *b* . *a* . sarà 1 $\underline{1}$ p . 6 et il parallelogrammo . *a* . *b* . *h* . sarà 1 $\underline{2}$ *p*. 6 $\underline{1}$, et sarà eguale a 16, che, agguagliato, la cosa valerà 2, et tanto è . *b* . *h* ., che aggiuntoli la . *h* . *c* ., che è 6, fa 8, et tanto è la . *b* . *c* ., et la valuta della cosa avanti la Trasmutatione.

Sia il cubo . *a* . *b* . *c* ., che il lato . *a* . *b* . sia 1 $\underline{1}$, et . *b* . *c* . 1 $\underline{2}$, et il parallelogrammo . *e* . *c* . *d* ., che è 6 $\underline{1}$, siano eguali alla superficie . *f* . (1) la quale sia 20.

La . *c* . *d* . sarà 6 per essere la . *e* . *c* . 1 $\underline{1}$, et tutto il parallelogrammo . *a* . *b* . *d* . conviene essere 20 per essere pari a la superficie . *f* ., et la . *b* . *c* . è la potentia della . *a* . *b* . però, facendo nuova positione. Pongasi che la . *b* . *d* . sia 1 $\underline{1}$, la . *a* . *b* . sarà $\frac{20}{1\ \underline{1}}$ perchè tutto il parallelogrammo
C. 173 v. . *a* . *b* . *d* . è 20, la . *b* . *c* . sarà $\frac{400}{1\ \underline{2}}$ cioè la potentia della . *a* . *b* ., la . *c* . *d* . è 6, che aggiunti insieme fanno $\frac{400 \text{ p. } 6\underline{2}}{1\ \underline{2}}$, et questo è eguale a 1 $\underline{1}$ perchè tutta la . *b* . *d* . fu posto essere 1 $\underline{1}$,

---

(1) L'equazione $x^3 + \overline{cd}\, x = f$, cioè: $x(x^2 + cd) = f$ con la posizione

$$y = x^2 + \overline{cd}, \text{ cioè } x = \frac{f}{y}$$

si muta nella

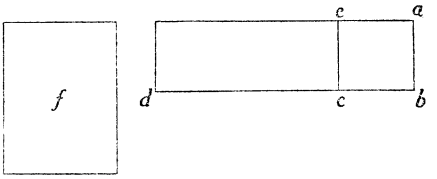
$$y^3 = \overline{cd}\, y^2 + f^2.$$

In sostanza qui si tratta di una trasmutazione o *radici reciproche*, ed è notevole, nella immagine geometrica, la rappresentazione di x^2 mediante il segmento $\overline{bc}$, e di x^3 mediante il rettangolo $\overline{abc}$.

che, levato il rotto si haverà

400 p. $6\frac{2}{}$ eguale a $1\frac{3}{}$;

che, agguagliato la cosa valerà 10, et tanto è la . *b* . *d* ., che trattone la . *c* . *d* . che è 6 resta 4, et tanto à la . *b* . *c* ., et il suo creatore è 2, et tanto è la . *a* . *b* . perchè la . *b* . *c* . è la



potentia della . *a* . *b* . ; et 2 valeva la cosa avanti la trasmutatione. Et parendomi che questi tre essempii, come ho detto, siano bastanti per intendere tutte l'altre trasmutationi.

§ [29]. Dimostratione di cen: censo et censi eguali a numero (1).

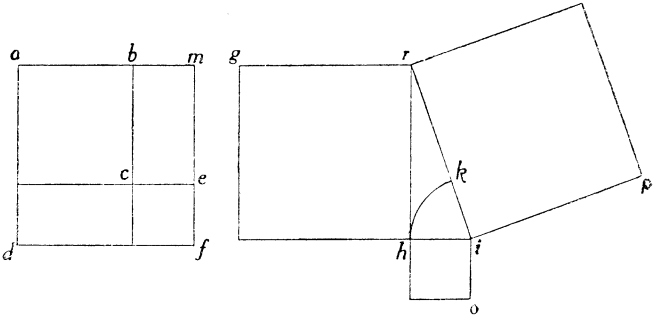
Questa dimostratione è poco differente da Capitolo di censi, et cose eguale a numero, però non starò a replicare i principij che furono detti in detti Capitoli.

Sia il cen: censo . *a* . *b* . *c* . cioè la . *a* . *b* ., et la . *b* . *c* . ciascuna di loro sia $1\frac{2}{}$, et li due suplementi . *c* . *d* ., et . *b* . *e* . siano $4\frac{2}{}$, et tutto il gnomone sia eguale al quadrato . *g* . *h* . il quale sia 32. La . *c* . *e* . sarà 4 perchè la . *b* . *c* . è $1\frac{2}{}$, et la superficie del suplemento . *b* . *e* . sarà $2\frac{2}{}$, et la [. *c* . *d* .]

(1) Si tratta della equazione

$$x^4 + ax^2 = b.$$

il medesimo, che tutti e due insieme fanno $4\frac{2}{}$, come fu detto; si che a finire tutto il quadrato . *a* . *d* . *f* . vi manca il quadrato . *c* . *e* . *f* . però se si aggiungerà a ciascuna delle parti, come si è mostrato nel Capitolo di censo, et cose eguale a numero, et come ancora si vede nella figura facendo il quadrato . *h* . *o* . *i* . pari al quadrato . *c* . *e* . *f* . , et si haverà il quadrato . *a* . *d* . *f* . eguale al quadrato . *i* . *r* . *p* . , che pigliato la



linea di l'un, et del 'altro, si haverà la . *m* . *f* . eguale a la . *i* . *p* . ; et perchè la . *m* . *e* . è $1\frac{2}{}$, la . *e* . *f* . è 2 per essere pari a la . *e* . *c* . , la . *i* . *p* . sarà 6 per essere tutto il quadrato . *r* . *i* . *p* . 36, perchè è pari al quadrato . *g* . *h* . *r* . et . *o* . *i* . *h* . , che l'uno è 32 et l'altro 4; però se di ciascuna si levarà la parte . *e* . *f* . resterà la . *m* . *e* . eguale a la . *k* . *r* . , et essendo la [. *i* . *k* . 2] per essere pari a la . *e* . *f* . , la . *r* . *k* . sarà 4; si che si haverà il censo . *m* . *e* . eguale a la . *r* . *k* . che è 4, però volendo trovare
C. 174. la valuta della cosa, se ne piglierà il creatore, come si è mostraro a suo luogo il quale creatore sarà 2. Et perchè il capitolo di cen: censo eguale a censo e numero è come quello di censo eguale a cose e numero, et non vi è altra differenza, che pigliare il creatore della valuta del censo, però non ne ponerò altra dimostratione, et così di cen: censo e numero eguale a cose.

§ [30]. Dimostratione dell'agguagliare cen: cubo, et cubo a numero (1).

Perchè questo Capitolo è simile al sopradetto mi servirò della medesima dimostratione.

Sia il cen: cubo . *a* . *b* . *c* ., et li due supplementi . *b* . *e* ., et . *c* . *d* . li quali siano $8\frac{3}{}$ eguali al quadrato . *g* . *h* ., il quale sia 48.

La . *b* . *c* ., et la . *b* . *a* . ciascuna di loro sarà $1\frac{3}{}$, et il suplemento . *b* . *c* . sarà $4\frac{3}{}$, cioè il mezzo di $8\frac{3}{}$, la . *c* . *e* . di necessità sarà 4, che aggiunto il quadrato . *c* . *e* . *f* . a ciascuna delle parti, come si è detto di sopra si haverà il quadrato . *a* . *m* . *f* . *d* . eguale al quadrato [. *r* . *i* . *p* .], che, pigliato la linea di ciascuno, si haverà la . *m* . *f* . eguale a la . *r* . *i* . che levato la . *e* . *f* . a ciascuna delle parti si haverà la . *m* . *e* . eguale e la [*rk*], et perchè la . *m* . *e* . è $1\frac{3}{}$ si piglierà il creatore cubico della linea, . *r* . *k* . come linea, come si è mostrato a suo luogo.

Et parendomi che questo basti quanto al Capitolo di cen: cubo, et numero cubo, et numero, et così di cen: cubo, et numero eguale a cubo non ne dirò altro.

§ [31]. Dimostratione del capitolo di cubo eguale a cose, et numero (2).

Essendo la dimostratione di questo Capitolo difficilissimo, et masime non avendo li corpi solidi, che vanno in tale dimo-

---

(1) Si tratta della equazione

$$x^6 + ax^3 = b.$$

(2) Proposta l'equazione $x^3 = 3\overline{Hf} \,.\, x + K$ (ove $\overline{Hf}$ è l'area di un rettangolo, K è un corpo solido), si pone $x = \overline{rb} = \overline{rc} + \overline{cb}$, e, con la effettiva scomposizione in 8 pezzi del cubo x^3, si dimostra che

$$x^3 = \overline{rc}^{\,3} + \overline{cb}^{\,3} + 3\,\overline{rc} \,.\, \overline{cb}\, x,$$

stratione, pure mi sforzerò al meglio, che potrò dimostrarlo, ma sarà quasi imposibile poterlo intendere non formando li corpi, et in essi facendo li tagli che si diranno. Sia il

---

e, dal confronto con l'equazione proposta, si ricava:

$$\begin{cases} \overline{rc} \,.\, \overline{cb} = Hf \\ \overline{rc}^{\,3} + \overline{cb}^{\,3} = K. \end{cases}$$

d'onde la risolvente quadratica.

Nel testo a stampa del 1572, questa dimostrazione è fatta seguire dalle considerazioni seguenti. (« *L' Algebra* », pag. 297).

« Ma si deve avvertire che *quando il cubato del terzo delli tanti supera il quadrato della metà del numero*, tal agguagliatione non si potrà fare con detto taglio; però, non parendo tale agguagliatione generale, *son' andato tanto investigando, che ho trovato una dimostratione in superficie piana generalissima;* ma perchè dove intervengono li corpi, le linee medie non si possono ritrovare se non per via d'instromento, però non paia ad alcuno strano se questa dimostratione haverà la medesima difficoltà; che, quando non l'havesse, saria stata vana la inventione di PLATONE e d'ARCHITA TARENTINO, con tanti altri valent' huomini nel voler duplare l'altare, overo cubo, (come largamente ne ha parlato il BARBARO nel comento del suo VITRUVIO); però havendo lo scudo di tanti valent'huomini, non mi affaticarò in voler sostentare tal dimostratione non si poter far altramente che con l'instromento.

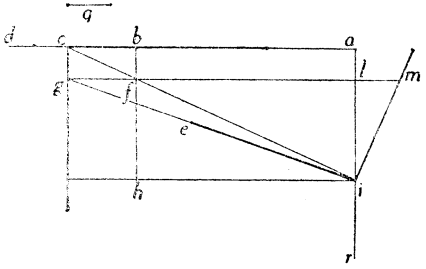
Dimostratione di Cubo eguale a Tanti e numero in superficie piana.

Sia 1 $\underset{\smile}{3}$ *eguale a* 6 $\underset{\smile}{1}$ *p.* 4,
e sia la . *q* . la unità. Tirisi la *mf* . e faccisi . *ml* . che sia pari alla . *q* ., cioè sia 1 ., et . *lf* . 6, cioè quanto il numero delli Tanti, e sopra detta . *lf* . si faccia un parallelogrammo che sia . 4 . di superficie, cioè quanto è il numero, e sarà il parallelogrammo . *a* . *b* , *f* ., poi allonghisi la . *ab* . fino in . *d* ., ed . *al* . fino in . *r* .; poi habbiansi due squadri, delli quali l'uno si ponga con l'angolo sopra la linea . *r* ., e che una delle braccia tocchi la estremità . *m* ., il qual squadro si alzi o abbassi tanto, che tirato dall'angolo dello squadro una linea, che tocchi la estre-

cubo . *u* . *r* . *s* . eguale al parallelepipedo . *D* . *H* . *G* . il quale sia 6 $\underline{1}$, et al corpo . *K* . il quale sia 9. Essendo il parallelepipedo . *D* . *H* . *G* . 6 $\underline{1}$ si preporà, che la . *e* . *H* . et la . *G* . *E* . C. 174 v

---

mità . *f* ,, che vada a toccare la . *bd* . in tal luogo, che mettendo un altro squadro con l'angolo al detto toccamento, e con l'uno delle braccia sopra la . *da* ., vadi a intersegare il braccio dell'altro squadro nella linea . *f* . *l* . e, fatto questo, dico, che *la linea* . *li* . *che è dal punto* . *l* . *sino all'angolo dello squadro è la valuta del Tanto,* e lo provo in questo modo:



« Prosupposto che si habbia alzato e abbassato lo squadro talmente, che in . *i* . tirando la . *if* . fino in . *c* ., e che il braccio dello squadro . *g* . taglisi con l'altro squadro in . *g* ., suso la linea . *gc* ., fatto questo, dico la linea . *li* ., essere la valuta del Tanto. Perchè essendo la . *li* . 1 $\underline{1}$, ed . *ml* . 1, la . *lg* . sarà 1 $\underline{2}$, perchè tanto può la . *gl* . in . *lm* . quanto . *li* . in se stessa (per essere l'angolo . *i* . retto). Il parallelogrammo . *ilg* . sarà un cubo [1 $\underline{3}$], ed il parallelogrammo . *ilf* ., sarà 6 $\underline{1}$, perchè . *il* . è 1 $\underline{1}$, e . *lf* ., 6, e il parallelogrammo . *hfg* . sarà 4, perchè è pari al parallelogrammo . *alf* . che era 4, ed essendo . *ilg* . tutti insieme 6 $\underline{1}$ e 4, e per l'altra ragione è provato essere 1 $\underline{3}$, dunque, 1 $\underline{3}$ *sarà eguale a* 6 $\underline{1}$ *p.* 4, e la . *il* . sarà 1 $\underline{1}$.

In linguaggio moderno: Proposta l'equazione $x^3 = Px + Q$ si faccia

$$\overline{lm} = 1,\ \overline{la} = \frac{Q}{P},$$

poi si conduca *ad* perpendicolare ad *al* (parallela ad *lf*).

ciascuna di loro sia 1 di necesità la [. H . L .] sarà $6\frac{1}{2}$ cioè sei volte la . b . z .. Hora bisogna fare tre tagli nel cubo, di tre superficie parallele in questo modo. Tirasi la . a . q . parallela a la . b . r ., et facciasi la . q . i . parallela a la . r . s .,

---

Preso i ad arbitrio sopra lr, si tiri ig perpendicolare ad im, e gc perpendicolare ad ac: poi si congiunga ci, che incontri lg in f.

Sarà:

$$\overline{il}^2 = \overline{gl} \,.\, \overline{lm},$$

ed, essendo

$$\overline{lm} = 1, \ \overline{il}^2 = \overline{gl},$$

epperò

$$\overline{il}^3 = \overline{gl} \,.\, \overline{li}$$

e, per l'equivalenza dei rettangoli gh, fa, avremo ancora

$$\overline{il}^3 = (\overline{il} + \overline{la}) \,.\, \overline{ba}$$

ossia

$$\overline{il}^3 = \left(\overline{il} + \frac{Q}{P}\right)\overline{fl}. \tag{1}$$

Si consideri ora che, per il piccolissimo, anche fl è piccolissimo, e che, col crescere di il anche fl cresce fino a superare qualunque grandezza data. Dunque *ci sarà un valore* di il cui corrisponderà un valore di $fl = P$ (pel quale il rettangolo $alfb$ ha area uguale al numero Q).

Per un tale valore di il, la (1) assume la forma

$$\overline{il}^3 = \left(\overline{il} + \frac{Q}{P}\right) . P$$

cioè

$$\overline{il}^3 = P \,.\, \overline{il} + Q.$$

E ciò dimostra appunto che *il è radice della equazione proposta.*

Questa *dimostrazione in superficie piana,* interessantissima, perchè è la prima dimostrazione che si conosca della esistenza di radice reale per le equazioni cubiche nel caso irreducibile, non si trova nel manoscritto, che contiene invece solo la prima parte della dimostrazione, nella stessa identica forma che appare nel testo a stampa.

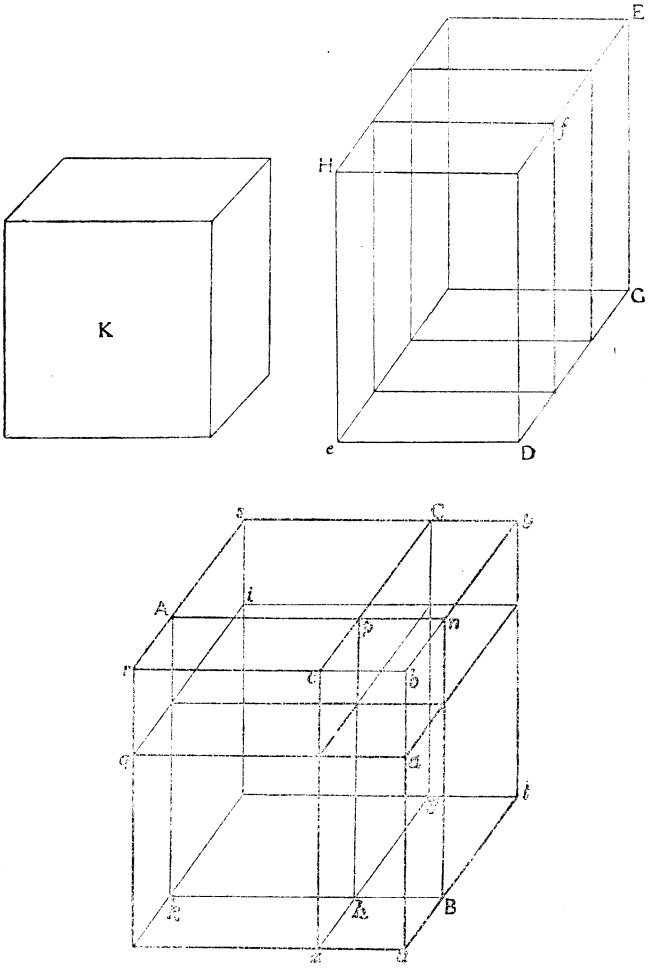
Ciò significa che al tempo in cui il BOMBELLI componeva la stesura che appare nel manoscritto, egli non aveva ancora trovata quella « *dimostratione*

et con la superficie . *a* . *q* . *i* . si verrà a tagliare il cubo in due parti: poi tirasi la . *z* . *c* . parallela a la . *b* . *u* . facendo la . *b* . *c* pari a la . *a* . *b* ., et dal punto . *z* . si tiri la . *z* . *g* . parallela a la . *t* . *u* ., et con la superficie . *g* . *z* . *c* . et . *C* . si farà l'altro taglio, poi tirasi la . *n* . *B* . parallela alla . *b* . *u* . facendo la . *b* . *n* . pari a la . *b* . *c* ., et dal punto . *n* . si tiri la . *n* . *A* ., et con la superficie . *B* . *n* . *A* . *k* . si farà l'ultimo taglio, et con detti tagli il cubo . *u* . *r* . *s* . sarà diviso in 8 pezzi delli quali ve ne saranno due cubi, che il lato d'uno sarà la . *b* . *c* . ,et il lato del'altro sarà la . *g* . *h* ., che è pari a la . *c* . *r* ., li altri sei pezzi saranno tutti parallelepipedi delli quali . *c* . *r* . *A* ., *a* . *z* . *B* ., et *n* . *y* . *p* ., sarano pari fra di loro, et li altri tre saranno pure pari fra di loro, che per essere cosa chiarissima non mi estenderò a slegare le proposizioni. Però se si accompagneranno uno dei parallelepipedi maggiori con uno de parallelepipedi minori, per essere pari di altezze et di larghezze, formeranno un parallelepipedo solo; si che accompagnati tutti tre li maggiori con tutti tre li minori formaranno li infrascritti tre parallelepipedi . *r* . *z* . *p* .; . *a* . *u* . *g* ., et . *n* . *s* . *A* .; li quali saranno tutti di altezza 1 $\underline{1}$ per essere . *z* . *c* . 1 $\underline{1}$, cioè il lato del cubo maggiore, et il medesimo sarà . *z* . *g* ., et . *y* . *s* .; et se si preporà, che la basa . *r* . *c* . *p* . di uno de detti parallelepipedi sia 2, il parallelepipedo . *r* . *z* . *p* . sarà 2 $\underline{1}$, et tutti tre li parallelepipedi saranno 6 $\underline{1}$, che saranno pari a le cose: *D* . *H* . *E* ., et li due cubi . *a* . *b* . *p* . , et . *k* . *h* . *g* . *C. 175.* haranno da essere pari al corpo . *K* . però bisogna trovare

---

generalissima »; fors'anche egli non aveva ancora sentito la necessità di una tale dimostrazione. In secondo luogo si osservi che al tempo della composizione del manoscritto, il BOMBELLI non conosceva il Commento al VITRUVIO del BARBARO, e poichè questo commento è stato pubblicato nel 1556, ciò conferma la supposizione che fa risalire a data anteriore, la composizione del manoscritto.

quanto è la . *r* . *c* . , et la . *c* . *b* . ciascuna da se, et sapendo, che tutta la superficie . *c* . *r* . *A* . è 2, bisogna trovare due nu-



meri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 2., che dato, che la . *r* . *A* . sia $1\frac{1}{2}$, la . *r* . *c* . sarà $\frac{2}{1\frac{1}{2}}$, che moltiplicato

l'uno via l'altro fanno 2, come fu addimandato: Hora bisogna vedere se li due cubi . *a* . *b* . *p* . , et . *k* . *h* . *g* . se sono pari al corpo . *K* . , et perchè la . *b* . *c* . lato del cubo . *a* . *b* . *p* . è pari a la . *r* . *A* . , il cubo . *a* . *b* . *p* . sarà $1\underset{\smile}{3}$, et la . *k* . *h* . lato del cubo . *k* . *h* . *g* . , è pari a la . *c* . *r* . sarà $\frac{2}{1\underset{\smile}{1}}$, et tutto il cubo . *k* . *h* . *g* . sarà $\frac{8}{1\underset{\smile}{3}}$, che aggiunto col cubo . *a* . *b* . *p* . , fa $\frac{1\underset{\smile}{6}\ p\ 8}{1\ \underset{\smile}{3}}$, et questo è eguale al corpo . *K* . , che è 9, che levato il rotto, si havera $1\underset{\smile}{6}\ p\ 8$ eguale a $9\underset{\smile}{3}$, che agguagliato la cosa valerà 1, et tanto sarà la . *r* . *A* . , la . *r* . *c* . sarà 2 perchè tutta le superficie . *c* . *r* . *A* . è 4, la . *b* . *c* . sarà $1\underset{\smile}{0}$ per essere pari a la . *r* . *A* . , et tutta la . *b* . *r* . rarà 3, che è la valuta della cosa di prima.

§ [32]. Dimostratione di cubo, et cose eguale a numero (1).

La dimostratione di questo capitolo è dificile, come la passata, et dificilmente si può intendere senza formare il corpo

---

(1) L'equazione proposta è

$$x^3 + 3DE \cdot x = K$$

ove DE è l'area di un rettangolo e K il volume di un solido. Posto

$$x = \overline{hp} = \overline{hB} - \overline{pB} = \overline{Bn} - \overline{pB},$$

si dimostra, al solito modo, che

$$x^3 = \overline{hB}^3 - \overline{pB}^3 - 3x \cdot \overline{hB} \cdot \overline{pB}$$

e, dal confronto con la proposta, si ricava:

$$\begin{cases} \overline{hB}^3 - \overline{pB}^3 = K \\ \overline{hB} \cdot \overline{pB} = DE. \end{cases}$$

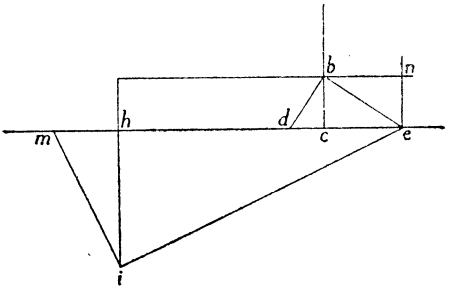
solido, pure mi sforzerò di decchiararlo al meglio, che potrò. Sia il cubo . h . g . p ., et le 6 $\underline{1}$. D . H . G . eguale al corpo . K ., il quale sia 20.

Allungasi la . h . p . sino in . B . et dalla . B . h . si faccia il cubo . u . h . s ., il quale cubo sarà maggiore del cubo

---

La dimostrazione *in superficie piana*, data nel testo (*L'Algebra* - pag. 286) è la seguente:

Data l'equazione $$x^3 + Px = Q^2$$
si faccia
$$\overline{hi} = Q,\ \overline{hc} = P,\ \overline{dc} = 1$$
e le rette *hi*, *cb*, siano perpendicolari ad *he*.

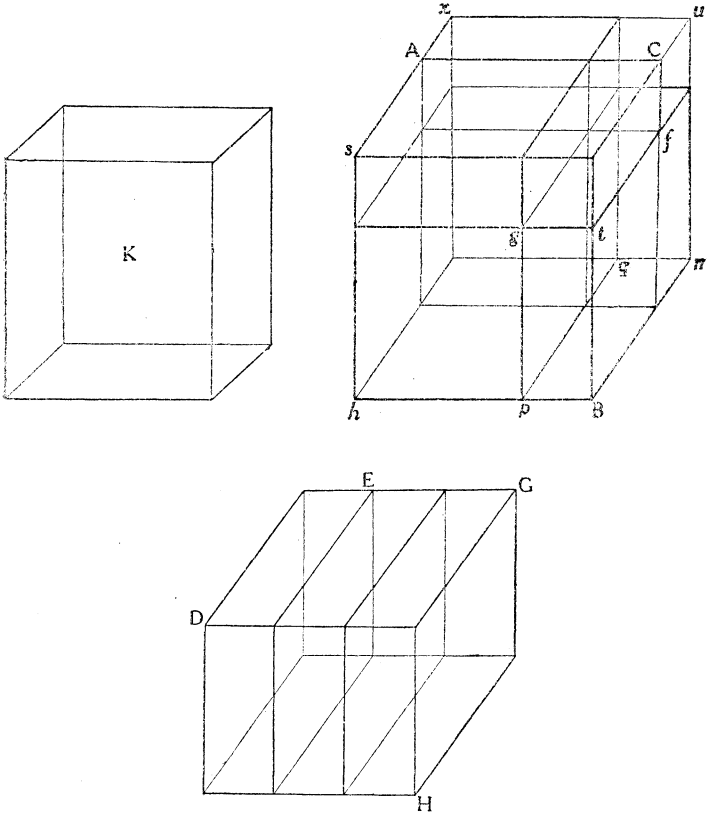


Preso *b* come si voglia sopra *cb*, si congiunga *db*, e si conduca *be* perpendicolare a *db*, poi, tirato *ie*, sia *im* perpendicolare ad *ie* e si completi il rettangolo *neh* sarà
$$\overline{ce} = \overline{bc}^2$$
$$\text{rett. } nc = \overline{bc}^3, \quad \text{rett. } nh = \overline{eh} \cdot \overline{bc} = \overline{bc}^3 + P \cdot \overline{bc},$$

Del triangolo rettangolo *mie*, quad. $hi = \overline{eh} \cdot \overline{hm} = Q^2$.

Se dunque il punto *b* è scelto in guisa che sia $\overline{bc} = \overline{hm}$, verrà
$$\overline{bc}^3 + P\overline{bc} = Q^2$$
e $\overline{bc}$ sarà radice della equazione proposta.

. *h* . *g* . *p* . ; li tre parallelepipedi . *g* . *B* . *n* . , . *f* . *s* . *C* . , et . *A* . *x* . *q* . , et il cubo . *f* . *u* . *C* . ; et dato, che ciascuno de detti tre parallelepipedi sia 2 ⊥ tutti tre saranno 6 ⊥ , che sa-



ranno pari a le 6 ⊥ . *D* . *H* . *G* . ; si che si haverà il cubo . *h* . *g* . *p* . , et li tre parallelepipedi detti eguale al corpo . *K* . , et per finire tutto il cubo . *u* . *h* . *s* . vi manca il cubo . *u* . *C* . *f* . , et perchè il parallelepipedo . *g* . *B* . *n* . è 2 ⊥ , et la . *B* . *t* . , che è la sua altezza è 1 ⊥ per essere pari a la . *g* . *p* . o vero

. *p* . *h* . ; la basa . *p* . *B* . *n* . *q* . di necesità sarà 2, acciochè moltiplicato via la sua altezza faccia 2 $\underset{\smile}{1}$; et il cubo . *h* . *g* . *p* . trattone il cubo . *u* . *f* . *C* . , il resto ha da essere pari al corpo . *K* . . Però si farà la infrascritta dimanda: *Trovami due numeri cioè la* . *B* . *p* . , et la . *B* . *n* . , *che moltiplicato l' uno*
C. 175 v. *via l' altro faccia 2, cioè la basa* . *p* . *B* . *n* . , *et che li lor cubati cioè il cubato della* . *p* . *B* . , *che è il cubo* . *u* . *f* . *C* . *tratto del cubo della* . *B* . *n* . *cioè il cubo* . *h* . *g* . *p* . *resti* 20, *cioè il corpo* . *K* . .

Posto, che la . *B* . *p* . sia 1 $\underset{\smile}{1}$ la . *B* . *n* . sarà $\frac{2}{1\,\underset{\smile}{1}}$, che il cubo . *B* . *p* . sarà 1 $\underset{\smile}{3}$, et il cubo della . *B* . *n* . sarà $\frac{8}{1\,\underset{\smile}{3}}$, che trattone 1 $\underset{\smile}{3}$, resta $\frac{8\ m\ 1\ \underset{\smile}{6}}{1\ \underset{\smile}{3}}$ eguale a 20, che, levato il rotto, et il meno, si haverà

. 1 . $\underset{\smile}{6}$. p . 20 . $\underset{\smile}{3}$. eguale a 8,

che, agguagliato, la cosa valerà R^3 $\underline{|R\ 108\ m\ .\ 10|}$, cioè R 3 m. 1, et tanto è la . *B* . *p* . , et per trovare la . *B* . *n* . partasi 2 cioè la superficie . *p* . *B* . *n* . per *R* 3 *m* . . 1, cioè la . *p* . *B* . ne viene *R* 3 . *p* . 1 . , et tanto è la . *B* . *n* . , et il medesimo la . *B* . *h* . ; et per sapere quanto è la . *h* . *p* . lato del cubo . *h* . *g* . *p* . , cavasi la . *p* . *B* . della . *B* . *h* . , resta 2, et tanto è la . *p* . *h* . , et tanto vale la cosa.

§ [33]. Dimostratione del partire per 1 $\underset{\smile}{1}$ più o vero meno numero (1).

Sia dato il cubo . *e* . *a* . *b* . *c* . , et che la linea . *e* . *a* . sia 1 $\underset{\smile}{1}$, et la . *a* . *b* . 1 $\underset{\smile}{2}$ eguale al parallelogrammo . *l* . *o* . ,

(1) Si tratta di dimostrare, con una costruzione geometrica, la proposizione

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

et sia la . *l* . *m* . 1, et la . *m* . *n* . 12 ⅓, et la . *n* . *o* . 11, la . *b* . *c* ., che è 1 ⅓ per essere pari a la . *e* . *a* . se gli aggiungerà la . *c* . *h* . tanto lunga, che fatto la . *o* . *p* ., che gli sia pari in tal modo, che la proportione della . *b* . *c* . a la . *c* . *h* . sia come la . *m* . *n* . a la . *n* . *p* ., et questo si troverà (nel modo, che si è mostrato nelle regole dell'agguagliare) detta . *c* . *h* . sarà 1 : poi facciasi la . *b* . *d* . pari a la . *b* . *c* ., et tirasi la parallela . *d* . *g* ., et si haverà il parallelogrammo . *a* . *g* . col parallelogrammo . *d* . *i* . al quale mancarà il quadrato . *s* . *f* . acciochè la . *b* . *h* . sia pari C. 176.

Questo teorema di algebra geometrica è una notevole estensione della prop. V. del Libro II degli Elementi di Euclide.

Nel manoscritto manca la figura. La esemplificazione numerica genera confusione, e gli evidenti errori di copia non consentono di seguire letteralmente la esposizione. Il senso è tuttavia chiaro, e può esprimersi come segue :

Sia

$$\overline{ab} = x^2, \quad \overline{bc} = \overline{bd} = x, \quad \overline{ch} = \overline{dk} = 1$$

onde,

$$\overline{ak} = x^2 - x + 1, \quad \text{rett. } af = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{rett. } ac = x^3, \quad \text{quad. } sf = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{quad. } dc = \text{rett. } eh, & \text{per essere entrambi eguali ad } x^2 \\ \text{rett. } di = \text{rett. } sh, & \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad x \end{array} \right.$$

onde

$$\text{rett. } kc = \text{rett. } eg$$

aggiungendo da una parte e dall'altra rett. *ai* + quad. *sf abbiamo*

$$\text{rett. } ac + \text{quad. } sf = \text{rett. } af$$

cioè

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

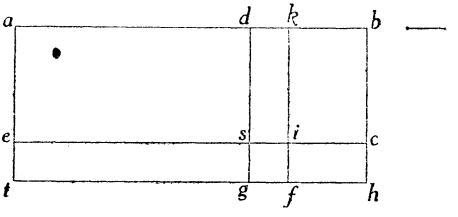
Naturalmente la stessa dimostrazione vale per provare la proposizione

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - yx + y^3).$$

La dimostrazione è ripetuta più innanzi (n. 69) per provare che

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}).$$

a la . *a* . *t* ., che aggiunto detto quadrato a ciascuna delle parti si haverà il parallelogrammo . *a* . *c* ., et il parallelogrammo . *f* . *s* ., che saranno 1 $\overset{3}{\smile}$ più 1 eguale al parallelogrammo . *f* . *a* .



essendo pari la . *r* . *p* . a la . *c* . *f* ., et la proportione dalla . *k* . *i* . a la . *i* . *s* . sarà come dalla . *m* . *n* . a la . *n* . *p* ., et la proportione della . *k* . *i* . a la . *m* . *n* . sarà, come da 1 a 12, però se si piglierà dodici volte la . *l* . *m* . cioè la . *u* . *m* . sarà eguale a la . *a* . *d* . più la . *b* . *h* ., et la . *a* . *d* . sarà 1 $\overset{2}{\smile}$ meno 1 $\overset{1}{\smile}$, et la . *d* . *k* . 1 ., che aggiunti insieme fanno 1 $\overset{2}{\smile}$ meno 1 $\overset{1}{\smile}$ più 1 eguale a la . *u* . *m* ., che sarà 12, che agguagliato la cosa valerà R $11\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{2}$, et tanto è la . *b* . *c* . cioè la valuta della cosa.

§ [34]. Del capitolo di cubo, et numero eguale a cose (1).

La dimostratione di questo Capitolo non si può fare se non con la dimostratione del passato col partire, come è

(1) Il Bombelli dice che il capitolo $x^3 + q = px$ (cubo e numero eguale a cose) si dimostra *col partire* (cioè col dividere), come si è visto nella passata. Ed infatti si può scrivere

$$x^3 = px - q$$

stato detto quando si è mostrato l'agguagliare; però parendomi, che tale dimostratione basti non starò a replicarlo essendo una cosa medesima.

---

ed anche

$$x^3 + y^3 = p\left(x + \frac{y^3 - q}{p}\right).$$

Perciò si deve determinare y in modo che sia

$$(1) \qquad \frac{y^3 - q}{p} = y, \quad \text{cioè } y^3 - q = py.$$

Trovami un numero cubo, del quale cavato quel nu. che è con li Tanti, lo restante sia tanto quanto è il lato di detto numero cubo moltiplicato pel numero delli Tanti (*L'Algebra* - pag. 303).

Trovato questo valore della y, l'equazione proposta si potrà scrivere

$$x^3 + y^3 = p(x + y)$$

cioè

$$(x + y)(x^2 - 2yx + y^2) = p(x + y)$$

e si scinderà nelle due

$$x + y = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0.$$

Ed è questa la regola del CARDANO, che permette di trovare tutte e tre le radici dell'equaz. cubica proposta.

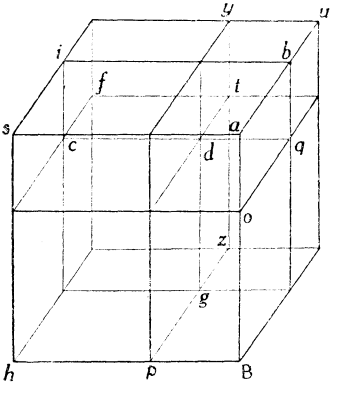
Osservisi che la equazione in y

$$y^3 = py + q$$

tratta di *cubo eguale a cose e numero*, caso già considerato, a proposito del quale il BOMBELLI nel suo testo a stampa dice: « quando sia pari o maggiore il quadrato del mezzo del numero del Cubato del terzo delli tanti..., s; agguaglia con la regola del *p.* di *m.* che a suo luogo ho dimostrata » (L'*Algebra* - pag. 320).

§ [35]. Dimostratione di cubi, et censi eguali a numero (1).

La dimostratione di questo Capitolo è dificile intenderla senza formare il cubo solido, et aggiungerli li parallelepipedi, che si diranno, pure mi sforzerò dichiararlo al meglio, che potrò, come ho fatto ne gli altri.



Sia il cubo . *h* . *g* . *p* . , et il corpo *H*, il quale sia 6 ⅔ eguale al corpo . *K* . , il quale sia 81.

Per fare la dimostratione allungasi la . *h* . *p* . sino in . *B* . , et . *g* . *p* . sino in . *z* . facendo la . *p* . *B* . , et . *g* . *z* . , 2 terza parte dei censi . *H* . : poi finiscasi il cubo . *u* . *h* . *s* . , che ciascuno suo lato sia pari a la . *h* . *B* . , il quale cubo sarà diviso in 8 pezzi, delli quali sarà uno il cubo . *h* . *g* . *p* . , et tre saranno tre parallelepipedi . *g* . *t* . *f*. , . *p* . *g* . *q* . , et . *d* . *s* . *i* . ,
C. *176 v.* che ciascuno da se sarà 2 ⅔ per essere la superficie . *p* . *g* . *d* . 1 ⅔ , . *p* . *B* . 2 . , però detti parallelepipedi saranno pari a li 6 ⅔ . *H* . ; vi resteranno quattro pezzi infrascritti, tre parallelepipedi pari

---

(1) L'equazione

$$x^3 + 3\overline{pB}x^2 = K$$

vien trasformata, con la posizione $y = x + \overline{pB}$ *nella*

$$y^3 = 3\overline{pB}^2 \cdot y + (K - 2\overline{pB}^3)$$

che rientra nel caso studiato al n. 31 (cubo eguale a cose e numero).

. *f* . *d* . *y* ., . *d* . *z* . *q* ., et . *o* . *t* . *b* ., che ciascuno da se sarà 4 $\underline{1}$, et il cubo . *u* . *b* . *t* ., che sarà 8, però se detti quattro pezzi si aggiungeranno a ciascuna delle parti si haverà il cubo . *u* . *h* . *s* ., il quale sarà 1 $\underline{3}$ più 6 $\underline{2}$ più 12 $\underline{1}$ più 8 eguale a 12 $\underline{1}$ più 88, che dato, che la linea . *h* . *B* . sia 1 $\underline{1}$ tutto il corpo . *u* . *h* . *s* . sarà 1 $\underline{3}$, et sarà uguale a 12 $\underline{1}$ più 88, et perchè ciascuna di dette 12 $\underline{1}$ era pari a la . *h* . *p* . hora la . *h* . *B* . è la cosa, che è 2 più lunga della . *h* . *p* . però dette 12 $\underline{1}$ saranno 24 più, che non erano prima però si cavarà detto 24, restarà

1 $\underline{3}$ eguale a 12 $\underline{1}$ più 64,

che agguagliato la cosa valerà 5, et tanto è la . *h* . *B* ., che levatone la . *p* . *b* ., che è 2 resta 3 per la . *h* . *p* ., che è la cosa di prima.

§ [36]. Dimostratione di cubo eguale a censo et numero (1).

Sia il cubo . *b* . *x* . *h* . eguale a li 6 $\underline{2}$. *G* ., et al corpo . *H* . il quale sia 128.

---

(1) La equazione

$$x^3 = 3\overline{bc}x^2 + H,$$

si trasforma, con la posizione $y = x - \overline{bc}$, nella

$$y^3 = 3\overline{bc}^2 y + (H + 2\overline{bc}^3).$$

Infatti:

parallpp. $bzg = \overline{bc} \cdot x^2$

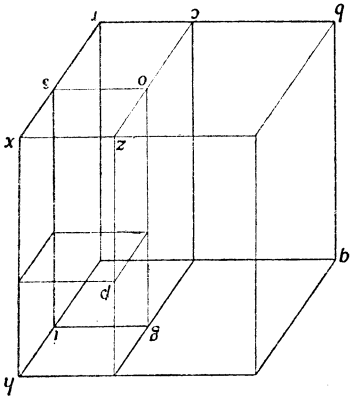
» $gcs = \overline{bc}(x - \overline{bc}) \cdot x = \overline{bc}x^2 - \overline{bc}^2 x$

» $pzs = \overline{bc}(x - \overline{bc})^2 = \overline{bc}x^2 - 2\overline{bc}^2 x + \overline{bc}^3$

in tutti:

$$3\overline{bc} \cdot x^2 - 3\overline{bc}^2 x + \overline{bc}^3.$$

Per fare la dimostratione si faranno tre tagli in detto cubo in questo modo. Facciasi la . *b* . *c* ., che sia 2, terzo de censi . *G* . et tagliasi il parallelepipedo . *b* . *z* . *g* . con la superficie parallela . *c* . *z* . *g* . il quale parallelepipedo sarà 2 ⌣2 : poi facciasi la . *c* . *o* . pari a la . *b* . *c* ., et tagliasi il parallelepipedo . *g* . *c* . *s* ., con la superficie parallela . *o* . *g* . *i* , il quale parallelepipedo sarà 2 ⌣2 meno 4 ⌣1 : poi facciasi la . *z* . *p* . pari a la . *b* . *c* ., et tagliasi il parallelepipedo . *p* . *z* . *s* . il quale sarà 2 ⌣2 meno 8 ⌣1 più 8, et tutti tre detti parallelepipedi saranno 6 ⌣2 meno 12 ⌣1 più 8, li quali si saranno levati dal cubo . *b* . *x* . *h* . però ancora si levaranno da li 6 ⌣2 . *G* . più il corpo . *H* . cioè 128, restarà 120 più 12 ⌣1 eguale al cubo . *p* . *h* . *i* ., et perchè la linea . *h* . *p* . è 2 meno della . *b* . *r* . le 12 ⌣1 valeranno 24 meno, però se gli aggiungerà 24, et si haverà



C. 177.

il cubo . *p* . *h* . *i* . eguale a 12 ⌣1 più 114,

che agguagliato la cosa valerà 6, et tanto è la . *p* . *h* . vero la . *r* . *c* ., che aggiuntoli la . *c* . *b* ., che è 2, fa 8, et tanto è la . *r* . *b* . cioè la valuta della cosa.

Tolti questi dal cubo $bhx = x^3$, rimane:

$$\text{cubo } gih = (x - \overline{bc})^3 = H + 3\overline{bc}^2 x - \overline{bc}^3$$
$$= H + 2\overline{bc}^3 + 3\overline{bc}^2 (x - \overline{bc}).$$

Fatto $y = x - \overline{bc}$, viene appunto:

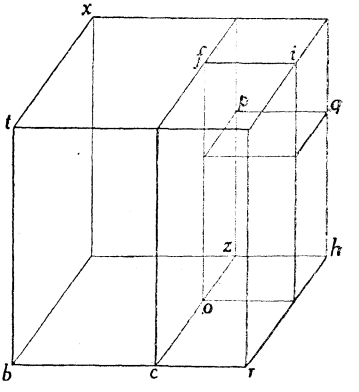
$$y^3 = 3\overline{bc}^2 y + H + 2\overline{bc}^3.$$

§ [37]. Dimostratione di cubo et numero eguale a censo (1).

La dimostratione di questo Capitolo è molto simile a quella del passato, come si vederà nella dimostratione.

Sia il cubo . *b* . *x* . *h* . et il corpo . *O* . , il quale sia 18, eguale alli 9 ⌣ . *D* .

Facciasi la . *b* . *c* . che sia 3 cioè il terzo dei censi, et tagliasi il parallelepipedo . *c* . . *z* . *t* . , il quale sarà 3 ⌣ : poi facciasi la . *c* . *o* . pari a la . *b* . . *c* . , et tagliasi il parallelepipedo . *o* . *r* . *f* . , che sarà 3 ⌣ meno 9 ⌣ : poi facciasi la . *z* . *p* . pari a la . *b* . *c* . , et tagliasi il parallelepipedo . *q* . . *z* . *p* . , che sarà 3 ⌣ meno 18 ⌣



---

(1)
$$x^3 + O = 3\overline{bc}\cdot x^2$$

$x = br$, *parllpp.* $czt = \overline{bc}\cdot x^2$

» $orf = \overline{bc}(x - \overline{bc})x = \overline{bc}x^2 - \overline{bc}^2 x$

» $qzp = \overline{bc}(x - \overline{bc})^2 = \overline{bc}x^2 - 2\overline{bc}^2 x + \overline{bc}^3$

in tutti:

$$3\overline{bc}x^2 - 3\overline{bc}^2 x + \overline{bc}^3$$

tolti dal cubo $bht = x^3$ ed aggiunto O, resta

$$(x - \overline{bc})^3 + O = 3\overline{bc}^2 x - \overline{bc}^3 = 3\overline{bc}^2(x - \overline{bc}) + 2\overline{bc}^3$$

fatto $x - \overline{bc} = y$, risulta

$$y^3 = 3\overline{bc}^2 y + (2\overline{bc}^3 - O).$$

più 27, che aggiunto con gl'altri due parallelepipedi saranno 9 ⌢ meno 27 ⌣ più 27, et questo si viene a levare del cubo . *b* . *x* . *h* ., et ne restarà il cubo . *p* , *f* . *i* . et il corpo . *O* ., che levato il medesimo a l'altra parte, che
C. 177 v. era 9 ⌢ . *D* . resterà 27 ⌣ meno 27, et levato il corpo . *O* . a ciascuna delle parti si haverà il cubo . *p* . *f* . *i* . eguale a 27 ⌣ meno 45, et perchè la linea del cubo . *p* . *h* . *i* . è 3 meno della linea cubo del . *b* . *x* . *h* ., però le 27 ⌣ valeranno 3 meno ciascuna da se, che non valevano prima, et le 27 ⌣ valeranno 81 meno, che non valevano prima, però quello, che gli si toglie nelle cose se gli da in numero; però si aggiunga 81 a 27 ⌣ meno 45, fa 27 ⌣ più 46, et questo è eguale al cubo . *p* . *f* . *i* , che agguagliato la cosa valerà *R* 24 più 1, et tanto è la linea . *p* . *q* . , et il medesimo la . *c* . *r* . che aggiuntoli la . *c* . *b* ., che è 3, fa *R* 24 più 4, et tanto è la . *b* . *r* . lato del cubo . *b* . *x* . *h* .

§ [38]. Dimostratione del capitolo di cubo, censi et cose eguale a numero (1).

Negli essempij dell' agguagliare di questo Capitolo, nel secondo libro si è mostrato, che si può trasmutare in cinque

---

(1) L'equazione cubica completa, qui proposta:

$$x^3 + 3Ax^2 + 3Cx = D,$$

ha, nel manoscritto di BOMBELLI, *coefficienti letterali, cui sono, nei vari casi, accompagnate determinazioni numeriche, ma che rimangono le stesse per tutti e cinque i casi considerati.* La trattazione è generale e comune a tutti, Può essere riassunta al modo che segue:

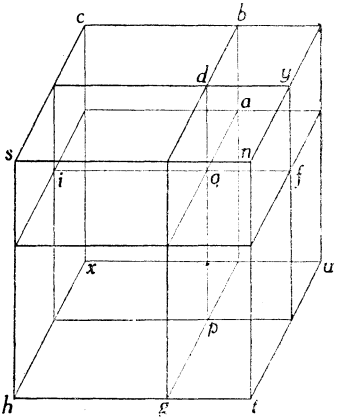
Fatto $\overline{hg} = x$, $\overline{gt} = A$, $y = x + A$, dall'esame della figura (ossia dalle formule che dà il cubo del binomio) e dalla proposta si ricava

$$y^3 = (D - 2A^3 + 3AC) + 3(A^2 - C)y$$

modi delli quali mostrerò la dimostratione di tutti pigliando li medesimi numeri.

Sia il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li 6 ⌣2 . *A* ., et le 12 ⌣1 . *C* . eguale al corpo . *D* . il quale sia 56.

Allungasi la . *h* . *g* . sino in . *t* . facendo la . *g* . *t* . 2 : poi facciasi con la . *h* . *t* . il cubo . *t* . *x* . *s* . al quale se gli aggiungerà li tre parallelepipedi . *g* . *t* . *f* . , . *i* . *s* . *d* . , et . *p* . . *x* . *q* . , che ciascuno di loro è 2 ⌣2 , et tutti tre insieme sono pari a li 6 ⌣2 . *A* ., et li tre parallelepipedi . *d* . *n* . *f* . *y* ., . *p* . *u* . *a* ., et . *d* . *c* . *q* . , che ciascuno di loro è 4 ⌣1 , et tutti tre insieme sono 12 ⌣1 , che sono pari a li 12 ⌣1 . *C* . però il cubo . *u* . *h* . *s* . meno il cubo . *a* . *b* . *d* . è eguale a 56 cioè il corpo . *D* ., che aggiunto a ciascuna delle parti il cubo . *a* . *b* . *d* ., il quale è 8 per essere ciascuno suo lato la *C. 178.*



---

onde:

1. Se $A^2 - C = 0$, si ha $y^3 = D + A^3$, che è della forma $y^3 = Q$.

2. Se $D - 2A^3 + 3AC = 0$, si ha $y^3 = 3(A^2 - C)y$ e si abbassa al 2° grado.

3. 4. Se $A^2 - C > 0$, si riduce ad una delle due forme

$$\begin{cases} y^3 = 3Py + a \\ y^3 + 3Py = a \end{cases}$$

5. Se $A^2 - C < 0$, si riduce alla forma

$$y^3 + Q = 3Py.$$

Il caso $A^2 - C < 0$, $D - 2A^3 + 3AC < 0$, non è considerato.

. *g* . *t* ., che è 2, si haverà

il cubo . *u* . *h* . *s* . eguale a 64,

che la cosa valerà 4 cioè la linea . *h* . *t* ., che trattone la . *g* . *t* ., che è 2, resta 2, et tanto è la . *g* . *h* .; et questo è quanto al primo essempio, et per non havere a fare più dimostratione mi servirò della medesima solo mutando i numeri.

§ [39]. Sia il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li 9 ⌣ . *A* ., et le 6 ⌣ . *C* . eguale al corpo . *D* ., il quale sia 36.

Che, essendo la . *g* . *t* . *3*, li tre parallelepipedi . *g* . *t* . *f* ., . *i* . *s* . *d* ., et . *p* . *x* . *q* . saranno 9 ⌣, che saranno pari a li 9 ⌣ . *A* ., et li tre parallelepipedi . *d* . *n* . *f* . *y* ., . *p* . *u* . *a* . et . *d* . *c* . *q* . saranno 27 ⌣, che è maggiore delle 16 ⌣, . *C* ., 21 ⌣, le quali bisogna aggiungerle al corpo . *D* . per dare egualmente, et si haverà il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li sei parallelepipedi detti uguali a 21 ⌣ più 36 per finire il cubo . *u* . *h* . *s* . vi manca il cubo . *a* . *b* . *d* ., che è 27 per essere ciascuno suo lato pari a la . *g* . *t* . però si aggiungerà 27 a ciascuna delle parti, et si haverà

il cubo . *u* . *h* . *s* . eguale a 21 ⌣ più 63,

et perchè il lato del cubo . *g* . *h* . *i* . è minore del lato del cubo . *u* . *h* . s ., 3, le 21 ⌣ valeranno 3 più per ciascuna, che non valeva la cosa . *g* . *h* ., et le 21 ⌣ valeranno 63, che tratto 63 di 21 ⌣ più 63, resta

21 ⌣ eguale al cubo . *u* . *h* . *s* .,

che agguagliato, la . *t* . *h* . sarà *R* 21, che trattone la . *g* . *t* ., che è 3 resta R 21 meno 3, et tanto è la . *g* . *h* .

§ [40]. Sia il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li $9\underline{2}$. *A* ., et le $30\underline{1}$. *C* . eguale al corpo . *D* . il quale sia 39.

Li tre parallelepipedi . *g* . *t* . *f* ., . *i* . *s* . *d* ., et . *p* . *x* . *q* . saranno $9\underline{2}$, come fu detto di sopra, et li altri tre saranno $27\underline{1}$, che sono minori $3\underline{1}$ delle $30\underline{1}$. *C* . però si levarà a *C. 178 v.* ciascuna delle parti $3\underline{1}$, et si haverà il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li sei parallelepipedi detti eguale a 39 meno $3\underline{1}$, et a finire tutto il cubo . *u* . *h* . *s* . manca il cubo . *a* . *b* . *d* ., che è 27, che, aggiunto a ciascuna delle parti, si haverà il cubo . *u* . *h* . *s* . eguale a 66 meno $3\underline{1}$; che, levato il meno, si haverà detto cubo più $3\underline{1}$ eguale a 66, et perchè dette $3\underline{1}$ vagliano più 3 che non valevano prima, che la . *h* . *t* . è 3 più della . *h* . *g* ., le $3\underline{1}$ valeranno 9 che aggiunto a 66 si haverà

il cubo . *u* . *h* . *s* . più $3\underline{1}$ eguale a 75,

che, agguagliato, la cosa valerà

$$R^3 \left| \underline{R\ 1407\ \tfrac{1}{4}\ \text{più}\ 37\ \tfrac{1}{2}} \right| \text{ meno } R^3 \left| \underline{R\ 1407\ \tfrac{1}{4}\ \text{meno}\ 37\ \tfrac{1}{2}} \right|,$$

et tanto è la . *h* . *t* ., che trattone la . *g* . *t* ., che è 3, resta

$$R^3 \left| \underline{R\ 1407\ \tfrac{1}{4}\ \text{più}\ 37\ \tfrac{1}{2}} \right| \text{ meno } R^3 \left| \underline{R\ 1407\ \tfrac{1}{4}\ \text{meno}\ 37\ \tfrac{1}{2}} \right|$$

meno 3.

§ [41]. Sia il cubo . *p* . *h* . *i* ., et li $6\underline{2}$. *A* ., et le $8\underline{1}$. *C* . eguale al corpo . *D* . il quale sia 48.

Facciasi la . *g* . *t* ., che sia 2, terzo de censi; li tre parallelepipedi maggiori saranno $6\underline{2}$, et li tre minori saranno $12\underline{1}$, et tutto il corpo . *u* . *h* . *s* . meno il cubo . *a* . *b* . *d* .; sarà $1\underline{3}$ più $6\underline{2}$ più $12\underline{1}$, che saranno più del cubo . *p* . *h* . *i* ., et

li 6 $\overset{2}{\smile}$. *A* . , et le 8 $\overset{1}{\smile}$. *C* . 4 $\overset{1}{\smile}$; però si aggiungerà a ciascuna delle parti 4 $\overset{1}{\smile}$, et il cubo . *a* . *b* . *d* . , che è 8, si haverà il cubo . *u* . *h* . *s* . eguale a 4 $\overset{1}{\smile}$ più 56, et perchè le 4 $\overset{1}{\smile}$ vagliano 8 più, che non valevano prima, per essere la . *t* . *h* . 2 . più della . *g* . *h* . , restarà

1 $\overset{3}{\smile}$ eguale a 4 $\overset{1}{\smile}$ più 48,

che agguagliato la cosa valerà 4, cioè la . *t* . *h* . , che trattone la . *t* . *g* . , che è 2, resta 2 per la . *g* . *h* .

§ [42]. Sia il cubo . *p* . *h* . *i* . , et li 9 $\overset{2}{\smile}$. *A* . , et le 3 $\overset{1}{\smile}$. *C* . eguale al corpo . *D* . il quale sia 18.

Allungasi la . *h* . *g* . sino in . *t* . facendo, che la . *g* . *t* . sia 3, terzo de censi, et facciasi il cubo . *u* . *h* . *s* . , li tre parallelepipedi maggiori saranno pari a li 9 $\overset{2}{\smile}$. *A* . , et li tre parallelepipedi minori saranno 27 $\overset{1}{\smile}$, che sono maggiori delle 3 $\overset{1}{\smile}$. *C* . , 24 $\overset{1}{\smile}$; però se si aggiungerà 24 $\overset{1}{\smile}$ a ciascuna delle parti, si haverà il cubo . *p* . *h* . *i* . , et li sei parallelepipedi detti eguale a 24 $\overset{1}{\smile}$ più 45, et perchè le 24 $\overset{1}{\smile}$ vagliono 72 più, che non valevano prima per le raggioni detti nelli capitoli passati, si cavarà 72 di 24 $\overset{1}{\smile}$ più 45 restarà

24 $\overset{1}{\smile}$ meno 27 eguale al cubo . *u* . *h* . *s* . ,

che agguagliato, et trovato la valuta della . *t* . *h* . se ne cavarà la . *t* . *g* . , che è 3, et restarà la valuta della . *g* . *h* .

Et chi intenderà bene la dimostratione di questo Capitolo intenderà ancora la dimostratione de gl' altri sei, che seguitano cioè di cubi, censi, cose et numero mesticati fra di loro ; però parendomi, che questo basti non ne dirò altro.

C. 179.

§ [43]. DIMOSTRATIONE DI CEN: CENSO EGUALE A COSE, ET NUMERO [1].

La dimostratione di questo Capitolo pare difficile; ma è più facile delle passate, ma è difficile nel scriverla, pure mi sforzerò di scriverla al meglio ch'io potrò.

---

[1] L'equazione proposta è

$$x^4 = tx + u.$$

Sulla figura

$$\overline{be} = \overline{bi} = x^2, \quad \overline{cd} = \overline{ab} = y$$

$$\text{quad. } if = (x^2 + y)^2 = x^4 + y^2 + 2x^2y$$

e, per la proposta,

$$(x^2 + y)^2 = tx + u + y^2 + 2x^2y.$$

Pongo

$$2x^2y = \overline{on}^2, \quad y^2 + u = \overline{op}^2,$$

con che

$$(x^2 + y)^2 = tx + \overline{on}^2 + \overline{op}^2,$$

e determino y in modo che i supplementi $ok = os = \overline{on} \cdot \overline{op}$ valgano insieme quanto il prodotto tx; ossia che

$$tx = 2\overline{on} \cdot \overline{op},$$

$$t^2x^2 = 4\overline{on}^2\,\overline{op}^2,$$

$$t^2x^2 = 8x^2y(y^2 + u)$$

$$t^2 = 8y^3 + 8uy,$$

$$y^3 + uy - \frac{t^2}{8} = 0.$$

Per i valori

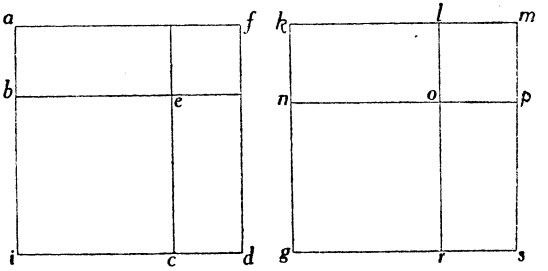
$$t = 16, \quad u = 12,$$

considerati dal BOMBELLI, si ha l'equazione

$$y^3 + 12y = 32,$$

Sia il cen: censo . *i* . *b* . *e* . *c* . eguale alle 16 ⊥ . *t* . et ai 12 . *u* .

Le linee . *i* . *b* . , et . *i* . *c* . ciascuna da sè sarà 1 ⊥, et se si allungherà la . *i* . *c* . sino in . *d* . facendo la . *c* . *d* . 2 (il



quale 2 mostrerò di sotto, come si trova) il suplemento . *e* . *d* . sarà 2 ⊥ per essere la . *c* . *e* . 1 ⊥, et il medesimo sarà il suplemento . *e* . *a* , et il quadrato . *e* . *f* . sarà 4, et il medio proportionale sarà uno de suplementi cioè . *e* . *d* . o vero . *e* . *a* . però se a le 16 ⊥ . *t* . , et al 12 . *u* . se gli aggiungerà il gnomone . *c* . *f* . *a* . *e* . , si haverà il quadrato . *i* . *f* . eguale al quadrato . *g* . *m* . facendo che il quadrato . *g* . *o* . sia pari a li due suplementi . *d* . *e* . , et . *e* . *a* . , et perchè il detto quadrato

---

che il BOMBELLI, come vedremo, scrive

$$2y^3 + 24y = 64,$$

questa è la *risolvente cubica di* FERRARI.

Per i valori di y radici di questa equazione i quadrati *if*, *gm*, risultano eguali e si ha

$$(x^2 + y)^2 = (on + op)^2 = \left(\sqrt{2x^2y} + \sqrt{y^2 + u}\right)^2.$$

Nell'esempio recato, essendosi trovato $y = 2$ ed $u = 12$, si ha

$$(x^2 + 2)^2 = (2x + 4)^2,$$
$$x^2 + 2 = 2x + 4.$$

è $4\overset{2}{\smile}$, la . *g* . *r* ., et la . *g* . *n* . saranno ciascuna di loro $2\overset{1}{\smile}$, et il quadrato . *o* . *m* . sarà 16 per essere pari al quadrato . *e* . *f* . et . *u* . ; la . *o* . *p* ., et la . *o* . *l* . saranno ciascuna di loro 4: hora bisogna vedere se li due suplementi . *s* . *o* . et . *o* . *k* . sono pari a le $16\overset{1}{\smile}$. *t* ., et perchè la . *o* . *l* . è 4, et la . *o* . *n* . $2\overset{1}{\smile}$ il suplemento . *o* . *k* . sarà $8\overset{1}{\smile}$, et il medesimo . *o* . s . , che sono pari a le $16\overset{1}{\smile}$. *t* . ; però il quadrato . *i* . *f* . sarà eguale al quadrato . *g* . *m* ., et la linea . *i* . *d* ., che è $1\overset{2}{\smile}$ più 2, sarà eguale a la . *g* . *s* ., che è $2\overset{1}{\smile}$ più 4, che agguagliato la cosa valerà *R* 3 più 1.

Et perchè fu posto la . *c* . *d* . essere 2 bisogna mostrare come si ha da trovare detta . *c* . *d* . facendo questa dimanda: Fammi la . *c* . *d* . in tal modo lunga, che de li due suplementi . *d* . *e* ., et . *e* . *a* . fattone il quadrato . *g* . *v* . , et del quadrato . *e* . *f* . et . *u* . fattone il quadrato . *o* . *m* . li due suplementi . *o* . *k* . , et . *o* . *s* . siano pari al numero . *t* . cioè a 16 numero delle cose, che posto che la . *c* . *d* . sia $1\overset{1}{\smile}$, li suplementi . *d* . *e* . , et . *e* . *a* . saranno ciascuno di loro $1\overset{1}{\smile}$, et il quadrato . *e* . *f* . sarà $1\overset{2}{\smile}$; il quadrato . *o* . *q* . sarà $2\overset{1}{\smile}$ per essere pari a li due suplementi . *d* . *e* ., et . *e* . *a* ., et la linea . *o* . *r* ., et . *o* . *n* . saranno *R* $2\overset{1}{\smile}$, il quadrato . *e* . *m* . sarà $1\overset{2}{\smile}$ più 12 per essere pari al quadrato . *e* . *f* . , et . *u* . , la linea . *o* . *p* ., et . *o* . *l* . sarà *R* $|\underline{1\overset{1}{\smile} \text{ più } 12}|$, et il suplemento . *o* . *k* . sarà *R* $|\underline{2\overset{3}{\smile} \text{ più } 24\overset{1}{\smile}}|$, et questo sarà eguale a 8 mezzo del . *t* . perchè . *o* . *s* . è l'altro mezzo, che levato la Radice legata, si haverà

$$2\overset{3}{\smile} \text{ più } 24\overset{1}{\smile} \text{ eguale a } 64,$$

che agguagliato la cosa valerà 2, et tanto è la . *c* . *d* ., et nel resto si procederà come si è detto di sopra.

§ [44]. Dimostratione di cen: censo, et cose eguale a numero.

La dimostratione di questo Capitolo è simile a la dimostratione del passato, et non vi è altro, che questa differenza, che la linea . *c* . *d* . è eguale a la . *r* . *s* . meno la . *r* . *g* . cioè

4 meno 2 $\underline{1}$ eguale a 1 $\underline{2}$ più 2,

che agguagliato la cosa valerà *R* 3 meno 1, però sopra questo non ne farò altra dimostratione (1).

§ [45]. Dimostratione di cen: censo, et numero eguale a cose.

Sia il cen: censo . *a* . *c* . *d* . , et il numero . *u* . , il quale sia 15, eguale a 112 $\underline{1}$. *t* .

Questa dimostratione non è differente da la prima se non in questo, che il quadrato numero . *u* . si aggiungeva con il quadrato . *e* . *f* . , et in questo si cava. Però posto che la . *d* . *c* . sia 1 $\underline{1}$, li due suplementi . *e* . *d* . , et . *a* . *e* . saranno ciascuno di loro 1 $\underline{1}$, che fatto il quadrato . *o* . *g* . , che sia 2 $\underline{1}$, cioè pari a li detti due suplementi, la linea . *o* . *r* . , et . *o* . *n* . ciascuno di loro sarà R 2 $\underline{1}$, et il quadrato . *e* . *f* . sarà 1 $\underline{2}$, che trattone il numero . *u* . resta 1 $\underline{2}$ meno 15, che fatto il quadrato . *o* . *m* . , che gli sia pari, le linee . *o* . *p* . , et . *o* . *l* . ciascuna di loro sarà *R* $|\underline{1\,\underline{2} \text{ meno } 15}|$, che molti-

---

(1) Pel cambiamento di t in $-t$, la risolvente rimane la medesima e (nel caso considerato) la proposta si trasforma nella

$$(x^2 + 2)^2 = (4 - 2x)^2.$$

plicato la . *r* . *o* . via la . *o* . *p* . , fa *R* $\underline{|2\frac{3}{}\text{ meno } 15\frac{1}{}|}$ per il suplemento . *r* . *p* . che sarà eguale a il mezzo di 56 cioè della superficie . *t* . .

Che agguagliato la cosa valerà 8, et tanto sarà la . *d* . *c* . , et li due suplementi . *e* . *d* . , et . *a* . *e* . saranno $16\frac{2}{}$, il quadrato . *o* . *g* . sarà pure $16\frac{2}{}$ per essere pari a detti due suplementi, la . *o* . *r* . , et . *o* . *n* . ciascuna di loro sarà $4\frac{1}{}$; il quadrato . *e* . *f* . sarà 64 per essere la . *b* . *a* . pari a la . *c* . *d* . , che trattone . *u* . resta 49, et tanto sarà il quadrato . *o* . *m* . , et la linea . *o* . *l* . sarà 7, et il medesimo sarà la . *p* . *o* . , et si haverà la . *i* . *d* . , che è $1\frac{2}{}$ più 8, eguale a la . *s* . *g* . , che è $4\frac{1}{}$ più 7, che agguagliato la cosa valerà 2 più *R* 3.

§ [46]. Dimostratione di cen: censo, et cubo eguale a numero (1).

Sia il cen: censo . *a* . *b* . *e* . *f* . et li $4\frac{3}{}$. *s* . eguale a la superficie . *r* . la quale sia 21.

---

(1) L'equazione proposta è $x^4 + 2sx^3 = r$. Sulla figura:

$$\overline{ab} = \overline{ae} = x^2, \quad \overline{bc} = \overline{ei} = sx, \quad \overline{cd} = \overline{ni} = y$$

$$\text{quad. } aq = (x^2 + sx - y)^2, \text{ quad. } af = x^4, \text{ quad. } lq = y^2,$$

$$\text{rett. } cf = \text{rett. } fi = sx^3, \text{ quad. } fl = s^2x^2, \text{ rett. } dg = \text{rett. } io = x^2y,$$

$$\overline{ac}^2 = (x^2 + sx)^2 = x^4 + 2sx^3 + s^2x^2 = r + s^2x^2$$

$$\overline{ad}^2 = (\overline{ac} - \overline{cd})^2 = (\overline{ac} - y)^2 = x^2(s^2 - 2y) + y^2 + r - 2s\,xy.$$

Per far sì che il secondo membro sia quadrato, occorre determinarne y in modo che

$$s^2y^2 = (s^2 - 2y)(y^2 + r)$$

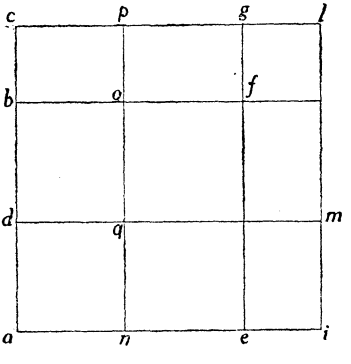
la risolvente cubica è dunque:

$$2y^3 + 2ry = rs^2.$$

Le linee . *b* . *f* ., et . *f* . *e* . saranno 1 $\underline{2}$ ciascuna di loro, che fatto che la . *b* . *c* ., et la . *e* . *i* . ciascuna da se sia 2 $\underline{1}$, li due suplementi . *f* . *c* ., et . *f* . *i* . saranno 4 $\underline{3}$, perchè a moltiplicare la . *c* . *b* . via la . *b* . *f* ., fa 2 $\underline{3}$; sichè detti due suplementi saranno pari a la superficie . *f* .; però il gnomone . *f* . *c* . *a* . *i* . sarà eguale a la superficie . *r* . cioè a 21 ; et per finire il quadrato . *a* . *l* . vi manca il quadrato . *f* . *l* ., il quale sarà 4 $\underline{2}$, per essere la . *f* . *g* . 2 $\underline{1}$, la quale è pari a la . *b* . *c* .; però si aggiungerà a ciascuna delle parti il quadrato . *f* . *l* ., et si haverà

il quadrato . *a* . *l* . eguale a li 4 $\underline{2}$. *s* . più 21 . *r* .,

et se si taglierà della . *a* . *c* . la . *c* . *d* ., et della . *a* . *i* . la . *i* . *n* ., facendo la . *i* . *n* . pari a la . *c* . *d* ., et fattone il quadrato . *a* . *q* ., se la . *c* . *d* . sarà numero il suplemento . *d* . *g* . sarà censi, et sarà meno, perchè la . *c* . *g* . è 1 $\underline{2}$, et il medesimo sarà il suplemento . *i* . *o* . il suplemento . *g* . *m* ., et . *o* . *l* . saranno cose, et saranno meno, perchè la . *l* . *m* ., et la . *l* . *p* . è numero, per essere pari a la . *c* . *d* ., et la . *g* . *l* . è 2 $\underline{1}$ per essere pari a la . *e* . *i* ., il quadrato . *l* . *q* . sarà numero, et sarà più per le medesime raggioni dette. Però di ciascuna delle parti si caverà li due suplementi . *e* . *m* ., et . *l* . *m* ., et se gli aggiungerà il quadrato . *l* . *q* ., li due suplementi . *d* . *g* ., et . *i* . *o* . essendo censi si haveranno a cavare delli 4 $\underline{2}$. *s* ., et il quadrato . *l* . *q* . si haverà a aggiungere con la superficie . *r* . per essere l'uno et l'altro numero; si che fatto il quadrato . *y* . *h* . pari al resto di quanto è maggiore li 4 $\underline{2}$. *s* . de li suplementi . *d* . *g* ., et . *i* . *o* .,



C. 180 v.

et il quadrato . *k* . *h* . pari al quadrato . *l* . *g* . , et a la superficie . *r* . , che l'uno, et l'altro è numero, li due suplementi . *u* . *k* . , et . *h* . *a* . saranno cose, et hanno da essere pari a li due suplementi . *g* . *m* . , et . *l* . *o* . acciochè il quadrato . *a* . *g* . sia pari al quadrato . *y* . *h* . , perchè il gnomone . *c* . *f* . *i* . *a* . è pari a la superficie . *r* . , et il quadrato . *k* . *h* . è pari alla superficie . *r* . , et al quadrato . *l* . *g* . però detto gnomone col quadrato . *l* . *g* . è pari al quadrato . *k* . *h* . , et li suplementi . *a* . *g* . , et . *i* . *o* . cavati dal quadrato . *f* . *l* . il resto è pari al quadrato . *y* . *k* . , et se li suplementi . *g* . *m* . , et . *l* . *o* . saranno pari a li due suplementi . *k* . *u* . , et . *k* . *a* . tutto il quadrato . *a* . *g* . sarà pari al quadrato . *y* . *h* . , et la linea . *n* . *g* . sarà pari o vero eguale a la . *y* . *a* . .

Et per trovare quanto ha da essere la . *c* . *d* . si farà la positione. Pongasi, che sia $1\underline{1}$ li due suplementi . *d* . *g* . , et . *i* . *o* . saranno $2\underline{1}$, che cavata della . *s* . , che è 4 fanno 4 meno $2\underline{1}$ et tanto è il quadrato . *y* . *k* . ; il quadrato . *l* . *g* . sarà $1\underline{2}$, che aggiunto con la . *r* . cioè 21, fa $1\underline{2}$ più 21, et tanto è il quadrato . *k* . *h* . . La . *A* . *k* . sarà $R\,|\underline{21 \text{ più } 1\underline{2}}|$, et la . *k* . *z* . , sarà $R\,|\underline{4 \text{ meno } 4\underline{1}}|$, che moltiplicato l'una via l'altra fanno $R\,|\underline{84 \text{ più } 4\underline{2} \text{ meno } 42\underline{1} \text{ meno } 2\underline{3}}|$, et tanto è il suplemento . *k* . *a* . , il quale ha da essere pari al suplemento . *g* . *m* . , che è $2\underline{1}$, che levato la Radice legata si haverà

$$4\underline{2} \text{ eguale a } 84 \text{ più } 4\underline{2} \text{ meno } 42\underline{1} \text{ meno } 2\underline{3},$$

che levato il meno, et ridutto a $1\underline{3}$, et levato li $4\underline{2}$ a ciascuna delle parti si haverà

$$1\underline{3} \text{ più } 21\underline{1} \text{ eguale a } 42,$$

che agguagliato la cosa valerà R^3 49 meno R^3 7, et tanto è la . *c* . *d* . o vero la . *p* . *g* . ;

tutta la . *n* . *g* . sarà $1\underline{2}$ più $2\underline{1}$ più R^3 7 meno R^3 49;
il quadrato . *l* . *g* . sarà R^3 2401 più R^3 49 meno 14,

che aggiunto con la . *r* ., che è 21, fa R^3 2401 più R^3 49 più 7, et tanto è il quadrato . *k* . *h* . .

La . *z* . *a* . sarà R |R^3 2401 più R^3 49 più 7| meno la . *z* . *y* . che è R |4 meno 2 $\underline{1}$| cioè

$$R\ |4\underline{1} \text{ più } R^3\ 56\underline{1} \text{ meno } R^3\ 392\underline{1}|,$$

et nel resto si procederà, come si è mostrato nel secondo, et si haverà la valuta della cosa.

Et chi intenderà bene questa dimostratione potrà formare da se l'altre due di cen: censo eguale a cubo, et numero; et di cen: censo, et numero eguale a cubo, però sopra a questo non mi estenderò più oltre.

C.181. § [47]. DIMOSTRATIONE DEL CAPITOLO DI CEN: CENSO, EGUALE A CENSO, COSE ET NUMERO (1).

Sia il cen: censo . *d* . *g* . *h* . *e* . eguale a li $7\underline{2}$. *k* . . et alle $24\underline{1}$. *l* ., et a 15 . *m* . .

---

(1) L'equazione proposta è:

$$x^4 = kx^2 + 2lx + m,$$

Sulla figura $\overline{gd} = x^2$, $hi = y$:

quad. $ge = x^4$, quad. $ec = y^2$, rett. ae = rett. $ei = yx^2$, quad. $gc = (x^2 + y)^2$.

Per la proposta,

$$(x^2 + y)^2 = (k + 2y)x^2 + 2lx + (m + y^2).$$

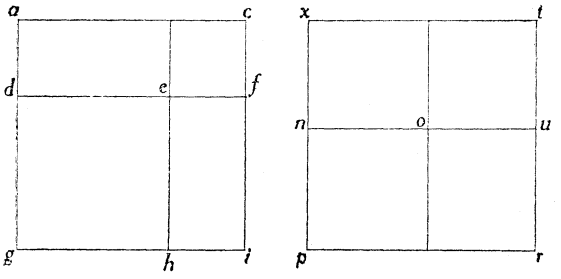
Fatto

$$x^2(k + 2y) = \overline{on}^2$$
$$m + y^2 = \overline{ou}^2,$$

occorrerà che . $\overline{on}$. $\overline{ou} = lx$, cioè che

$$l^2 = (k + 2y)(m + y^2).$$

Se si allungherà la . *g* . *h* . sino in . *i* ., et la . *g* . *d* . sino in . *a* ., facendo la . *d* . *a* . pari a la . *h* . *i* ., se detta



. *h* . *i* . sarà numero, i suplementi . *i* . *e* ., et . *e* . *a* . saranno censi, et il quadrato . *e* . *c* . sarà numero per essere . *e* . *f* . numero, perchè è pari a la . *h* . *i* .; però se si aggiungeranno li due suplementi a li $7\underline{2}$. *k* ., et si faccia il quadrato . *n* . *o* . *p* ., et del quadrato . *e* . *c* . et la superficie . *m* ., il quadrato . *o* . *t* . per essere l'uno et l'altro numero, li due suplementi . *o* . *r* ., et . *o* . *x* . hanno da essere pari a la $24\underline{1}$. *l* ., che essendo pari, si haverà il quadrato . *g* . *c* . pari al quadrato . *p* . *t* ., et la linea . *g* . *i* . a la . *p* . *x* ..

Et per trovare quanto ha da essere la . *h* . *i* . facciasi in questo modo. Pongasi, che sia $1\underline{1}$ di numero li suplementi . *i* . *e* ., et . *e* . *a* . saranno in tutti $2\underline{1}$ che aggiunto con . *k* . che è 7, fa 7 più $2\underline{1}$, et tanto è il quadrato . *p* . *o* ., et il quadrato . *e* . *c* . sarà $1\underline{2}$, che aggiunto con . *m* ., fa 15 più $1\underline{2}$, et tanto è il quadrato . *o* . *t* .; la linea . *o* . *u* . sarà $R\,|\underline{1\underline{2} \text{ più } 15}|$. et la . *o* . *n* . sarà $R\,|\underline{7 \text{ più } 2\underline{1}}|$; il suplemento . *o* . *r* . o vero . *o* . *x* . sarà

$$R\,|\underline{105 \text{ più } 30\underline{1} \text{ più } 7\underline{2} \text{ più } 2\underline{3}}|,$$

et questo è eguale a 12, mezzo della . *l* ., che levato la

Radice legata, et ridutto a minore agguagliatione si haverà

$$1^{\underline{3}} \text{ più } 3\frac{1}{2}^{\underline{2}} \text{ più } 15^{\underline{1}} \text{ eguale a } 19\frac{1}{2},$$

che agguagliato la cosa valerà 1, et tanto è la . *h* . *i* ., li suplementi . *e* . *i* ., et . *e* . *a* . saranno $2^{\underline{3}}$, per essere la . *e* . *h* ., et la . *e* . *d* . ciascuna di loro $1^{\underline{2}}$, che aggiunto con la . *k* ,. che è $7^{\underline{2}}$, fa $9^{\underline{2}}$, et tanto è il quadrato . *p* . *o* ., la linea . *p* . *g* . sarà $3^{\underline{2}}$ il quadrato . *e* . *c* . sarà 1, che aggiunto con . *m* ., fa 16, et tanto è la . *o* . *t* . la linea . *o* . *u* . sarà 4 et li suplementi . *o* . *x* ., et . *o* . *r* . saranno $24^{\underline{1}}$, che è pari a le $24^{\underline{1}}$. *l* .; però il quadrato . *p* . *t* . sarà uguale al quadrato . *g* . *c* . perchè il quadrato . *g* . *e* . è pari a le tre superficie . *k* ., . *l* ., . *m* ., et il quadrato . *p* . *t* . è pari a dette tre superficie, et
C. 181 v. al gnomone . *i* . *e* . *a* . *c* ., perchè li due suplementi . *i* . *e* ., et . *e* . *a* ., et la superficie . *k* . sono pari al quadrato . *p* . *o* .; il quadrato . *e* . *c* ., et la superficie . *m* . sono pari al quadrato . *o* . *t* ., et li due suplementi . *o* . *x* ., et . *o* . *r* . sono pari a la superficie . *l* . però essendo pari il quadrato . *g* . *c* . al quadrato . *p* . *t* .; la linea . *g* . *i* . sarà pari a la linea . *p* . *x* ., et la . *g* . *i* ., che è composto della . *g* . *h* ., et . *h* . *i* . è $1^{\underline{2}}$ più 1, et la . *p* . *x* ., che è composto della . *p* . *q* ., et . *q* . *x* ., sarà $1^{\underline{3}}$ più 4, et si haverà

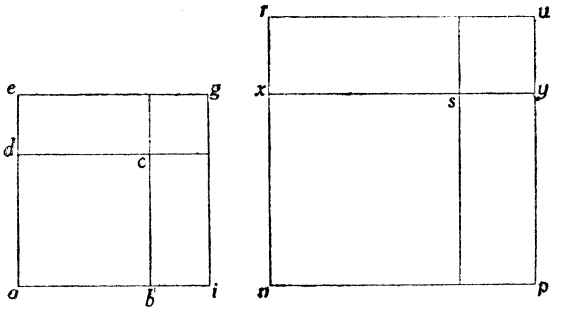
$$1^{\underline{2}} \text{ più } 1 \text{ eguale a } 1^{\underline{3}} \text{ più } 4,$$

che agguagliato la cosa valerà $R\ 5\frac{1}{4}$ più $1\frac{1}{2}$.

§ [48]. Dimostratione del capitolo di cen: censo et cose eguale a censo et numero (1).

Sia il cen: censo . *a* . *b* . *c* . *d* ., et le 40 $\underline{1}$. *k* . eguale a 10 $\underline{2}$. *m* ., et a 16 . *l* .

Questa dimostratione non è differente dalla passata se non che li due suplementi . *r* . *s* ., et . *s* . *p* . sono meno, però pongasi



la . *b* . *i* . essere 1 $\underline{1}$ li suplementi . *i* . *c* ., et . *c* . *e* . saranno 2 $\underline{1}$, che aggiunte con 10 cioè la superficie . *m* ., et fattone il quadrato . *n* . *s* ., detto quadrato sarà 10 più 2 $\underline{1}$; il quadrato . *c* . *g* . sarà 1 $\underline{2}$ che aggiunto con la . *l* ., et fattone il quadrato . *s* . *u* . detto quadrato sarà 1 $\underline{2}$ più 16, la linea . *s* . *y* . sarà *R* |1 $\underline{2}$ più 16|

(1) L' equazione proposta è $x^4 + 2kx = mx^2 + l$.

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (m + 2y)x^2 - 2kx + (l + y^2).$$

D' onde, al solito modo, la risolvente cubica.

Notevole è il simbolismo algebrico, che in questo manoscritto (della metà del secolo XVI) si evolve gradatamente verso una rappresentazione puramente letterale. Le determinazioni numeriche, poste accanto ai coefficienti letterali (k, l, m) servono solo a maggior intelligenza dei lettori.

et la . *s* . *x* . sarà *R* $\underline{|10 + 2\underset{\smile}{1}|}$; il suplemento . *s* . *p* . sarà

R $\underline{|2\underset{\smile}{3}}$ più $10\underset{\smile}{2}$ più $\underline{32\underset{\smile}{1}}$ p. $\underline{160|}$ eguale a 20

mezzo della superficie . *k* ., che agguagliato la cosa valerà 3, et tanto è la . *b* . *i* . ; li due suplementi . *i* . *c* . et . *c* . *e* . saranno $6\underset{\smile}{2}$, che agguagliato con la superficie . *m* ., fa $16\underset{\smile}{2}$, et tanto è il quadrato . *n* . *s* ., la linea . *n* . *x* . sarà $4\underset{\smile}{1}$ il quadrato . *c* . *g* . sarà 9, che aggiunto con la superficie . *l* ., fa 25, et tanto è il quadrato . *s* . *u* ., la linea . *s* . *y* . o vero . *o* . *p* . sarà 5, et la . *p* . *n* . sarà 5 meno $4\underset{\smile}{1}$, et la . *a* . *i* . sarà $1\underset{\smile}{2}$ più 3, et una sarà eguale a l'altra, che agguagliato la cosa valerà *R* 6 meno 2.

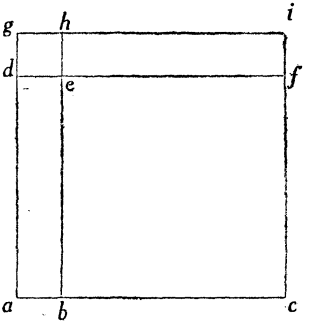
Le carte 182, 182 v, sono bianche.

[CAP. II.]

[RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEGLI IRRAZIONALI]

§ [49]. DIMOSTRATIONE DEL SOMMARE DI RADICI. *C. 183.*

Nel sommar de Radici si sono date tre regole: la prima fu moltiplicare l'una via l'altra et del produtto pigliarne il creatore, et quello duplarlo, et aggiungerlo col quadrato di tutte due le Radici, et della somma pigliarne il creatore (1). Per dimostrare dove nasca simil regola; sia la linea . *g* . *h* . *R* 2, et . *h* . *i* . *R* 32, et sopra tutte due le linee aggiunte insieme cioè . *g* . *i* . si faccia il quadrato . *a* . *c* . *g* . *i* . poi dal punto . *h* . si tiri la . *h* . *b* . equidistante a la . *a* . *g* ., et dal punto . *d* . si tiri la . *d* . *f* . parallela a la . *g* . *i* ., et sia . *d* . *g* . pari a la . *g* . *h* .. Il parallelogrammo . *d* . *g* . *h* . *e* . sarà quadrato, per essere . *d* . *g* . et . *g* . *h* . *R* 2, che la superficie di detto quadrato sarà 2, et il parallelogrammo . *h* . *i* . *e* . *f* .

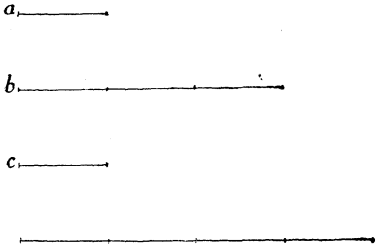


(1) Si applica la formula: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ la quale è utile quando il prodotto $\sqrt{ab}$ è razionale.

sarà composto del' . *h* . *i* . , che è *R* 32, et di . *e* . *h* . , che è *R* 2: adunque la sua superficie sarà 8 perchè a moltiplicare *R* 32 via *R* 2 fa *R* 64, che il suo creatore è 8. Et il parallelogrammo . *a* . *b* . *d* . *e* . per la 4ª del secondo sarà pure 8, per esser pari al parallelogrammo . *h* . *i* . *e* . *f* . ; et il parallelogrammo . *b* . *c* . *e* . *f* . sarà quadrato, et . *e* . *f* . sarà *R* 32, et . *b* . *e* . sarà pure *R* 32, et la sua superficie sarà 32.

Hora habbiamo tutto 'l quadrato . *a* . *c* . *g* . *i* . diviso in quattro superficie tutte rationali: però aggiungasi tutte insieme cioè 32, 8, 8, et 2 fanno 50, et tanto è la superficie . *a* . *g* . *c* . *i* . : però la . *g* . *i* . , et . *a* . *g* . saranno *R* 50, che moltiplicate l'una via l'altra fanno 50.

§ [50]. La seconda regola dice, che si parta la maggiore per la minore, et che de lo avvenimento se ne piglia il creatore, et poi per regola se gli aggiunga 1, et la somma si riduce a radice, et si moltiplica via la minore; et il produtto è la somma (1).



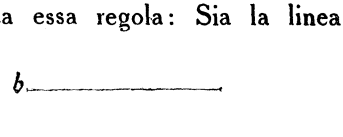
Et per dimostrare dove nasca simile operatione. Sia la linea . *a* . *R* 2, et la linea . *b* . *R* 18 che partito la maggiore per la minore, ne viene *R* 9, che 'l suo creatore è 3: Hor dico, se si haverà una misura o linea lunga *R* 2, come è la linea . *c* . , che misurerà una volta la linea . *a* . , et tre la linea . *b* . : però se saranno insieme saranno

(1) Si applica la formula: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a}\left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, la quale è utile quando il rapporto $\sqrt{\frac{b}{a}}$ è razionale.

misurate quattro volte da la detta linea . *c* . però moltiplicasi la linea . c . per 4 farà *R* 32, che tanto è la somma.

§ [51]. La terza regola dice, che si partano tutte due le *R*, che s'hanno a sommare per una Radice, che ne vengano due Radici che habbiano creatore; et che li creatori si aggiungano insieme, et la somma si riduca a *R*, et si moltiplica via il partitore (1). C. 183 v.

Et per dimostrare dove nasca essa regola: Sia la linea . *b* . radice 18 et la linea . *c* . *R* 50, et la Radice che parte ciascuna di loro sia *R* 2, la quale sia la linea . *d* ., che si vede, che misura la linea . *b* . tre volte, et la linea . *c* . cinque, però la linea . *c* ., et la linea . *b* . sono quanto è otto volte la linea . *d* . sarà *R* 128: adunque la linea . *c* . et . *b* . sono *R* 128 perchè sono otto volte la linea . *d* .



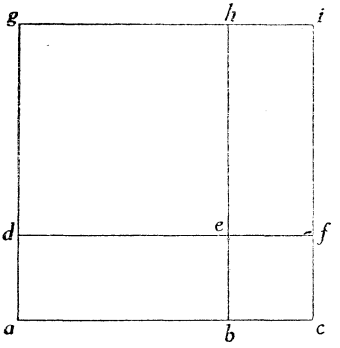
§ [52]. Dimostratione del sotrare di Radici.

La prima regola del sottrare di Radici dice, che si moltiplica l'una via l'altra, et del produtto se ne piglia il creatore, et si dupla, et si cava del quadrato di tutte due le radici aggiunte insieme, et il restante si è l'avanzo che resta del sottrare.

Et per dimostrare dove nasca: sia la linea . *g* . *i* . *R* 18 de la quale se n'habbia da cavare la linea . *m* . sia in detta

(1) Si applica la formula: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

linea . *g* . *i* . segnato il punto . *h* . in tal modo che . *g* . *h* . sia pari a la linea . *m* . et per sapere quanto sia il resto della . *h* . *i* . facciasi sopra la . *g* . *i* . il quadrato . *a* . *c* . *g* . *i* . ; et poi dal punto . *h* . si tiri la . *h* . *b* . parallela a la . *a* . *g* . , et in essa . *a* . *g* . si faccia il punto . *d* . in tal modo, che . *d* . *g* . sia pari a la . *g* . *h* . , et da esso punto . *d* . si tiri la . *d* . *f* . parallela a la . *g* . *i* . Et per la 4ª del secondo il parallelogrammo . *b* . *c* . *e* . *f* . sarà quadrato, et sarà composto de la linea . *h* . *i* . restante della . *g* . *i* . ; Et per trovare quanto è detto quadrato, si sa per la notitia de la . *g* . *i* . la quale è *R* 18, che 'l quadrato . *a* . *c* . *g* . *i* . è 18 di superficie: però se di esso si cava il gnomone . *b* . *g* . *f* . restarà il quadrato . *b* . *c* . *e* . *f* . : et per sapere quanto è detto gnomone: si sa che il parallelogrammo . *a* . *b* . *g* . *h* . è 6 perchè la linea . *a* . *g* . è *R* 18, et la linea . *a* . *b* . è *R* 2, che moltiplicato l'una via l'altra, fa *R* 36, che il creatore è 6; et così il parallelogrammo . *d* . *f* . *g* . *i* . è pur 6 per essere composto de le medesime linee: Ma per
C. *184*. sapere quanto è solo il parallelogrammo . *e* . *f* . *h* . *i* . si ha da cavare il quadrato . *d* . *e* . *g* . *h* . , che è 2; perchè è composto de la linea . *g* . *h* . che è *R* 2. Adunque tutto 'l gnomone . *b* . *g* . *f* . è 10, che tratto di 18 resta 8, et tanto è la linea . *h* . *i* .



§ [53]. La seconda regola dice come nel sommare; ma l'uno, che al sommare si aggiunge, al sottrare si cava, et il restante si moltiplica via la minore et il produtto è il resto di dette due Radici.

Et per dimostrare dove procede tal regola. Sia la linea

. *a* . *R* 3, et la linea . *b* . *d* . *R* 75, et che si habbia da cavare la minore della maggiore: partasi la maggiore per la minore ne viene *R* 25, che 'l suo creatore è 5 adunque diremo se si havesse una misura, lunga *R* 3 misurerebbe la . *a* . una volta, et la . *b* . *d* . cinque volte et se de la . *b* . *d* . se ne levarà la . *d* . *e* . pari a la linea . *a* . il resto . *e* . *b* . sarà misurato da la . *e* . *d* . quattro volte: però se si moltiplica la . *e* . *d* . per 4, fa *R* 48, et tanto è la . *e* . *b* . .

§ [54]. L'altro modo dice, che si trovi un partitore comune, come nel sommare, ma dove li creatori si sommano, in questo si cavano, et il resto si moltiplica via detto, come partitore.

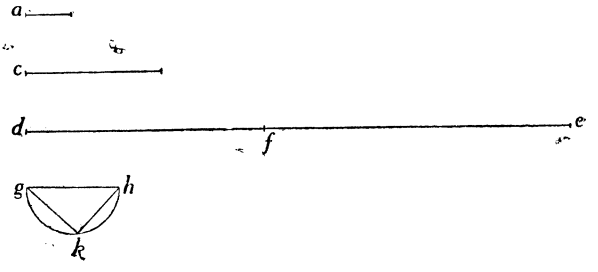
Et per dimostrare dove nasca. Sia la linea . *a* . *c* . *R* 48, et la linea . *d* . *R* 12, et sia il comune partitore la . *b* . , et sia *R* 3, che partito . *a* . *c* . per *b* ne viene *R* 16, che il creatore è 4, adunque la . *b* . misura quattro volte la . *a* . *c* . : poi partasi . *d* . per *b* ne viene *R* 4, che 'l creatore è 2, et tante volte misura la linea . *b* . la linea . *d* . : però se si taglierà de la . *a* . *c* . , che è quattro misure, la . *d* . , che è 2 restarà . *e* . *d* . che è due misure: perchè pongo che la . *a* . *e* . sia pari a la . *d* . , et . *e* . *c* . essendo due misure, cioè due volte quanto è la . *b* . verrà ad essere *R* 12, che è il doppio de la linea . *b* .

§ [55]. Dimostratione del primo Binomio (1).

Sia la linea . *a* . 12, et la la linea . *c* . 36, et la linea . *d* . *e* . 144, che l'uno et l'altro è numero quadrato, et sia divisa la . *d* . *e* .

(1) Il PRIMO BINOMIO è definito dal BOMBELLI (*Algebra*, pag. 76) come: *un composto di un numero e di una* R. q. *in cui il quadrato del numero ecceda il quadrato della* R. q. *di un numero quadrato.* Cioè una espressione

in due parti in punto . *f* . in tal modo, che . *f* . *e* . sia numero quadrato, et . *d* . *f* . numero non quadrato et sia la . *f* . *e* . 81, et la . *d* . *f* . 63: poi tirasi la linea . *g* . *h* . tanto lunga, che sia



la proportione del quadrato della linea . *a* . al quadrato de la
C.184v. linea . *g* . *h* . si come è la linea . *c* . a la linea . *d* . *e* ., che detta linea . *g* . *h* . sarà 24, che 'l suo quadrato è 576, et il quadrato . *a* . *c* . è 144, che la proportione da l'uno a l'altro è quadrupla, et così la proportione della linea . *c* . a la linea . *d* . *e* .; et sopra la linea . *g* . *h* . si faccia il semicirculo . *g* . *k* . *h* . : poi sia tirata la linea . *g* . *k* . talmente lunga, che la proportione del quadrato de la . *g* . *h* . al quadrato della . *g* . *k* . sia come è la . *d* . *e* . a la . *f* . *e* ., che sarà 18, et la linea . *k* . *h* . sarà *R* 252, perchè l'angolo . *g* . *k* . *h* . è retto, per la 31 del terzo. Dico adunque, che la linea . *g* . *h* . che è 24 accompagnata con la linea . *k* . *h* ., che è *R* 252 essere il primo Binomio, che sarà 24 *più* *R* 252, che a cavare il quadrato de la minore,

---

della forma $A + \sqrt{B}$ nella quale $A^2 - B$ è numero quadrato, come $3 + \sqrt{5}$, dove $3^2 - 5 = 4$ è quadrato.

Per formare un primo Binomio, il BOMBELLI alla pag. 102 dà la seguente regola pratica: « *piglisi un numero quadrato a beneplacito, del quale se ne cavi un altro numero quadrato, ma tale che lo restante non sia quadrato, e la radice del restante aggiunta col lato del primo numero quadrato, il composto loro sarà il primo Binomio.*

che è 252 del quadrato della maggiore, che è 576, resta 324, che è numero quadrato: Et notisi che la linea . *a* . bisogna ponerla rationale cioè numero, et non Radice.

§ [56]. Dimostratione del secondo Binomio [1].

Sia la linea . *a* . 16, numero quadrato, et la linea . *b* . 12, numero non quadrato, et minore de la . *a* ., et sia la . *c* . 144,

---

[1] Secondo Binomio, secondo Bombelli (*Algebra*, pag. 76): è *un composto di due quantità e cioè di* R. q. *e numero, e che la* R. q. *sia maggiore del numero, et il quadrato dell' uno tratto del quadrato dell' altro, resti un numero che habbia proportione col quadrato della* R. q. *come da* nu . *quadrato a* nu . *quadrato.*

Cioè una espressione della forma $A + \sqrt{B}$ tale che il rapporto $\frac{B - A^2}{B}$ sia numero quadrato.

La costruzione qui data consiste nel prendere un numero quadrato $a = m^2$, ad un numero non quadrato b, [tali che a-b sia quadrato], e nel fare successivamente:

$$c = b^2,$$
$$d = ab,$$
$$e = ae = ab^2$$
$$\overline{fg} = ad = a^2b, \quad \overline{hg} = \overline{fg} - e = ab(a - b).$$

Il secondo binomio è:

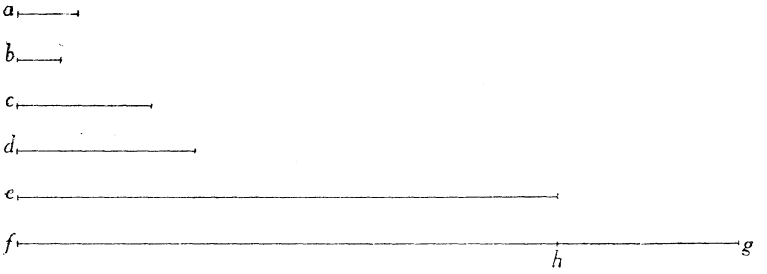
$$\sqrt{\overline{fg}} + \sqrt{\overline{fb}}\sqrt{\overline{fh}} = \sqrt{a^2b} + b\sqrt{a} = \sqrt{m^4b} + mb.$$

Il rapporto $\frac{B - A^2}{B}$ è nel caso nostro dato da;

$$\frac{B - A^2}{B} = \frac{m^4b - m^2b^2}{m^4b} = \frac{m^2 - b}{m^2} = \frac{a - b}{a}$$

ed è numero quadrato solo se $a - b$ è numero quadrato; condizione non espressa dal Bombelli, ma verificata nell' esempio da lui recato.

quadrato della . *b* ., et la . *d* . 192, moltiplicatione dell' . *a* . in . *b* . . Et la . *e* . 2304 moltiplicatione dell' . *a* . in . *c* ., et la . *f* . *g* . 3072, moltiplicatione dell' . *a* . in . *d* . . Sia della linea . *f* . *g* . tagliata una parte in punto . *h* . in tal modo, che . *f* . *h* .



sia pari a la . *e* ., che sarà 2304, et . *g* . *h* . 768: Della . *f* . *g* . se ne piglia il creatore, che sarà *R* 3072 et della . *f* . *h* . si piglia anco il creatore che è 48, che aggiunto con *R* 3072, fa *R* 3072 più 48, et questo è il secondo Binomio.

§ [57]. Dimostratione del terzo Binomio (1).

Sia la linea . *a* . 6, et la linea . *b* . 3, numero non quadrato et primo incomposto, et la . *c* . *d* . 16, numero quadrato, la quale

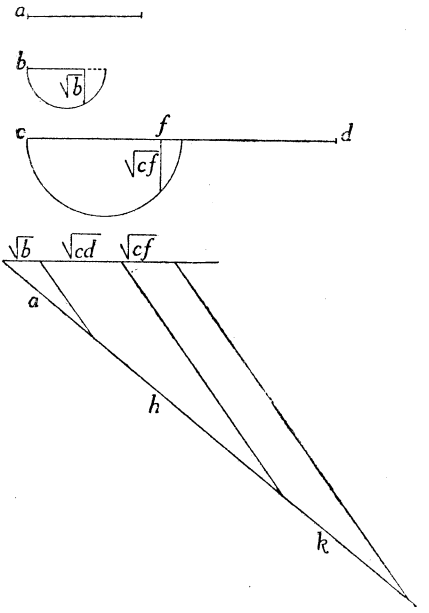
---

Nel testo a stampa la costruzione del *secondo Binomio* (pag. 103) è più completa. Si può esprimere con la formula: $\sqrt{\frac{(m^2+n)^2}{n}} + 2m.$; *m*, *n*, interi positivi qualunque.

Il rapporto $\frac{B-A^2}{B}$ ha la forma $\frac{(m^2-n)^2}{(m^2+n)^2}$, come subito si verifica.

(1) Il TERZO BINOMIO è *un composto di due* R. q., *che, tratto il quadrato della minore dal quadrato della maggiore, il restante sia in proportione col quadrato della maggiore, come da numero quadrato a numero quadrato.* (Cfr. *Algebra* di R. BOMBELLI, *loc. cit.*, pag. 77).

sia divisa in punto . *f* . in tal modo, che . c . *f* . non sia quadrato, et . *f* . *d* . sia quadrato, che una sarà 7, et l'altra 9:



poi si faccia la linea . *h* . tanto lunga, che la proportione del quadrato della linea . *a* . al quadrato di detta . *h* . sia, come *C. 185.*

Cioè una esposizione della forma $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, nella quale il rapporto $(A-B):B$ è numero (razionale) quadrato.

Nella costruzione fatta il binomio ha la forma

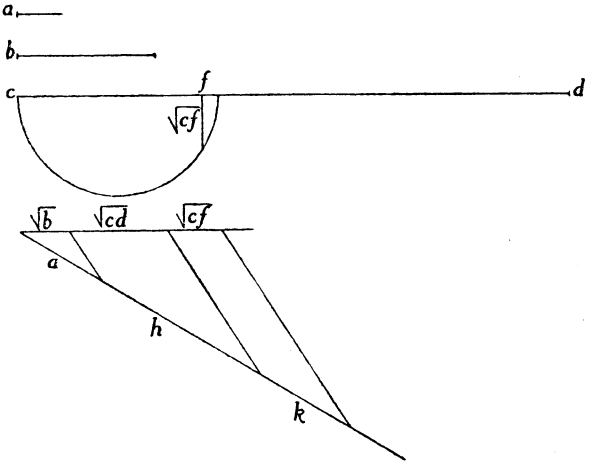
$$\sqrt{\frac{a^2 \cdot \overline{cd}}{b}}+\sqrt{\frac{a^2 \cdot \overline{cf}}{b}}.$$

dove $\overline{cd}$, $\overline{cd}-\overline{cf}$ sono numeri quadrati.

la . *b* . a la . *c* . *d* . , che sarà *R* 192: poi si faccia la linea . *k* . tanto lunga che 'l quadrato dell' . *h* . al quadrato della . *k* . sia come la . *c* . *d* . a la . *c* . *f* . , che sarà *R* 84. Dico la linea . *h* . insieme con la linea . *k* . che sarà *R* 192 più *R* 84 esser il terzo Binomio.

§ [58]. Dimostratione del quarto Binomio (1).

Sia la linea . *a* . 12 la . *b* . 36, numero quadrato, et la . *c* . *d* . 144, numero anch'egli quadrato: sia divisa la . *c* . *d* . in punto . *f* .



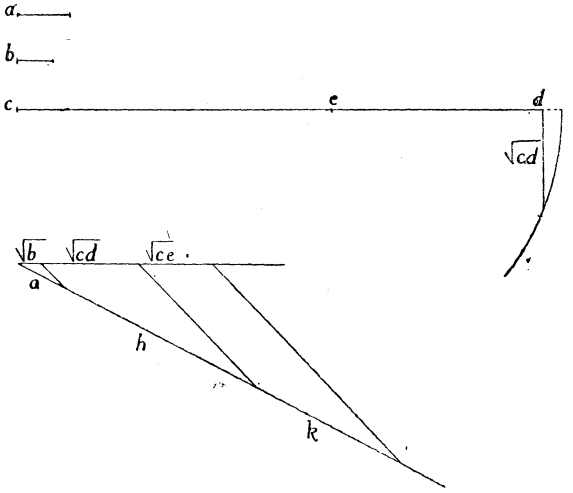
in tal modo, che . *c* . *f* . , et . *f* . *d* . nissun di loro sia quadrato, che presuposto che . *c* . *f* . sia 48 . *f* . *d* . sarà 96: poi sia fatta

(1) Il QUARTO BINOMIO (*loc. cit.*) è *un composto di numero e* R. q. *tale che il quadrato del numero ecceda il quadrato della* R. q., *un numero che non sia quadrato.*

la linea . *h* . di sorte, che la proportione de la . *b* . a la . *c* . *d* . sia come dal quadrato della . *a* . al quadrato della . *h* ., adunque la . *h* . sarà 24: poi si faccia la linea . *k* . talmente lunga, che 'l quadrato della . *h* . al quadrato della . *k* . sia come la . *c* . *d* . a la . *c* . *f* . o vero alla . *f* . *d* . che sarà *R* 192, o vero *R* 384, che aggiunto la linea . *h* . con la linea . *k* . farà 24 più *R* 192, o vero 24 più *R* 384; et questo è il quarto Binomio.

§ [59]. Dimostratione del quinto Binomio (1).

Sia la linea . *a* . 6, et la linea . *b* . 4, numero quadrato, et la linea . *c* . *d* . 60, un numero non quadrato, la quale sia divisa



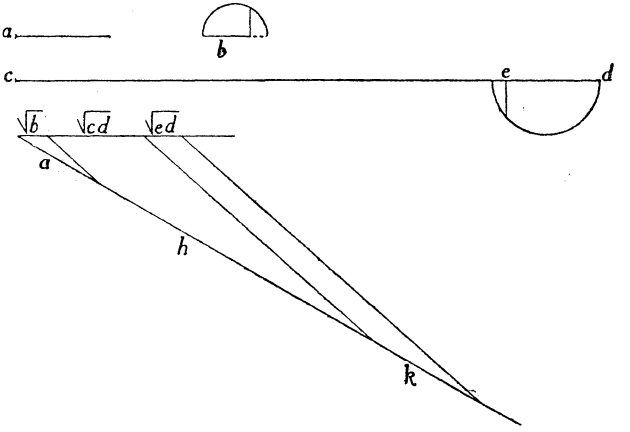
in punto . *e* . in tal modo, che la . *c* . *e* . sia numero quadrato,

(1) Il Quinto Binomio è *un composto di* R. q. *e numero, tale che il quadrato della* R. q. *ecceda il quadrato del numero, un numero che non habbia proportione col quadrato della* R. q. *se non come da numero a numero* (*loc. cit.*, pag. 77).

et . *e* . *d* . non quadrato, che una sarà 36, l'altra 24, et ancora bisogna avvertire, che la proportione de la . *e* . *d* . a la . *c* . *d* . non sia come da numero quadrato a numero quadrato: poi si faccia la linea . *f* . talmente lunga, che la proportione del quadrato della linea . *a* . al quadrato de la linea . *f* . sia come la linea . *b* . a la linea . *c* . *d* ., che sarà *R* 540: poi si faccia la
C.185v. linea . *h* . di lunghezza, che 'l quadrato della . *f* . al quadrato della . *h* . sia come de la . *c* . *d* . a la . *c* . *e* ., che sarà 18. Dico che aggiungere la linea . *f* . con la linea . *h* . sarà il quinto Binomio, che sarà *R* 540 più 18.

§ [60]. Dimostratione del sesto Binomio (1).

Sia la linea . *a* . 6, et la linea . *b* . 3, primo incomposto, et la . *c* . *d* . 36, numero quadrato, la quale sia divisa dal punto . *e* .



in maniera che . *e* . *d* . non sia in proportione a la . *b* ., come

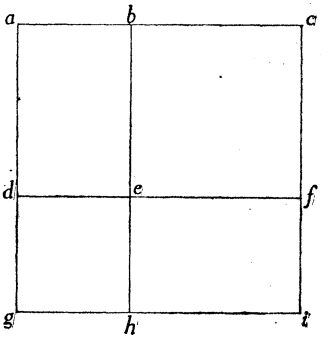
(1) Il sesto Binomio è *un composto di due* R. q., *tale che il quadrato della maggiore ecceda il quadrato della minore di un numero che non habbia proportione col quadrato della detta maggiore se non come da numero a numero* (*loc. cit.*, pag. 78).

da numero quadrato a numero quadrato, et che . *c* . *e* . [30], et . *e* . *d* . [6] non siano niun d'essi numero quadrato: poi si faccia la linea . *f* . in guisa, che 'l quadrato della linea . *a* . al quadrato de la linea . *f* . sia come la linea . *b* . a la linea . *c* . *d* ., che sarà *R* 432, poi si tiri la linea . *h* . di tal lunghezza, che la proportione del quadrato della . *f* . al quadrato de la . *h* . sia come la linea . *c* . *d* . a la . *c* . *e* ., o vero a la . *e* . *d* ., che nel primo modo sarà *R* 360, nell'altro sarà *R* 72, che aggiunto o l'uno o l'altro con la linea . *f* . compongono il sesto Binomio.

La dimostratione de i *Residui* è la medesima che quella de i *Binomij*: ma le due linee che nel Binomio si aggiungano insieme, nei Residui si cava la minore de la maggiore, et il restante è il residuo, però non ne ponerò altra dimostratione.

§ [61]. Dimostratione de la quadratura del Binomio.

Sia la linea . *a* . *c* . 2 . più *R* 8 de la quale se ne voglia il suo quadrato, et sia . *a* . *b* . 2 . et . *b* . *c* . *R* 8.

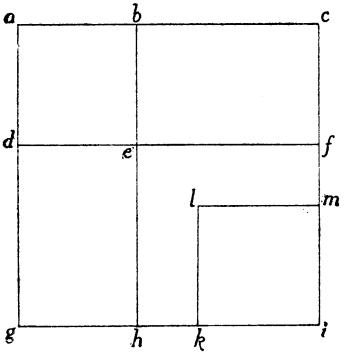


Tirasi il quadrato . *a* . *c* . *g* . *i* . fatto sopra la linea . *a* . *c* ., et dal punto . *b* . si tiri la . *b* . *h* . parallela a la . *a* . *g* ., et dal punto . *f* . (facendo . *c* . *f* . pari a la . *b* . *c* .) si tiri la . *d* . *f* . parallela a la . *a* . *c* .; per la 4ª del secondo il parallelogrammo . *b* . *c* . *e* . *f* . è quadrato, et è 8, per essere fatto sopra la linea . *b* . *c* . la quale è *R* 8; et il parallelogrammo . *d* . *e* . *g* . *h* . è pur quadrato et è 4 per essere fatto di linee pari a la . *a* . *b* ., che è 2; et il parallelogrammo . *a* . *d* . *b* . *e* . è pari al parallelogrammo . *e* . *f* . *h* . *i* ., C. 186.

et ciascun di loro è R 32 per essere composto della . a . b ., et . b . c ., che una via l'altra fanno R 32, che aggiunto i due quadrati insieme fanno 12, et i due parallelogrammi fanno R 128, che tutti insieme fanno 12 più R 128, et tanto è 'l quadrato . a . e . g . i ., et questo è pur Binomio primo per la 59 del X.

§ [62]. Dimostratione come si trova il creatore del primo Binomio (1).

Sia dato il quadrato . a ., il quale sia di superficie 12 più R 128.



Vedasi quanto è più potente il quadrato del numero, del quadrato della Radice, che è 16 chè 'l suo creatore è 4: Hora bisogna dividere in tal modo la linea . a . c ., che il quadrato de la maggior parte superi il quadrato della minore di 4, cioè il quadrato . e . f . h . i . sia maggiore del quadrato . a . b . d . e ., et fra tutti due siano 12 cioè il numero del Binomio. Però se di 12

(1) Si vuole esprimere una espressione della forma $A+\sqrt{B}$, della quale A^2-B è numero quadrato, sotto la forma $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$.

Posto $A^2-B=C^2$, dalle relazioni

$$A+\sqrt{B}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$
$$A-\sqrt{B}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

si ricava

$$\begin{cases} x+y=A \\ x-y=C \end{cases}$$

ossia

$$x=\frac{A+C}{2}, \quad y=\frac{A-C}{2}$$

si leva il 4, restarà 8, et questo sarà pari al doppio del quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . : perchè il quadrato . *e* . *f* . *h* . *i* . superava di 4 il quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . ; Però levasi il quadrato . *l* . *m* . *k* . *i* . il quale sia 4, et restarà il gnomone . *h* . *k* . *e* . *f* . *l* . *m* . , il qual sarà pari al quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . , et fra tutti due sono 8. Levasene il gnomone sopradetto resta 4, et tanto è il quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . : et la linea . *a* . *b* . sarà 2, radice di 4; et per trovare la . *b* . *c* . trovasi quanto è il quadrato . *e* . *f* . *h* . *i* . , che sappiamo essere 4 maggior del quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . adunque sarà 8, et la sua linea . *e* . *f* . è *R* 8, che è pari a la . *b* . *c* . ; sichè la linea . *a* . *c* . sarà 2 più *R* 8 cioè la linea . *a* . *b* . , et la . *b* . *c* .

§ [63]. Dimostratione come si trova il creatore del secondo Binomio (1).

Sia il quadrato . *a* . *c* . *g* . *k* . , il quale sia *R* 525 più 21. Per ritrovare quanto sia la linea . *a* . *c* . cavasi il quadrato di 21

---

(1) Nel *secondo Binomio* è numero quadrato il quoziente $\frac{B-A^2}{B}$. Posto dunque $\frac{B-A^2}{B}=C^2$, per risolvere la equazione

$$A+\sqrt{B}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

posto :

$$-A+\sqrt{B}=(-\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

avremo

$$x+y=\sqrt{B}$$

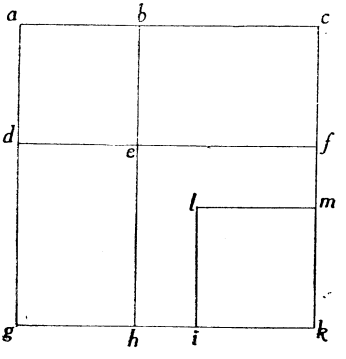
$$-x+y=\sqrt{B-A^2}=\sqrt{B}\,.\,C.$$

Da cui

$$y=\frac{\sqrt{B}}{2}(1+C),\quad x=\frac{\sqrt{B}}{2}(1-C).$$

[dal quadrato] di R 525, resta 84, che 'l suo creatore è R 84, et tanto è minore il quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . del quadrato . *e* . *f* . *h* . *k* . , et fra tutti due sono R 525; però levasi del quadrato . *e* . *f* . *h* . *k* . il quadrato . *l* . *m* . *i* . *k* . , il quale sia R 84, di R 525, che sempre mai si potrà levare per essere fra di loro proportione come da numero quadrato a numero quadrato resta R 189, et tanto è il gnomone . *e* . *f* . *l* . *m* . *h* . *i* . , et il quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . ; Et il gnomone è pari al quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . , però pigliasi la metà di R 189 ne verrà $R\,47\,\frac{1}{4}$, et tanto è il quadrato . *a* . *b* . *d* . *e* . , et la linea . *a* . *b* . sarà $R\,R\,47\,\frac{1}{4}$; et per trovare la linea . *b* . *c* . sappiamo il gnomone . *i* . *e* . *f* . essere $R\,47\,\frac{1}{4}$, et il quadrato . *l* . *m* . *k* . essere R 84, però aggiunti insieme fanno $R\,247\,\frac{1}{4}$, et tanto è il quadrato . *e* . *f* . *h* . *k* . , che pigliatone il creatore, che sarà $R\,R\,247\,\frac{1}{4}$ più $R\,R\,47\,\frac{1}{4}$.

C. 186 v.



Applicando queste formule al caso considerato dal BOMBELLI troviamo

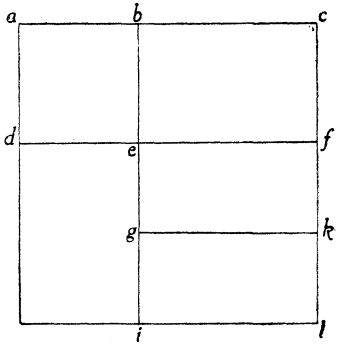
$$\sqrt{\sqrt{257\,\tfrac{1}{4}}} + \sqrt{\sqrt{47\,\tfrac{1}{4}}}.$$

Per evidente errore di copia nel testo si legge:

$$\sqrt{\sqrt{247\,\tfrac{1}{4}}} \quad \text{invece di} \quad \sqrt{\sqrt{257\,\tfrac{1}{4}}}.$$

§ [64]. Dimostratione come si trovi il creatore del terzo Binomio [1].

Sia il quadrato . *a* . *c* . *l* . *R* 200 più *R* 125, del quale si voglia la linea . *a* . *c* . suo creatore.



Cavasi il quadrato della minore del quadrato della maggiore, resta 75, che 'l suo creatore è *R* 75, et tanto è minore il quadrato . *a* . *b* . *e* . del quadrato . *e* . *f* . *i* ., et fra tutti due sono *R* 200. Dal quadrato . *e* . *f* . *i* . levasi il parallelogrammo . *g* . *l* ., il quale sia *R* 75, resterà per il parallelogrammo . *e* . *k* . et il quadrato . *a* . *b* . *e* ., *R* 200 meno *R* 75 : et per essere il parallelogrammo . *e* . *k* . pari al quadrato . *a* . *b* . *e* ., dividasi per mezzo *R* 200 meno *R* 75 ne viene *R* 50 meno *R* $18\frac{3}{4}$, et tanto è il quadrato . *a* . *b* . *e* ., et la linea . *a* . *b* . sarà *R* $\boxed{R\,50 \text{ m. } R\,18\frac{3}{4}}$; et per trovare la . *e* . *f* . che è pari a la . *a* . *b* . *c* ., si sa che 'l parallelogrammo . *e* . *h* . è *R* 50 meno *R* $18\frac{3}{4}$, et il parallelogrammo . *g* . *l* . è *R* 75, che aggiunte insieme sono *R* 50 p. *R* $18\frac{3}{4}$, et

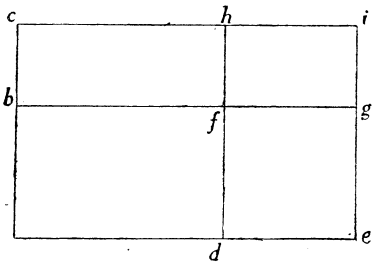
---

(1) Questa risoluzione è analoga alla precedente, perchè il terzo Binomio è una espressione della forma $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, nella quale il rapporto $\frac{B-A}{B}$ è numero quadrato.

tanto è il quadrato . *e* . *l* ., et la sua linea . *e* . *f* . sarà $R\,\underline{|R\,50 \text{ p. } R\,18\frac{3}{4}|}$, et tanto è la linea . *b* . *c* ., che aggiunta con la . *a* . *b* . fanno $R\,\underline{|R\,50 \text{ p. } R\,18\frac{3}{4}|}$ più $R\,\underline{|R\,50 \text{ m. } R\,18\frac{3}{4}|}$, et tanto è tutta la linea . *a* . *c* . Et per essere tutto un medesimo procedere, non ponerò altra dimostrazione, come si trovi li Creatori de gl'altri tre Binomii.

C. *187*. § [65]. DIMOSTRATIONE DEL MOLTIPLICARE BINOMIO VIA IL SUO RESIDUO (1).

Sia la linea . *c* . *h* . *R* 10, et . *h* . *i* . *R* 6, tutta la . *c* . *i* . sarà *R* 10 più *R* 6, et sia la . *e* . *i* . *R* 10, che trattone la . *e* . *g* ., che è *R* 6, resta *R* 10 meno *R* 6 per la . *g* . *i* .; Et per sapere quanto è il parallelogrammo, . *c* . *g* . : se si caverà il parallelogrammo . *e* . *b* . del parallelogrammo . *e* . *c* . ne restarà il parallelogrammo . *g* . *c* . : però prima vedasi quanto è il quadrato . *c* . *d* ., che essendo la . *c* . *h* . *R* 10, et il medesimo la . *d* . *h* . per essere pari a la . *e* . *i* . sarà detto



(1) Si vuol provare che

$$(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{10}-\sqrt{6}) = 10 - 6 = 4.$$

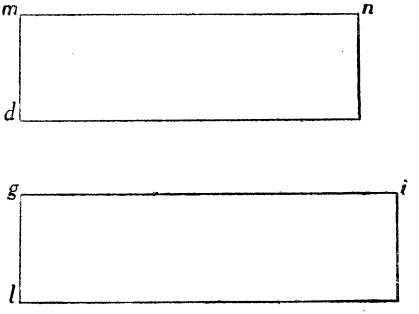
Ecco in modo schematico la dimostrazione

$bd = he,$
$cg = cd - bd + hg = cd - he + hg = cd - (he - hg) = cd - fe.$

quadrato 10, et il parallelogrammo . *e* . *h* . sarà *R* 60, che aggiunte insieme fanno 10 più *R* 60, et tanto è il parallelogrammo . *e* . *c* . . Per trovare quanto è . *e* . *b* . vedasi quanto è il parallelogrammo . *f* . *e* . , che per essere . *f* . *g* . , et . *g* . *e* . *R* 6 detto parallelogrammo sarà quadrato, et sarà 6 di superficie, ed il parallelogrammo . *d* . *b* . sarà *R* 60 per essere la . *b* . *f* . *R* 10, et la . *f* . *d* . *R* 6, che aggiunto . *b* . *d* . con . *f* . *c* . , fa *R* 60 più 6, che tratto di 10 più *R* 60, resta 4, et tanto è il parallelogrammo . *c* . *g* . ; et sempre detto parallelogrammo sarà numero essendo . *c* . *i* . il Binomio, et . *i* . *g* . il suo residuo perchè il parallelogrammo . *e* . *h* . è pari al parallelogrammo . *d* . *b* . , et il parallelogrammo . *g* . *h* . è quanto è il parallelogrammo . *e* . *h* . meno il quadrato . *e* . *f* . del quale se n'ha da cavare il parallelogrammo . *d* . *b* . restarà meno il quadrato . *e* . *f* . , il quale si havrà da cavare del quadrato . *d* . *c* .

§ [66]. Dimostratione del partire per Binomio o vero Residuo.

Sia la linea . *m* . *n* . 4, la quale si habbia a partire per la . *g* . *i* . , la quale sia 3 più *R* 2 : se si farà il parallelogrammo

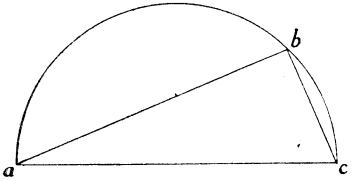


. *l* . *i* . facendo la . *l* . *g* . il residuo della . *g* . *i* . , cioè 3 meno *R* 2, et il parallelogrammo . *d* . *n* . facendo la . *d* . *m* . pari a *C. 187 v.*

la . *l* . *g* . ; il parallelogrammo . *l* . *i* . sarà in proportione del parallelogrammo . *d* . *n* . , come la . *g* . *i* . a la . *m* . *n* . , per la dimostratione fatta di sopra, però, essendo detta proportione, tanto sarà a partire la . *m* . *n* . per la . *g* . *i* . quanto il parallelogrammo . *d* . *n* . per il parallelogrammo . *l* . *i* . ; perchè il partire non è altro, che pigliare la proportione da una quantità a l'altra (1).

§ [67]. Dimostratione della Radice Legata.

La Radice legata è il creatore d'un Binomio, che non sia nè primo nè secondo, perchè l'uno et l'altro hanno creatore. La quale mostrarò in linee in due modi, sia il semicirculo . *a* . *b* . *c* . et sia la linea . *a* . *b* . 4, et la . *b* . *c* . *RR* 2, et si voglia sapere quanto è la . *a* . *c* . . Aggiungasi il quadrato della . *a* . *b* . , che è 16, col quadrato de la . *b* . *c* . , che è *R* 2, fa 16 più *R* 2, et tanto è il quadrato della . *a* . *c* . , et il suo creatore è *R* | 16 più *R* 2 |, che in modo più breve non si può rispondere et l'altra dimostratione si è questa.



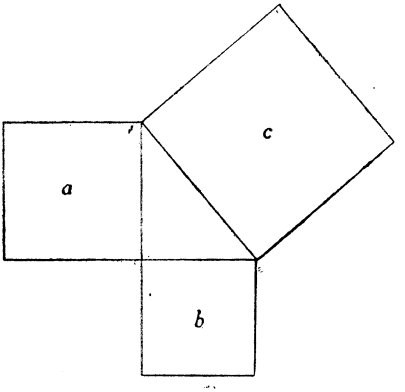
§ [68]. Sia il quadrato . *a* . 4 . , et il quadrato . *b* . *R* 13, et il quadrato . *c* . sia pari a l'uno et l'altro insieme, detto quadrato

---

(1) Si fa:

$$\frac{4}{3+\sqrt{2}}=\frac{4(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{4(3-\sqrt{2})}{9-2}=\frac{4}{7}(3-\sqrt{2}).$$

. c . sarà 4 più R 13, la sua linea . d . e . sarà R | 4 più R 13 |, che come si è detto di sopra in nome più breve non si può



nominare; benchè ancora si potria, dire che detta linea . d . c . fusse in potentia 4 più R 13, ma nell'operare generaria confusione più presto, che l'altro.

§ [69]. Dimostratione del moltiplicare d'un Binomio cubo via il suo Residuo (1).

Sia la linea . k . l . R^3 12, et . l . m . R^3 6.

Per trovare un composto, che moltiplicato via detta . k . m .

---

(1) Si dimostra, coi metodi dell'algebra geometrica, che

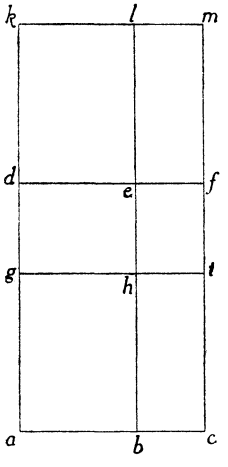
$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})=a+b;$$

la dimostrazione non è sostanzialmente diversa, ma assai più chiara di quella data al n. 33 per provare che

$$(a^3+b^3)=(a+b)(a^2+b^2-ab)$$

(cfr. *L'Algebra* di R. Bombelli, loc. cit., pagg. 128, 131 ove è chiarita anche la denominazione, qui usata, di *residuo*) e si può riassumere schemati-

faccia numero, che nel primo libro è stato nominato *residuo*,
C. 188. facciasi in questo modo: tirasi la . *m* . *c* ., et facciasi . *m* . *f* . pari a la potentia de la . *l* . *m* ., che sarà R^3 36, et la . *f* . *c* ., che sia pari a la potentia de la . *k* . *l* ., che sarà R^3 144 de la quale se ne tagli la . *c* . *i* ., che sia pari al prodotto della . *k* . *l* . in la . *l* . *m* ., che sarà R^3 72; dico che il parallelogrammo . *g* . *m* . sarà numero, come si può vedere. Il parallelogrammo . *e* . *m* . sarà . 6 . et il parallelogrammo . *d* . *l* . sarà R^3 432, et il parallelogrammo . *a* . *e* . sarà 12, et il parallelogrammo . *b* . *f* . R^3 864, che somma in tutto 18 più R^3 864 più R^3 432, et tanto è tutto il parallelogrammo . *a* . *m* . del quale se n' ha da cavare li due parallelogrammi . *a* . *h* . ; et . *b* . *i* ., che . *a* . *h* . è R^3 864, et . *h* . *c* . è R^3 432, restarà 18 per il parallelogrammo . *g* . *m* . ; Et questo mai falirà, perchè il parallelogrammo . *e* . *m* . sempre sarà numero per essere la . *f* . *m* . la potentia della . *l* . *m* ., che moltiplicando l'una in l'altra il produtto sarà cubo, et il medesimo è il parallelogrammo . *a* . *e* . per essere la . *b* . *e* . la potentia della . *e* . *d* ., et il parallelogrammo . *b* . *f* . è pari al parallelogrammo



---

camente così: Posto

$$\overline{mf} = \overline{lm}^2, \quad \overline{fc} = \overline{kl}^2 \cdot \overline{ci} = \overline{kl} \cdot \overline{lm},$$

si ha:

$$\begin{aligned} gm &= (\overline{kl} + \overline{lm})(\overline{lm}^2 + \overline{kl}^2 - \overline{kl} \cdot \overline{lm}) \\ &= (em + dl + ae + bf) - (ah + bi) \\ &= \overline{lm}^3 + \overline{kl} \cdot \overline{ml}^2 + \overline{kl}^3 + \overline{lm} \cdot \overline{kl}^2 - \overline{kl}^2 \cdot \overline{lm} - \overline{kl} \cdot \overline{lm}^2 \\ &= \overline{lm}^3 + \overline{kl}^3 . \end{aligned}$$

. *a* . *h* . perchè essendo . *b* . *c* . R^3 6, et . *c* . *f* . R^3 144, che il quadrato de la . *k* . *l* . , tanto farà a moltiplicare R^3 6 via R^3 144 quanto R^3 6 via R^2 12, et il produtto via R^3 12, o vero R^3 12 via R^3 12, et il produtto via R^3 6; et essendo . *a* . *g* . R^3 72, che è il produtto de la . *k* . *l* . in la . *l* . *m* . : però tanto farà la . *a* . *b* . in la . *k* . *l* . , et il produtto via la . *l* . *m* . quanto la . *a* . *g* . in la . *a* . *b* . ; et per dette ragioni il parallelogrammo . *a* . *h* . è pari al parallelogrammo . *b* . *f* . , et per le medesime raggioni il parallelogrammo . *b* . *i* . è pari al parallelogrammo . *d* . *l* . però se si levarà il parallelogrammo . *d* . *l* . , et si metterà nel luogo del . *b* . *i* . , si haverà il parallelogrammo . *b* . *m* . , che è 6 più R^3 864, et il parallelogrammo . *a* . *e* . che è 12 meno il parallelogrammo . *a* . *h* . , che è R^3 864, che essendo . *a* . *h* . meno, et . *c* . *e* . più, et essendo pari si levarà l'uno, et l'altro, et restarà 18.

Et questo serve per il partire per un binomio cubo, che nel resto è simile al partire per un reciso, che per essersene detto abbastanza non starò a replicarlo.

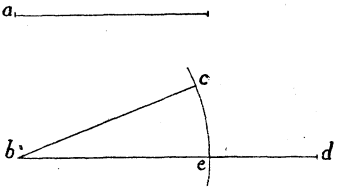
La carta 188 v. è bianca.

[CAP. III.]

[COSTRUZIONE GEOMETRICA DI PROBLEMI ALGEBRICI]

§ [70]. *Trovare una linea che aggiuntoli la linea . a . faccia una linea lunga come la . b . d . .* C. 189.

Tirasi dal punto . *b* . la . *b* . *c* . pari alla . *a* . in tal modo, che nel punto . *b* . faccia angolo, poi si discrive il circulo . *e* . *c* ., facendo . *b* . centro et che la estremità . *e* . tocchi la circonferentia, il quale taglierà la . *b* . *d* . in punto . *e* . dico . *e* . *d* . essere la linea cercata, et questa è la *terza del primo de gl' elementi*, et la *prima del terzo* (1). Et dato che la linea . *a* . sia 2, et la



(1) Questa citazione si riferisce al *Terzo Libro* di questa medesima opera, nell'edizione manoscritta, che si legge nel Codice *B* . 1569.

Così si dirà di altre analoghe citazioni che troveremo nel seguito.

Il problema cui si riferisce, è del resto, riportato anche nella Edizione a stampa (pag. 416).

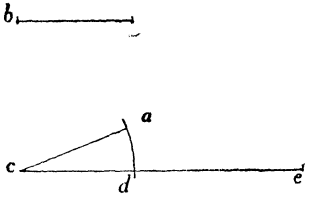
La traduzione in linguaggio geometrico dei problemi aritmetici, che vien fatta del BOMBELLI nel presente Capitolo serve a dare al problema la massima generalità : in altri termini trasporta il problema aritmetico nella *Algebra geometrica*.

Ma già nel Libro III il BOMBELLI aveva, con mezzi puramente algebrici, provveduto a presentare il problema sotto veste generale, con l' enunciato :

« *Trovami un numero che aggiunto con* 1 $\underline{1}$ *faccia* 12 » ; cui risponde con la formula 12 $\underline{0}$ *m* . 1 $\underline{1}$ (carte 116).

. *b* . *d* . 7, che essendo . *b* . *e* . 2 per essere pari a la . *b* . *c* . , la quale è pari a la . *a* . restarà la . *e* . *d* . 5, che aggiunta con la . *a* . , che è 2 fa 7.

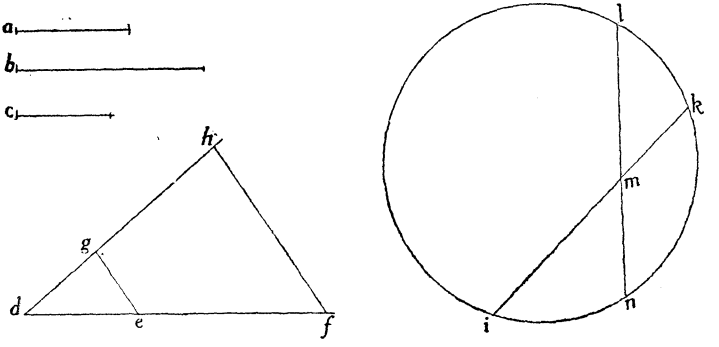
§ [71]. *Tagliare della linea . c . e . tanto che ne resti una parte pari a la . b .*



Questa ricerca la medesima operatione de la passata, et la linea . *d* . *e* . sarà la parte da tagliarsi. Et è la *terza del terzo.* Et dato, che la linea . *c* . *e* . sia 10, et la . *b* . 2, la . *d* . *e* . sarà 8 per essere la . *c* . *d* . pari a la . *c* . *a* . et la . *c* . *a* . alla . *b* .

§ [72]. *Trovare una linea che sia in proportione alla . c . come è la . a . alla . b .*

Tirasi la . *d* . *f* . la quale sia divisa in punto . *e* . in tal modo che la . *d* . *e* . sia pari alla . *a* . et . *e* . *f* . alla . *b* . poi



tirasi la . *d* . *g* . pari alla . *c* . et dal punto e tirasi la . *e* . *g* . et allungasi . *d* . *g* . tanto che si tagli con la . *f* . *h* . parallela alla . *e* . *g* . , che si taglieranno in punto . *h* . et la . *g* . *h* . sarà la

linea addimandata: perchè tal proportione è dalla . *d* . *e* . pari alla . *a* ., alla . *e* . *f* ., pari alla . *b* .; come è la . *d* . *g* ., pari alla . *c* ., alla . *g* . *h* . .

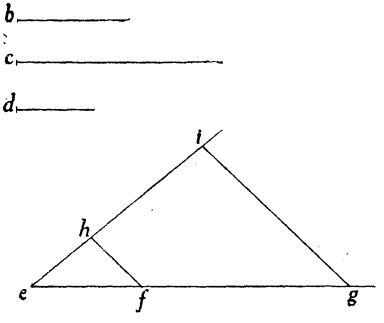
Et il medesimo si può trovare in questo altro modo. Tirasi la . *i* . *k* . divisa in punto . *m* . in tal modo, che la . *i* . *m* . sia pari alla . *b* ., et . *m* . *k* . alla . *c* . et dal punto *C.189v.*
. *m* . tirasi la . *m* . *l* . pari alla . *a* .: poi facciasi il circulo che tocchi li tre punti . *i* . *l* . *k* ., et allungasi la . *l* . *m* . fino alla circunferenza . *n* ., et la . *m* . *n* . farà la linea addimandata: per essere le quattro linee proportionali, ma non continoe, che tanto può la . *l* . *m* . nella . *m* . *n* ., quanto la . *i* . *m* . nella . *m* . *k* .: *Et questa dimanda nel terzo è la quarta*; che dice: *Trovami un numero che partito per 6 ne venga 8*; il quale numero è 48, et in tale proportione è 6 alla unità, come 48 a 8, che vengono ad essere quattro quantità proportionali.

Et dato che la linea . *a* . sia 1, et la . *b* . 6, et la . *c* . 8 la . *d* . *e* . sarà 1, la . *e* . *f* . 6, la . *d* . *g* . 8 .: et dato che la . *e* . *g* . sia 4, per la 4ª del VI tal proportione è dalla . *d* . *e* . alla . *d* . *f* . com'è dalla . *d* . *g* . alla . *d* . *h* . per essere il triangolo . *d* . *e* . *g* . simile al triangolo . *d* . *f* . *h* .: Et per trovare quanto è la . *d* . *h* . si dirà; se la . *d* . *e* . che è 1 fusse la . *d* . *f* ., che è 7 quanto sarà la . *d* . *g* ., che è 8? che sarà 56, et tanto è tutta la . *d* . *h* ., che trattone la . *d* . *g* ., resta 48, et tanto è la . *g* . *h* .: Et la proportione, che è da . *d* . *e* . che è 1 alla . *e* . *f* ., che è 6, così e dalla . *d* . *g* . alla . *g* . *h* ., che una è 8, l'altra 48; et il medesimo per la 19ª del VII se la . *i* . *m* . è 6, et . *m* . *k* . 8 et . *m* . *l* . 1, la . *m* . *n* . sarà 48: perchè tanto fa a moltiplicare la . *l* . *m* . via la . *m* . *n* ., che è 48 quanto la . *i* . *m* . via . *m* . *k* , che è pur 48.

§ [73]. *Trovare una linea, che sia in proportione alla . d . come è la . b . alla . c . .*

Tirasi la . *e* . *g* . divisa in punto . *f* . et sia la . *e* . *f* . pari alla . *b* ., et . *f* . *g* . alla . *c* .: poi tirasi la . *e* . *i* . faccendo . *e* . *h* .

pari alla . *d* ., et dal punto . *f* . tirasi la . *f* . *h* ., et dal punto . *g* . tirasi la . *g* . *i* . parallela alla . *f* . *h* . che si congiongerà con la . *e* . *h* . in punto . *i* .; et la . *h* . *i* . sarà la linea addimandata.



Et dato la . *c* . essere 2, et la . *b* . 4, et la . *d* . 10, che essendo . *g* . *f* . 2, et . *f* . *e* . 4, et . *e* . *h* . 10, la . *h* . *i* . sarà 5, che moltiplicato . *e* . *f* . in . *h* . *i* . fa 20: et così fa . *f* . *g* . in . *e* . *h* ., et tal proportione ha la . *e* . *g* ., che è 6 alla . *e* . *f* ., che è 4 come . *c* . *i* ., che è 15 alla . *e* . *h* . che è 10, come è stato detto nella passata.

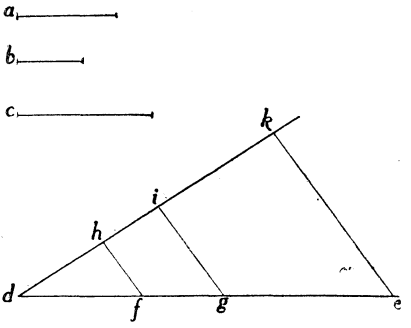
Et questa dimanda nel terzo è la Decima, che dice: *Il braccio del panno....* (1). Et a le dimande simili, che si solvono per la regola della proportione chiamata *del tre*, serve questa
C.190. dimostrazione.

§ [74]. *Voglio dividere la linea . d . e . in tre parti proportionali alle tre date . a . b . et . c . .*

Tirasi la . *d* . *k* ., la quale si divida in tre parti, che la . *d* . *h* . sia pari alla . *a* . et la . *h* . *i* . sia pari alla . *b* . et la . *i* . *k* . alla . *c* . : poi tirasi la . *k* . *e* ., et dalli punti . *i* . et . *h* . si tirano le due parallele . *i* . *g* . et . *h* . *f* . alla . *e* . *k* ., et così sarà divisa la . *d* . *e* . nelle tre parti addimandate: che tale proportione haverà la . *d* . *f* . alla . *f* . *g* . come la . *a* . alla . *b* . et la . *f* . *g* . alla . *g* . *e* . come la . *b* . alla . *c* .. Et dato che la . *d* . *e* . sia 24, la . *a* . 2, la . *b* . 6, et la . *c* . 4 tutta la . *d* . *k* .

(1) Il problema 10 del Terzo Libro dice appunto (carta 116 v.): « Il braccio del panno vale Giuli 17, quanto valeranno braccia 50? ».

sarà 12, et la . *d* . *i* . 8, per essere pari alla . *a* ., et . *b* . ; et la . *d* . *g* . sarà 16, che tratto di 24 resta 8 per la . *g* . *e* . ; et essendo . *d* . *h* . 2, la . *d* . *f* . sarà 4, che tratta di . *d* . *g* . ,



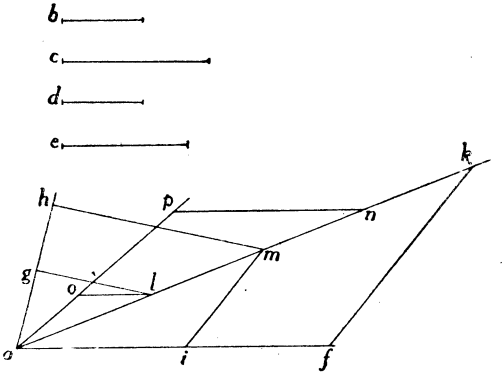
resta 12, per la . *f* . *g* . ; et haveranno le proportione addimandate, come si è detto nelle due passate. *Et questa nel terzo è la* . 15 ., che dice: *Uno ha scudi* 10.... (1).

§ [75]. *Voglio dividere la linea* . *a* . *f* . *in due parti in tal modo, che tagliato di una di dette parti un pezzo, che sia in proportione al suo restante, com' è la* . *b* . *alla* . *c* . : *et dell' altra parte tagliato un' altro prezzo, che sia in proportione al suo restante, com' è la* . *d* . *alla* . *e* . ; *detti due pezzi tagliati siano pari fra di loro.*

Pigliasi una linea come si voglia la quale si divida in due parti secondo la proportione, che è dalla . *b* . alla . *c* ., tirando la . *a* . *f* ., facendo . *a* . *g* . pari alla . *b* ., et la . *a* . *h* . *C. 190 v.*

(1) Carte 117 — « Uno ha scudi 10 et vorrebbeli cambiare a tre sorte di monete, cioè Giuli, Carlini et Grossi, et vuole due tanti Grossi che Carlini et quattro tanti Giuli che Grossi. Dimando quanto si haverà per sorte, valendo lo scudo Giuli 11, a Carlini 15, a Grossi 22 ».

pari alla . *c* . che tirata . *h* . *m* . , et la . *g* . *l* . che gli sia parallela, la . *a* . *l* . sarà una parte, et . *l* . *m* . l'altra; et dal punto . *a* . si tiri la . *a* . *p* . divisa in punto . *o* . et sia . *a* . *o* . pari alla . *d* ., et . *o* . *p* alla . *d* ., et dal punto . *l* . si tiri la . *l* . *o* ., et dal punto . *p* . la . *p* . *n* ., che gli sia parallela, et allungasi



la . *a* . *m* . sino in . *k* . facendo la . *m* . *k* . pari alla . *l* . *n* . et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *f* ., et dal punto . *m* . la . *m* . *i* ., che gli sia parallela; dico la . *a* . *i* . essere una parte et la . *i* . *f* . l'altra. Et col numero si provarà in questo modo. Sia la . *b* . 2 ., la . *c* . 3, la . *d* . 3, la . *e* . 4, . *a* . *f* . 20, et . *a* . *m* . 12, che divisa secondo la proportione che è dalla . *b* . alla . *c* . ; . *a* . l . sarà 8, et essendo . *a* . *o* . 3, et . *o* . *p* . 4, la . *l* . *n* . sarà $10\frac{2}{3}$ come si è mostrato nelle passate . *m* . *k* . sarà pure $10\frac{2}{3}$, et tutta la . *a* . *k* . sarà $22\frac{2}{3}$, che divisa la . *a* . *f* . secondo la proportione che è da . *a* . *m* . a . *m* . *k* ., . *a* . *i* . sarà $10\frac{10}{17}$, et . *i* . *f* . $9\frac{7}{17}$, et diviso . *a* . *i* ., nella proportione che è dalla . *b* . alla . *c* . ne verrà $7\frac{7}{17}$, et diviso . *i* . *f* . nella proportione che è dalla . *d* .

alla . *e* . ne verrà pure $7\frac{1}{17}$, che è l'intento. *Et questa dimanda nel terzo è la* 16 (¹).

§ [76]. *Trovasi una linea, che di essa, et della linea . b . fattone un parallelogrammo et aggiuntole la superficie . A .* [sia] *pari a un parallelogrammo fatto di essa linea, et della . c . d . trattone la superficie . D . .*

(¹) Carte 117 — « Due hanno da partire scudi 20 in tal modo che li $\frac{2}{3}$ del primo sono li $\frac{3}{4}$ del secondo ».

Nella traduzione geometrica si tratta di dividere il segmento $\overline{af}$, in due parti tali che i $\frac{b}{c}$ della prima siano eguali ai $\frac{d}{e}$ dalla seconda.

La soluzione algebrica, data nel terzo libro, insegna che le due parti debbono essere rispettivamente:

$$\overline{af} \cdot \frac{\frac{d}{e}}{\frac{b}{c}+\frac{d}{e}} \qquad \overline{af} \cdot \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}+\frac{d}{e}}$$

cioè che *il segmento dato deve esser diviso in parti proporzionali ai numeri* $\frac{d}{e}$, $\frac{b}{c}$.

La costruzione geometrica è fatta dipendere dalla risoluzione algebrica ed anche la dimostrazione riposa sulla *regola d' algebra.*

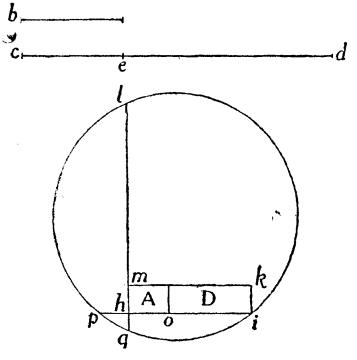
A chiarimento della costruzione fatta osserveremo che si ha:

$$\frac{\overline{al}}{\overline{am}} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\overline{al}}{\overline{ln}} = \frac{d}{e},$$

d' onde

$$\frac{\overline{ln}}{\overline{am}} = \frac{b}{c} : \frac{d}{e} \text{ fatto } mk = ln, \text{ si avrà } \frac{\overline{mk}}{\overline{am}} = \frac{b}{c} : \frac{d}{e}, \text{ cioè } \frac{\overline{am}}{\overline{mk}} = \frac{d}{e} : \frac{b}{c}.$$

Prima s'ha da formare le due superficie . *A* . et . *D* . che siano sopra ad una medesima linea, come le due propcste, che sono sopra la . *i* . *k* . . Per trovare la linea addimandata tagliasi de la . *c* . *d* . la . *c* . *e* . pari alla . *b* . et del restante che è la . *e* . *d* . facciasi la . *l* . *h* . che gli sia pari; et allungasi la . *i* . *h* . sino in . *p* . facendo . *p* . *h* . pari alla . *i* . *k* . : poi facciasi il circulo che tocchi i tre punti . *i* . *l* . *p* . et allungasi la . *l* . *h* . fino alla circunferenza . *q* . ; dico la . *h* . *q* . essere la linea addimandata. Come si può vedere col numero: facendo la . *b* . 10, la . *c* . *d* . 30, la . *i* . *k* . 3, la . *i* . *o* . 8, et la . *h* . *o* . 4, la superficie . *A* . sarà 12, et . *D* . 24; et la la linea . *e* . *d* . sarà 20, et il medesimo sarà la linea . *l* . *h* . et là . *p* . *h* . sarà 3 per essere pari alla . *h* . *m* ., et la . *h* . *q* . sarà $1\frac{4}{5}$, perchè tanto può la . *l* . *h* . in . *h* . *q* . quanto . *p* . *k* in . *h* . *i* . : Hora moltiplicasi la . *b* . in . *q* . *h* . fa 18, che aggiuntoli la superficie . *A* . fa 30: Et a moltiplicare la . *c* . *d* . in . *h* . *q* . fa 54, che trattone la superficie . *D* . resta 30, che è quanto si addimandava. *Et questa è la 21 del terzo*, che dice: *Uno vuol comperare una pezza di panno....* (1).

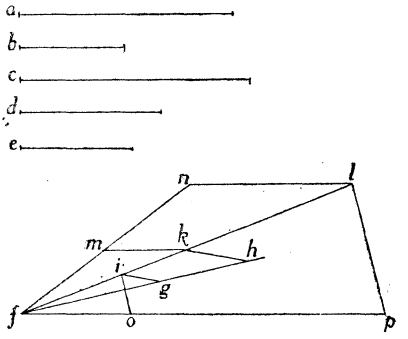


C. 191.

(1) Carte 118 — « Uno vuol comprare una pezza di panno, et gli ne sono poste innanzi di due sorti, l'una da 50 giuli la canna, et l'altra da giuli 62 la canna. Costui fa suo conto: se compera la prima avanza giuli 68, et se compera la seconda li mancano giuli 28, et tutte due le pezze sono d'una medesima lunghezza. Dimando quanto era la lunghezza de la pezza, et quanti danari haveva ». La costruzione geometrica traduce la formula: $x(\overline{cd} - b) = A + D$.

§ [77]. *Trovare una linea della quale tagliatone una parte in proportione a tutta la linea come la . b . alla . a . , et di detta parte tagliatone una parte in proportione di tutto il pezzo come è la . d . alla . c . et il restante è paro alla . e . .*

Pigliasi una linea a bene placito, et sia la . *f* . *l* . , che tirata la . *f* . *n* . pari alla . *a* . , et la . *f* . *m* . pari alla . *b* . : poi

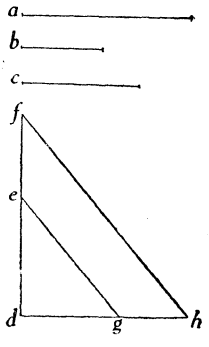


tirata la . *l* . *n* . , et la . *m* . *k* . , che gli sia parallela, . *k* . *l* . sarà la prima parte tagliata, et restarà la . *f* . *k* . : poi tirasi la . *f* . *h* . pari alla . *c* . , et la . *f* . *g* . pari alla . *d* . , tirando le due parallele fra di loro . *k* . *h* . , et . *g* . *i* . : poi facciasi . *f* . *o* . pari alla . *e* . , et dal punto . *l* . la . *l* . *p* . che gli sia parallela dico la . *f* . *p* . essere la linea addimandata, come si può vedere col numero.

Sia la linea . *a* . 6, . *b* . 4, . *c* . 10, . *d* . 5, et . *e* . 3, et la linea . *f* . *l* . 12, che essendo . *f* . *n* . 6, et . *f* . *m* . 4, la . *f* . *k* . sarà 8 et la . *k* . *l* . 4. et essendo . *f* . *h* . 10, et . *f* . *g* . 5, la . *f* . *i* . sarà pur 4, et la . *f* . *o* . 3, et la . *o* . *p* . sarà 6 che tutta la linea . *f* . *p* . sarà 9, che tagliatone un pezzo, che gli sia in proportione come la . *b* . alla . *a* . tal pezzo sarà 6, che tagliatone un pezzo, che sia in proportione a detto 6, come la . *d* . alla . *c* . tal pezzo sarà 3, che è pari alla . *e* . , come si cercava.

Et questa domanda è la 27 nel terzo, che dice: *Trovami un numero,* che *trattone il mezzo, et di quello che resta...* (1).

§ [78]. *Voglio dividere la linea . a . in due tal parti che fatto di dette parti due parallelogrammi, uno sopra la linea . b . . et l'altro sopra la . c . siano pari fra di loro.*



C. 191 v.

Tirasi la . g . d . pari alla . c . , et la . g . h . pari alla . b . et la . d . f . pari alla . a . et dal punto . h . tirasi la . h . f . , et dal punto . g . tirasi la . g . e . che gli sia parallela; così la . d . f . sarà divisa in punto . e . nelle due parti addimandate, che fatto un parallelogrammo de la . d . e . , et . g . h . sarà pari al parallelogrammo fatto della . d . g . , et . e . f . .

Et questa dimanda nel terzo è la . 28 . , che dice: *Uno s'accorda a servire un patrone per 60 giorni....* (2).

Et perchè la regola de l'algebra ne mostra un'altra dimostratione non ho voluto restare di metterla (3). Facciasi . i . l . pari alla . a . , et . l . m . pari alla . b . o vero alla

---

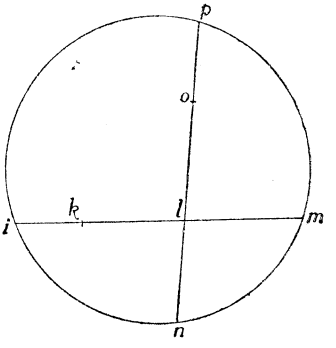
(1) Carte 119 — « Trovami un numero, che trattone il mezzo, e di quello che resta trattone il terzo, e di quello che resta il quarto, sia 144 ».

La risoluzione geometrica appartiene a quel metodo che gli antichi dicevano di *falsa posizione.*

(2) Carte 119 — « Uno s'accorda a servire un Patrone per 60 giorni, con patto che 'l giorno che lavora habbia baiocchi 22, et il giorno che non lavora esso paghi al patrone per le sue spese baiocchi 12; nel fine del tempo costui, fatto suo conto, non hebbe nè credito nè debito col patrone. Si domanda quanti giorni lavorò ».

(3) Questa seconda risoluzione traduce infatti la formula $ac = (b + c)x$. che risolve l'equazione $bx = c(a - x)$ del problema proposto.

. c ., che non importa, ma dato che sia pari alla . c ., et dal punto . l . si tiri la . l . p ., che sia pari alla . c . et . b ., cioè la . l . o . alla . c . et . o . p . alla . b ., et facciasi il circulo che tocchi le tre estremità . i . . p . m .: poi allungasi . p . l . sino alla circonferentia . n ., et facciasi . l . k . pari alla . l . n . dico la . i . k ., et . k . l . essere le due parti addimandate, come si può vedere col numero.

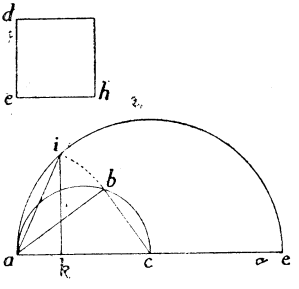


Facendo, che . a . sia 11; . b . 6 ., . c . 4, che la . i . h . sarà 11, la . l . m . 4, la . l . o . sarà pure 4, et la . o . p . 6, che è pari alla . b .; la . l . n . sarà $4\frac{2}{5}$, che tanto può essa in . l . p ., che è 10 quanto . i . l . in . l . n ., la . k . l . sarà pur $4\frac{2}{5}$, et . i . k . $6\frac{3}{5}$, che in tutte sono 10. Hora vedasi se tanto fa a moltiplicare la . k . l . in . b ., quanto . i . k . in . c . che moltiplicato $4\frac{2}{5}$ via 6 fa $26\frac{2}{5}$, et a moltiplicare $6\frac{3}{5}$ via 4 fa pure $26\frac{2}{5}$, che è quanto si è addimandato.

§ [79]. *Voglio dividere la linea . a . c . in due tal parti, che, fatto di ciascuna di esse un quadrato, il maggiore superi il minore di tanto quanto è la superficie . d . e . h ..*

Riducasi prima la superficie . d . e . h . in superficie quadrata se ella non sarà, ma dato, che sia, facciasi sopra la . a . c . il semicirculo . a . b . c . et tirasi la linea . b . c . pari alla . d . e ., lato del quadrato . d . e . h ., et dal punto . b . tirasi la . b . a .: poi allungasi la . a . c . sino in . e . facendo *C. 192,*

. c . e . pari alla . a . c . , et sopra tutta la linea . a . e . si faccia il semicirculo . a . i . e . , et dal punto . a . si tiri la . a . i . , che sia pari alla . a . b . , et dal punto . i . si tiri la perpendicolare . i . k . sopra la . a . c . dico la linea . a . c . essere divisa nel punto . k . nelle due parti cercate: come si può vedere col numero.



Et dato che . a . c . sia 10, et la superficie . d . e . h . 36 il suo lato . d . e . sarà 6, et il medesimo sarà . b . c . , et . a . b . sarà 8, che tanto è il quadrato . a . b . et . b . c . aggiunti insieme, quanto il quadrato di . a . c . , et la . c . e . sarà 10 per essere pari alla . a . c . , et tutta la . a . e . sarà 20, la . a . i . 8, per essere pari alla . a . b . , et la . a . k . sarà $3\frac{1}{5}$ perchè tanto può . a . k . in . a . e . , quanto . a . i . in se, per essere . a . i . media proportionale fra . a . k . , . a . e . , et per farne la prova vedasi quanto è la . k . c . , che essendo . a . c . 10, et . a . k . $3\frac{1}{5}$. k . c . sarà $6\frac{4}{5}$, et il quadrato di . a . k . sarà $10\frac{6}{25}$, et il quadrato di . a . c . sarà $46\frac{6}{25}$, che tratto l'uno dell'altro resta 36, che è pari alla superficie . d . e . h . , come fu addimandato.

Et questa è la 30 del terzo, che dice: *Fami di 12 due parti, che li lor quadrati...* (1).

---

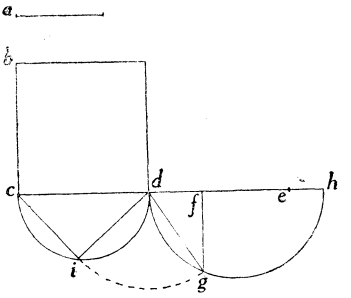
(1) Carte 119 — « Fami di 12 due parti, che li lor quadrati tratti l'uno da l'altro, resti 8 ».

La costruzione è traduzione diretta della equazione del problema:

$$2\overline{ac} \,.\, x = \overline{ac}^2 - deh = \overline{ac}^2 - \overline{bc}^2 .$$

§ [80]. *Voglio trovare due linee, che una sia maggiore dell'altra, quanto è la linea . a ., et che il quadrato fatto della maggiore superi il quadrato fatto de la minore, quanto è la superficie . b . c . d ..*

Se detta superficie non sarà quadrata si ridurrà a quadrato; ma, se la proposta sia quadrata, facciasi sopra il lato . c . d . il semicirculo . c . i . d ., et tirasi la . c . i . pari alla . a . et dal punto . i . tirasi la . i . d .: poi allungasi la . c . d . sino in . h . facendola pari al doppio della . a ., et sopra detta . d . h . si faccia il semicirculo . d . g . h ., et dal punto . d . si tiri la . d . g . pari alla . d . i ., et dal punto . g . si tiri la perpendiculare . g . f . sopra la . d . h . dico . d . f . essere una delle linee cercate; che, fatta . f . e . pari alla . a ., dico tutta la . d . e . essere l'altra. C.192v.

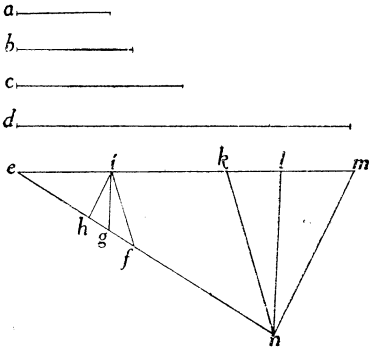


Come si può vedere col numero. Dato, che la linea . a . sia 6 il quadrato . b . c . d . 100, che il suo lato . c . d . sarà 10, la . c . i . 6 per essere pari alla . a ., et la . i . d . sarà 8, che si vede che il quadrato di essa . d . i . con il quadrato della . c . i . sono pari al quadrato della . c . d ., et l'angolo . i . essere retto per essere nel mezzo circulo, et la . d . h . è 12 perchè è doppia alla . a ., et la . d . g . è 8 perchè è pari alla . d . i ., et la . d . f . è $5\frac{1}{3}$ che tanto può . d . f . in . d . h . quanto . d . g . in se, et essendo . e . f . 6 per esser pari alla . a . tutta la . e . d . sarà $11\frac{1}{3}$. Come per farne la prova quadrasi la . f . d ., fa $28\frac{4}{9}$, et quadrata la . e . d . fa $128\frac{4}{9}$, che tratto i minore del maggiore resta 100, che è pari alla superficie . b . c . d .

come si cercava. Et notasi, che se la . *c* . *d* . sarà minore della . *a* . si cercarà l'impossibile.

Et questa dimostratione nasce dalla regola trovata per Algebra nella dimanda 32 del Terzo, che dice: « *Trovami due numeri, che uno sia 4 più dell' altro...* » (1).

§ [81]. *Voglio dividere la linea . e . n . in quattro parti tali, che la prima sia in proportione a l' altre tre, come la . a . alla . b . ; et la seconda sia in proportione a l' altre tre, come la . a . alla . c . ; et la terza sia in proportione a l'altre tre, come la . a . alla . d . , et la quarta il restante; addimandasi la divisione di detta linea.*



Tirasi la . *e* . *m* . facendo . *e* . *i* . pari alla . *a* . , la . *i* . *k* . pari . *b* . , la . *i* . *l* . pari alla . *c* . et la . *i* . *m* . pari alla . *d* . ; et dalli tre punti . *k* . *l* . *m* . si tiri tre linee, che vadino al punto . *n* . , et dal punto . *i* . si tirino le altre tre, cioè . *i* . *f* . , . *i* . *g* . , et . *i* . *h* . in tal modo che . *i* . *f* . sia parallela alla . *k* . *n* . ; la . *i* . *g* . sia parallela alla . *l* . *n* . , et la . *i* . *h* . alla . *m* . *n* . ; dico le tre linee . *e* . *f* . , . *e* . *g* . , et . *e* . *h* . essere le tre prime parte che ag-

(1) Carte 119, *v*. — « Trovami due numeri, che uno sia 4 più dell' altro et che li loro quadrati, tratti l' uno d' altro, resti 32 ».

Questa costruzione traduce fedelmente la equazione del problema:

$$(a + x)^2 - x^2 = \overline{cd}^2 ,$$

cioè:

$$2ax = \overline{cd}^2 - a^2 .$$

giunte tutte tre in lungo, et tagliato della linea . *e* . *n* ., il restante sarà la quarta. Ma se dette tre parti saranno eguale o maggiore della . *e* . *n* . si tratterà dal impossibile. C. 193.

Come si può vedere col numero. Sia la linea . *a* . 1, la linea . *b* . 3, la . *c* . 4, et la . *d* . 5, et la . *e* . *n* . 12, la . *e* . *i* . sarà 1, la . *i* . *k* . per essere pari alla . *b* . sarà 3, la . *i* . *l* . 4 per essere pari alla . *c* ., la . *i* . *m* . 5 per essere pari alla . *d* ., che tirate le parallele come è stato detto, la . *f* . *e* . sarà 2, che è in proportione alla . *f* . *n* ., come la . *e* . *i* . alla . *i* . *m* .; et la . *e* . *g* . sarà $2\frac{2}{5}$, et sarà in proportione alla . *g* . *n* ., come è la . *c* . *i* . alla . *i* . *l* .; et la . *e* . *h* . sarà 3, che è in proportione alla . *h* . *n* ., come la . *e* . *i* . alla . *i* . *k* ., che aggiunte insieme fanno $7\frac{2}{5}$, che cavato della . *e* . *n* . resta $4\frac{3}{5}$, et tanto sarà la quarta; et se il $7\frac{2}{5}$ fusse stato pari o maggiore di 12 tale divisione era impossibile.

Et questa è la 34 del terzo, che dice: « *Quattro hanno a partire....* » (1).

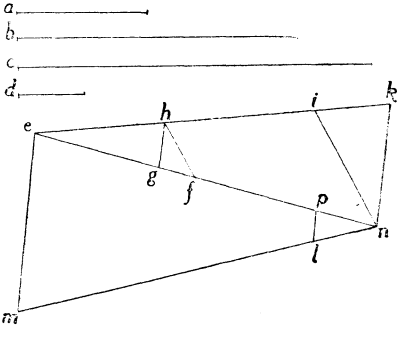
§ [82]. *Egli è una linea di tale lunghezza, che, tagliatone due pezzi, uno è in proportione a tutta la linea come la . a . alla . b . è l'altro è in proportione al tutto, coma la . a . alla . c . et il restante è pari alla . d .*

Pigliasi una linea a beneplacito, et sia la . *n* . *e* ., et dal punto . *e* . tirasi la . *e* . *k* . facendo . *e* . *h* . pari alla . *a* ., et . *e* . *i* . pari alla . *b* ., et . *e* . *k* . pari alla . *c* ., et dal punto

---

(1) Carte 120 — « Quattro hanno a partire danari, cioè scudi 200, il primo ne dee avere il terzo de gli altri tre, il secondo il quarto de gli altri tre, il terzo il quarto de gli altri tre, il quarto il resto. Dimando quanto ne tocca per uno ».

. *k* ., et . *i* . tirasi le due linee . *k* . *n* ., et . *i* . *n* ., et dal punto . *h* . tirasi la . *h* . *f* . parallela alla . *i* . *n* ., et la . *h* . *g* . parallela alla . *k* . *n* ., et facciasi . *g* . *p* . pari alla . *e* . *f* ., et dal punto . *n* . tirasi la . *m* . *n* . facendo . *n* . *l* . pari alla . *d* .,



et dal punto . *p* . tirasi la . *p* . *l* ., et dalla . *e* . la . *e* . *m* . che gli sia parallela; dico la . *m* . *n* . essere la linea addimandata.

Come si può vedere col numero. Sia la . *a* . 1, la . *b* . 5, la . *c* . 6, la . *d* . 4, et la . *e* . *n* . 6, la . *e* . *h* . sarà 1, et . *e* . *i* . 5; . *e* . *k* . 6, la . *e* . *f* . sarà 1, che è in proportione alla . *e* . *n* ., come è la . *e* . *h* . alla . *e* . *k* . et la . *e* . *g* . sarà $1\frac{1}{5}$, che sarà in proportione alla . *e* . *n* ., come la . *e* . *h* . alla . *e* . *i* ., et . *g* . *p* . sarà pure 1 per essere pari alla . *e* . *f* ., et tutta la . *e* . *p* . sarà $2\frac{1}{5}$, et . *p* . *n* . $3\frac{4}{5}$, la . *l* . *n* . 4, che è pari alla . *d* .; tutta la . *m* . *n* . sarà $6\frac{6}{19}$ acciochè habbia tale proportione la . *l* . *n* . alla . *m* . *n* ., come . *n* . *p* . alla . *n* . *e* .. Et, per farne la prova, dato che . *e* . *n* . fusse $6\frac{6}{19}$, . *e* . *f* . sarà

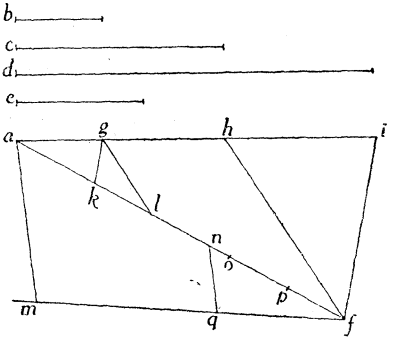
C. 193 v. $\frac{1}{19}$, et . *e* . *g* . $1\frac{5}{19}$, . *g* . *p* . sarà $1\frac{1}{19}$ per essere pari alla . *e* . *f* .,

et tutta . *e* . *p* . sarà $2\frac{6}{19}$, che tratta della . *e* . *n* ., resta 4 per la . *p* . *n* ., che è pari alla . *d* ., come si è addimandato.

Et questa è la 36 del terzo, che dice: « *Uno compera una casa il terzo....* » (1).

§ [83]. *Egli è una linea della quale tagliatone due parti, che siano in proportione al tutto come la . b . alla . c . et la . b . alla . d ., et del restante di detta linea pigliatone il mezzo et aggiunto al primo pezzo, è pari alla . e .: addimandasi la lunghezza di detta linea.*

Per trovare tal linea: pigliasi una linea a beneplacito, et sia . *a* . *f* ., et dal punto . *a* . tirasi la . *a* . *i* . facendo . *a* . *g* . pari alla . *b* ., et la . *h* . *a* . pari alla . *c* ., et la . *a* . *i* . pari alla . *d* .: poi tirasi la . *i* . *f* ., et . *g* . *k* ., che siano parallele fra di loro, et la . *h* . *f* ., et . *g* . *l* ., che siano anch' elle parallele fra di loro ; . *a* . *l* ., et . *a* . *k* . saranno li due pezzi da tagliarsi ; che aggiunti in lungo saranno la . *a* . *o* ., et il pezzo rimanente sarà la . *f* . *o* ., che divisa in due parti pari il punto . *p* ., et fatto la . *p* . *n* . pari alla . *l* . *a* ., primo pezzo



(1) Carte 120, *v*. — « Uno compera una casa il terzo e il quinto di tutti li suoi denari, et pagato che hebbe la casa, gli restarono scudi 200. Addimando quanti scudi haveva, et quanti costi la casa ».

La costruzione geometrica è fondata sulla equazione $x - \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)x = d$, e procede col *metodo delle figure simili*, corrispondente al metodo aritmetico di falsa posizione.

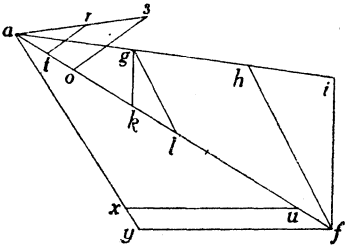
tagliato, tutta la linea . *n* . *f* . ha da essere pari alla . *e* ., et non essendo tirasi la . *f* . *q* . pari alla . *e* .; et dal punto . *n* . al punto . *q* . tirasi la . *n* . *q* .; et dal punto . *a* . tirasi la . *a* . *m* ., che gli sia parallela, et allungata la . *f* . *q* . sino, che si taglierà in punto . *m* . con la . *a* . *m* .; dico la . *m* . *f* . essere la linea addimandata.

Come si può vedere col numero. Et dato che la linea . *b* . sia 2, la . *c* . 12, la . *d* . 20, la . *e* . 10, et la . *a* . *f* . 15, la . *a* . *g* . sarà 2 per essere pari alla . *b* ., la . *a* . *h* . 12, per essere pari alla . *c* ., la . *a* . *i* . 20, per essere pari alla . *d* ., la . *a* . *k* . sarà $1\frac{1}{2}$, che è in proportione alla . *a* . *f* . come . *a* . *g* . alla . *a* . *i* ., et la . *a* . *l* . sarà $2\frac{1}{2}$, che è in proportione alla . *a* . *f* ., come la . *a* . *g* . alla . *a* . *h* ., et la . *f* . *o* . sarà 4 perchè è pari alla . *a* . *k* . et alla . *l* . *a* ., et la . *p* . *f* . sarà 2 per essere il mezzo di . *f* . *o* ., et la . *p* . *n* . sarà $2\frac{1}{2}$ per essere pari alla . *a* . *l* ., che tutta la . *f* . *n* . sarà $4\frac{1}{2}$, et la . *f* . *q* . 10, per essere pari alla . *e* ., et la . *q* . *m* . sarà $23\frac{1}{3}$, che tal proportione è dalla . *f* . *n* . alla . *f* . *q* . quale è dalla
C. 194. . *f* . *a* . alla . *f* . *m* . la quale è $33\frac{1}{3}$. Et per farne la prova, dato che la linea . *a* . *f* . sia $33\frac{1}{3}$ la . *a* . *k* . sarà $3\frac{1}{3}$, et la . *a* . *l* . $5\frac{5}{9}$, et la . *f* . *o* . $8\frac{8}{9}$, la . *p* . *f* . $4\frac{4}{9}$, et la . *p* . *n* . $5\frac{5}{9}$, che tutta la . *n* . *f* . è 10, che è pari alla . *a* . *e* .: Et notasi, che se li due pezzi . *a* . *l* ., et . *a* . *k* . saranno pari o maggiori della . *a* . *f* . si tratterà del impossibile.

Et questa dimanda nel terzo è la 37, che dice: « *Egli è un vitello, che il capo pesa....* » [1].

§ [84]. *Egli è una linea della quale ne voglio tagliare due pezzi, come della sopradetta, et del restante ne voglio tagliare un pezzo, che sia in proportione al tutto come la .f. alla .e., et questo pezzo, aggiunto con li due tagliati prima, facciano una linea pari alla .g.; addimandasi la lunghezza di tale linea.*

Facciasi, come di sopra trovando li due pezzi .a.l., et .a.k.; che fatto .o.f. pari a detti due pezzi, si dividerà la .a.o. secondo la proportione addimandata, facendo .a.r. pari alla .f., et la .a.s. pari alla .e., et .a.t. sarà il pezzo tagliato, che si aggiungerà con .a.l. et .a.k. facendo .t.u. pari alla .a.l., et .a.k., poi facciasi .a.x. pari alla .g.: tirando la .u.x. et la .f.y. parallele, dico la .a.y. essere la linea addimandata.



Come si può vedere col numero; facendo come nella passata, che .a.f. sia 15, la .f.o. 4 per essere pari alla .a.l., et .a.k., et .a.o. sarà 11, che dato che la .f. sia 3, et la .e. 12, la .a.t. sarà $2\frac{3}{4}$, che aggiunto con la .t.u. la

---

[1] Carte 121 — « Egli è un vitello, che il capo pesa il decimo di tutto il vitello, et le gambe piedi et coda pesano $\frac{1}{6}$ del vitello, et la metà del restante col capo pesa libre 100. Addimando quanto pesa tutto detto vitello ».

quale è pari a *f* . *o* . . sarà $6\frac{3}{4}$, et dato che la . *g* . sia $13\frac{1}{3}$ tanto sarà . *a* . *x* . per essere pari, et . *a* . *y* . sarà 30 per essere in proportione . *a* . *x* . alla . *a* . *y* . come la . *a* . *u* . alla . *a* . *f* ., et essendo . *a* . *y* . 30, . *a* . *l* . sarà 3, et . *a* . *k* . 5 per le proportioni dette nella passata, et . *a* . *o* . sarà 22, che diviso secondo la proportione, che è dalla . *f* . alla . *e* .; . *a* . *t* . sarà $5\frac{1}{2}$, che aggiunto con . *t* . *u* ., che è 8 per essere pari alla . *a* . *e* ., et alla . *a* . *k* ., fa $13\frac{1}{3}$, che è pari alla . *g* ., come fu addimandato.

Et questa dimanda nel terzo è 38, che dice: « *Uno ha un pesce, che il capo pesa il quarto....* » (1).

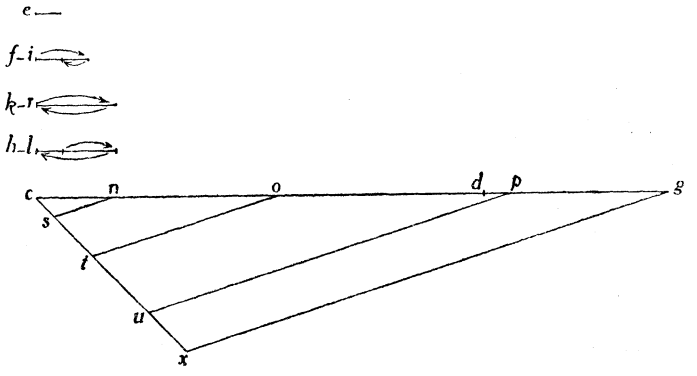
C,194v. [85]. *Voglio dividere la linea . a . in quattro parti, che la seconda sia due tanti della prima meno la linea . b .; la terza sia quanto la prima et seconda meno la linea . c .; la quarta quanto che è la differentia della prima et terza: si addimanda li tagli di detta linea.*

Pigliasi una linea per la prima parte come si voglia, et sia la . *e* . la quale si doppia, fa la . *f* ., che trattone la . *i* . pari alla . *b* . resterà la . *f* . meno la . *i* . et questa sarà la seconda; che aggiunte insieme, la . *e* . et la . *f* . saranno la . *k* ., meno una simile alla . *i* ., che trattone la . *c* . resta la . *k* . meno la . *r* . (la quale è pari alla . *i* ., et alla . *c* .) et questa sarà la terza, che trattone la . *e* . restarà la . *h* . meno la . *l* . et questa sarà la quarta: hora aggiungasi in lungo tutte tre queste linee

---

(1) Carte 121 — « Uno ha un pesce, che il capo pesa $\frac{1}{4}$ di tutto il pesce, et la coda $\frac{1}{5}$ di tutto il pesce, et il terzo del restante con la coda et capo pesa oncie 40. Si domanda quanto pesa il pesce ».

cioè . *i* ., . *r* ., et . *l* . con la . *c* . *d* . faranno la . *c* . *g* . la quale si dividerà secondo la proportione della . *e* ., . *f* ., . *k* ., et . *h* ., tirando la linea . *c* . *x* . facendo . *c* . *s* . pari alla . e . :



. *s* . *t* . pari alla . *f* .; . *t* . *u* . pari alla . *k* .; . *u* . *x* . pari alla . *h* ., et dal punto . *x* . tirasi la . *x* . *g* .; et dalli tre punti . *u* . *t* . *s* . tiransi le tre linee parallele alla . *x* . *g* . cioè . *u* . *p* ., . *t* . *o* .: et . *s* . *n* .; dico . *c* . *n* . essere la prima parte, et della . *n* . *o* . tagliatone la . *i* . il restante essere la seconda, et di . *o* . *p* . tagliatone la . *r* . il resto sarà la terza, et dalla . *p* . *g* . tagliatone una parte pari alla . *l* . il resto sarà la quarta.

Come si può vedere col numero. Dato che la . *b* . sia 1, la . *c* . 2, la . *e* . 1, et la . *c* . *d* . 17; la . *f* . sarà 2 cioè il il doppio della . *e* . meno 1 cioè la . *i* .; la . *k* . sarà 3, meno la . *r* ., che è 3; la . *h* . sarà 2, meno 3 cioè la . *l* ., (1) che sommato la . *i* . *r* . et . *l* . insieme fanno 7, che aggiunto con

(1) È da notare che, nell' esempio recato il *segmento* k *risulta nullo*, ed il **segmento** *h* **risulta negativo**, il qual fatto non apparisce come eccezionale o straordinario al BOMBELLI, avendo egli in precedenza dichiarato (carte 166 v.) che « *se si harà a cavare la maggiore della minore, si farà il medesimo, et quello che resta* **sarà meno** ».

17, fa 24, et tanto è la . *c* . *g* . la quale divisa secondo la proportione detta . *c* . *e* . farà 3; . *n* . *o* . 6, . *o* . *p* . 9, et . *p* . *q* . 6, che tratto della . *n* . *o* . 1 per la . *i* ., resterà 5 per la seconda, et tratto dalla . *o* . *p* . 3 per la . *r* ., resterà 6 per la terza, et della . *p* . *g* . trattone 3 per la . *l* . restarà 3, che è la quarta, che sommate tutte quattro insieme fanno 17, che è pari alla c. *d*., come fu proposto.

Et questa nel terzo è la 39, che dice: « *Uno ha quattro fiaschi....* » (1).

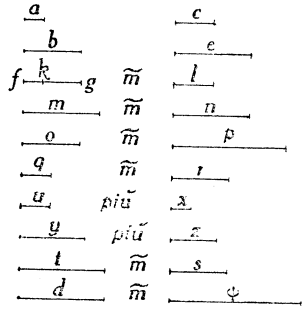
C. 195. § [86]. *Sono tre linee, delle quali due sono pari fra di loro, et se alle due pari se gli aggiunge un pezzo dell' altra, che sia in proportione a tutta come la . a . alla . b ., et di più un pezzo pari alla . c . il composto di tutta sarà il doppio del resto della tagliata; et se alla linea, che non è pari, se gli aggiunge una dell' altre due, et di tutte se ne leva un pezzo pari alla . e . et si aggiunge all' altra, et così tutta sia li* $\frac{2}{5}$ *del restante delle due: si addimanda la lunghezza di tale linee.*

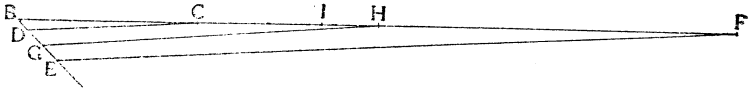
Pigliasi una linea a beneplacito la quale farà l'effetto che fa la cosa nel numero; et sia la *f* . *g* ., che tagliatone un pezzo che sia in proportione al tutto, come la . *a* . alla . *b* .; che facendo come si è mostrato nelle passate, . *f* . *k* . sarà il pezzo tagliato, et . *k* . *g* . sarà il pezzo che resta; che cavatone la . *e* . restaria . *k* . *g* . meno la . *l* ., la quale sia pari alla . *c* ..

Et notasi, che *mai le linee incerte, non si possano aggiungere nè cavare con le certe*, et la linea . *c* . è certa, come si vede, che duplicato la . *k* . *g* . meno la . *l* . farà la . *m* . meno

(1) Carte 121, *v*. — « Uno ha quattro fiaschi, che fra tutti tengono un barile, et il barile tiene 20 boccali, et il primo fiasco tiene una quantità di boccali, il secondo due tanti *m* . 2, il terzo quanto il primo et secondo *m* . 3, il quarto tiene quant' è la differenza dal primo al terzo ».

la . *u* . , che cavatone la . *f* . *k* . , et la . *c* . restarà la . *o* . meno la . *p* . ; et tanto sono le due linee pari : che divise egualmente ne varrà la . *q* . meno la . *r* . , che aggiuntoli la . *e* . , fa la . *u* . più la *x* che (triplicata) [moltiplicata per 5 et partita per 2]





fa la . *y* . più la . *z* . , et questo si salva ; et alla . *f* . *g* . aggiungasi la . *q* . meno la . *r* . , fa la . *t* . meno la . *s* . , che tratta la . *e* . resta la . *d* . meno la . ψ . , et è eguale alla . *y* . più la . *z* . ; et tratto la . *y* . della . *d* . et aggiunto la . ψ . alla . *z* . restarà la . *A* . eguale alla . *D* . *C* .

Et per agguagliare tirasi la . *B* . *E* . pari alla . *f* . *g* . , et la . *B* . *D* . pari alla . *A* . ; et dal punto . *C* . tirasi la . *C* . *D* . , et dal punto . *E* . tiraglisi la parallela tanto, che si tagli con la . *B* . *C* . sino che si taglieranno ; che sarà in punto . *F* . ; dico la . *B* . *F* . essere una delle tre linee, et è quella, che non è pari all' altre due ; et per trovare le due parti : facciasi la . *B* . *G* . pari alla . *q* . , et tirasi la . *C* . *G* . , et la . *E* . *H* . , *C. 195 v.*
che gli sia parallela la quale taglierà . *B* . *F* . in un punto . *H* . , et di tutta la . *B* . *H* . se ne levarà una parte pari alla . *r* . , et restarà la . *B* . *I* . la quale sarà una delle due linee pari.

Et tutta questa operatione è come la 41 del terzo, che dice: « *Due hanno denari, et trovano una borsa...* » (1).

Come si potrà vedere col numero. Dato, che la . *g* . *k* . sia 1, la . *b* . 3, la . *c* . 2, la . *e* . 4, et la . *f* . *g* . 3, che la . *g* . sarà 2, che cavatone la . *l* . pari alla . *c* ., restarà 2 meno 2, che duplicato la . *m* . sarà 4 meno la . *n* . che pure è 4, che tratto della . *m* . la *f* . *h* . restarà la . *o* ., che sarà 3, et tratto la . *c* . della meno . *n* ., che è 4 restarà la . *p* ., che è *meno b*, che pigliato il mezzo della . *o* ., et . *p* . ne verrà la . *q* . meno la . *r* . ; che una sarà $1\frac{1}{2}$, et l'altra 3, che aggiuntoli la . *e* ., che è 4 sarà la . *u* . *p* . la . *x* ., che una è $1\frac{1}{2}$, et l'altra 1, che moltiplicate per 5, et partito per 2, la . *y* . sarà $3\frac{3}{4}$ più $2\frac{1}{2}$ cioè la . *y* . et la . *z* . ; et aggiunto alla . *f* . *g* ., che è 3, la . *q* . meno la . *r* ., la . *t* . meno la . *s* . sarà $4\frac{1}{2}$ meno 3, che trattone la . *e* . la . *d* . sarà $4\frac{1}{2}$ meno la . ψ ., che è 7, che trattone la . *y* . la . *A* . sarà $\frac{3}{4}$ et tanto è la . *B* . *D* ., et la . *B* . *C* . sarà $9\frac{1}{2}$ cioè la . ψ ., et la . *z* ., et la . *B* . *E* . sarà 3 per essere pari alla . *f* . *g* ., la . *B* . *F* . sarà 38, che tale proportione

---

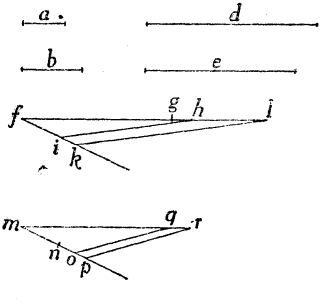
(1) Carte 122 — « Due hanno denari, et trovano una borsa ne la quale era tanti denari quanti haveva il primo, et dice esso primo a l'altro: se io havessi la borsa con 1 de' tuoi, et 2 più, io haveria duo tanti del tuo rimanente. Dice il secondo: se io havessi la borsa, con il dare a te 4 de' miei, io haverei due volte et mezzo quanto te. Si domanda quanti denari era ne la borsa et haveva ciascuno da se ».

Anche nella risoluzione di questo problema intervengono segmenti negativi e segmenti nulli.

haverà la . *B* . *D* . con la . *B* . *C* ., come la . *B* . *G* . con la . *B* . *F* ., et essendo . *B* . *G* . $1\frac{1}{2}$, la . *H* . sarà 19, che trattone la . *H* . *J* ., che è 3 per essere pari alla . *r* ., restarà 16 per la . *B* . *J* . ; et tanto saranno ciascuna delle due linee pari.

Et per farne la prova. Facciasi, che la . *f* . *g* . sia 38, come è la . *B* . *F* ., et il pezzo . *f* . *k* . sarà $12\frac{2}{3}$, che trattone la . *c* . restarà $23\frac{1}{3}$ l'altre due linee saranno 32, che aggiuntoli . *f* . *k* ., che è $12\frac{2}{3}$, et è tanto, quanto la . *c* . che è 2, fa $46\frac{2}{3}$, che è doppia a $23\frac{1}{3}$, et se alla maggiore cioè a 38 se gli aggiunge una delle due parti, che è 16, fa 54, che levatone 4 cioè quanto è la linea . *e* ., et dato all'altra fa 50, et 20 che si vede il 20 essere li $\frac{2}{5}$ di 50.

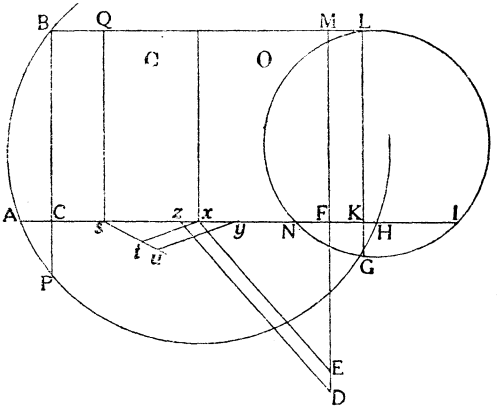
§ [87]. *Trovare due linee, che della prima, et della linea . a . fattone un parallelogrammo, et della seconda, et della . b . fattone un altro, et aggiunti insieme siano pari alla superficie . C ., et che di essa prima, et della linea . d . fattone un parallelogrammo, et della seconda, et della . e . fattone un altro, et aggiunti insieme siano pari alla superficie . O ..*



C. 196.

Tirasi la . *f* . *k* . pari alla . *b* ., la . *f* . *i* pari alla . *a* ., la . *f* . *h* . pari alla . *d* ., la . *f* . *g* . pari alla . *e* ., la . *m* . *o* . pari alla . *b* ., la . *m* . *n* . pari alla . *a* ., la . *m* . *r* . pari alla . *d* ., la . *m* . *q* . pari alla . *e* . ; et se le due superficie . *C* . et *O* . non

saranno poste fra due parallele, si ridurranno in modo, che sieno; et le due date saranno poste fra la . *B* . *L* ., et la . *C* . *K* . : poi tirasi la *s* . *u* . pari alla . *d* ., et la . *s* . *t* . pari alla . *a* ., et dal punto . *x* . tirasi la . *t* . *x* ., et dalla . *u* . la . *u* . *y* ., che siano parallele, et la . *x* . *F* . si allunga sino in . *K* ., et sia pari alla . *s* . *y* . ; et tirato l'altre due linee . *K* . *L* ., et



. *M* . *L* . si farà if parallelogrammo . *F* . *K* . *L* . : hora facciasi un parallelogrammo, che sia pari al parallelogrammo . *F* . *K* . *L* . sopra la linea . *g* . *l* ., che per essersi mostrato più volte il modo, non dirò come si faccia ; et tal linea sarà la . *K* . *N* ., et questa sarà la seconda linea ; et per trovare l'altra : tirasi la . *F* . *E* . pari alla . *e* ., et la . *F* . *D* . pari alla . *d* ., et dal punto . *x* . tirasi la . *x* . *E* ., et dal . *D* . la . *D* . *z* ., et allungasi la . *x* . *s* . sino . *C* . facendo la . *X* . *C* . pari alla . *z* . *F* ., et sopra la . *C* . *s* . facciasi il parallelogrammo . *s* . *C* . *B* . : hora facciasi un parallelogrammo sopra la linea . *n* . *p* ., che sia pari al parallelogrammo . *s* . *C* . *B* ., che fatto . *C* . *A* . pari alla . *n* . *p* . et . *C* . *p* . pari alla . *C* . *s* ., et fatto il circulo . *B* . *A* . *P* . *H* . ; la . *C* . *H* . sarà la prima linea.

Come si può vedere col numero. Dato, che la linea . *a* . sia 2, la . *b* . 3, la . *d* . 9, la . *F* . *M* . 10, la . *s* . *x* . 5, et la . *x* . *F* . 7, la . *f* . *i* . sarà 2, la . *f* . *k* . 3, per essere una pari C. 196 v.
alla . *a* . , et l'altra alla . *b* . , la . *f* . *h* . sarà 9, et la . *f* . *g* . 8 per essere una pari alla . *d* . , et l'altra alla . *e* . , la . *g* . *l* . sarà $4\frac{1}{2}$ per essere in proportione la . *f* . *h* . alla . *f* . *l* . , come la . *f* . *i* . alla . *f* . *h* . , et la . *m* . *n* . sarà 2, et la . *m* . *o* . 3, per essere una pari alla . *a* . , et l'altra alla . *b* . ; et la . *m* . *q* . sarà 8, et la . *m* . *r* . 9 per essere una pari alla . *e* . , et l'altra alla . *d* . ; et la . *s* . *t* . sarà 2, et . *s* . *u* . 3 per essere una pari alla . *a* . et l'altra alla . *b* . ; la . *x* . *y* . sarà $2\frac{1}{2}$ perchè tale proportione ha la . *x* . *y* . alla . *x* . *s* . , come la . *u* . *t* . alla . *t* . *s* . la . *x* . *K* . sarà $7\frac{1}{2}$ per essere pari alla . *y* . *s* . la . *F* . *K* . sarà $\frac{1}{2}$ per essere . *F* . *x* . 7, et la . *K* . *L* . sarà 10 per essere pari alla . *f* . *n* . , et tutto il parallelogrammo . *F* . *K* . *L* . sarà 5, che fatto la . *K* . *L* . pari alla . *F* . *K* . sarà $\frac{1}{2}$, et la . *K* . *I* . sarà $5\frac{1}{2}$ per essere pari alla . *g* . *l* . , la *K* . *N* . sarà $\frac{10}{11}$; et questa è la seconda linea perchè il produtto della . *K* . *N* . in la . *K* . *I* , è pari al produtto della . *L* . *K* . in la . *K* . *G* . : per trovare l'altra, la . *F* . *E* . sarà 8, et la . *F* . *D* . 9 per essere una pari alla . *e* . , et l'altra alla . *d* . , la . *X* . *Z* . sarà $\frac{7}{8}$ per essere in proportione la . *Z* . *x* . alla . *X* . *F* . , come la . *D* . *E* . alla . *E* . *F* . , la . *x* . *C* . sarà $7\frac{7}{8}$ per essere pari alla . *Z* . *F* . , et la . *s* . *C* . sarà $2\frac{7}{8}$ per essere . *s* . *x* . 5, et tutto il parallelogrammo . *B* . *C* . *s* . sarà $28\frac{3}{4}$, la . *C* . *A* . sarà $1\frac{3}{8}$ per essere

pari alla . n . p . la . C . P . sarà $2\frac{7}{8}$ per essere pari alla . c . s ., et la . C . H . sarà $20\frac{10}{11}$, che tanto può la . C . H . in la . C . A . . come la . B . C . in la . C . P .

Et per farne la prova moltiplicasi la . a . che è 2 via la . C . H ., che è $20\frac{10}{11}$ prima linea, fa $41\frac{9}{20}$, et moltiplicato la . d . che è 9 via la . K . N ., che è $\frac{10}{11}$, et è la seconda linea, fa $8\frac{2}{11}$, che aggiunto con $41\frac{9}{11}$, fa 50, che è pari al parallelogrammo . C . per essere la . x . s . 5, et la . s . Q . 10; et a moltiplicare la . b ., che è 3 via la . C . H ., che è $20\frac{10}{11}$, fa $62\frac{8}{11}$, et la . e . che è 8 via la . N . K ., che è $\frac{10}{11}$, fa $7\frac{9}{11}$, che aggiunti insieme fanno 70, che è pari alla superficie . O . per essere . x . F . 7, et . F . M . 10, come fu addimandato.

Et questa domanda nel terzo è la 42, che dice: « *Dieci cavalli et 25 asini...* » (1). Et notasi che se la linea . s . y . sarà pari o minore della linea . x . F . si tratterà del impossibile; et il medesimo se la . F . Z . sarà pari o minore della . s . x .

---

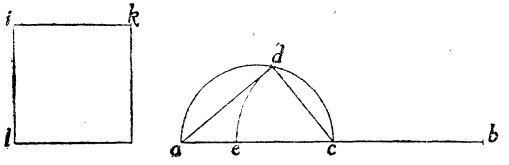
(1) Carte 122, *v*. — « Dieci cavalli, et 25 asini vagliono scudi 1000, et a quel medesimo prezzo cavalli 20 et asini 18 vagliono scudi 1500, dimandasi quanto valse un cavallo et uno asino ».

Qui si tratta di un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite, con *coefficienti letterali*, e precisamente del sistema che con simbolismo moderno si scrive:

$$\begin{cases} ax + by = C = \overline{BC} \cdot \overline{sx} \\ dx + ey = O = \overline{BC} \cdot \overline{xF}. \end{cases}$$

§ [88]. *Voglio dividere la linea . a . b . in due tal parti delle quali fattone un parallelogrammo sia pari alla superficie . l . i . k .*

Se detta superficie non sarà quadrato si ridurrà a quadrato, come si è mostrato, ma dato che sia quadrato, dividasi la linea . a . b . in due parti pari in punto . c ., et sopra la . a . c .



si faccia il semicirculo . a . d . c . nel quale tirasi la retta . a . d . pari al lato . i . k ., et dal punto . d . tirasi la . c . d . et facsiasi . c . e . pari alla . c . d .; dico il punto . e . essere il termine, che divide la linea nelle due parti addimandate ; come si può provare col numero. Sia la . a . b . 12 et la superficie . k . i . l . 24, il suo lato . k . i . sarà R 24 per essere la superficie C.197.

Il BOMBELLI costruisce la formula risolutiva generale

$$y = \frac{\left(\frac{d \,.\, \overline{sx}}{a} - \overline{xF}\right)\overline{BC}}{\frac{d \,.\, b}{a} - e}$$

costruendo prima a parte i segmenti :

$$\overline{gl} = \frac{b \,.\, d}{a} - e, \quad \overline{FK} = \frac{d \,.\, \overline{sx}}{a} - \overline{xF}$$

poi risolvendo la equazione ;

$$gl \,.\, y = \overline{FK},$$

che risulta dalla eliminazione della x.

Eguale procedimento serve per costruire il valore della prima incognita.

quadrata, et la . *a* . *c* . sarà 6 per essere il mezzo di . *a* . *b* ., et . *a* . *d* . sarà *R* 24 per essere pari a il lato . *i* . *k* . et la . *d* . *c* . sarà *R* 12 perchè tanto à da essere il quadrato della . *a* . *d* . aggiunto con il quadrato dalla . *d* . *c* . quanto il quadrato della . *a* . *c* ., che fatto la . *c* . *e* . *R* 12 cioè pari alla . *c* . *d* ., la . *a* . *e* . sarà 6 meno *R* 12, et . *e* . *b* . sarà 6 più *R* 12 cioè quanto è la . *c* . *b* . et la . *e* . *c* .. Et per farne la prova moltiplicasi la . *a* . *e* ., che è 6 meno *R* 12, via . *e* . *b* ., che è 6 più *R* 12, fa 24, che è pari alla superficie . *k* . *i* . *l* ., come fu addimandato.

Et notasi, che se il lato . *i* . *k* . sarà maggiore del diametro . *a c* . si tratterà del impossibile.

Et questa è la dimanda 47 del terzo, che dice: *Fami di 10 due parti...* (1).

---

(1) Carte 124 — « Fami di 10 due parti, che moltiplicate l'una via l'altra, faccia 16 ».

Dato il sistema $\begin{cases} x + y = \overline{ab} \\ xy = \overline{ik}^2 \end{cases}$.

La soluzione, semplice ed elegante, si ottiene ponendo

$$\overline{ab} = \left(\frac{\overline{ab}}{2} - z\right) + \left(\frac{\overline{ab}}{2} + z\right)$$

e determinando z in modo da rendere

$$\left(\frac{\overline{ab}}{2} - z\right)\left(\frac{\overline{ab}}{2} + z\right) = \overline{ih}^2 \text{ ; cioè } z^2 = \left(\frac{\overline{ab}}{2}\right)^2 - \overline{ik}^2 .$$

La risoluzione algebrica di questo problema si trova anche nel testo a stampa (*L'Algebra*) alle pagg. 447, 448.

Sia per il problema presente che per quelli che seguiranno la risoluzione algebrica del BOMBELLI procede per tre gradi di successiva generalizzazione. Si incomincia con la risoluzione algebrica di un esempio numerico, da cui si ricava la: *Regola generale,* valevole per tutti i casi analoghi, indipendentemente dal valore numerico dei coefficienti.

§ [89]. *Voglio dividere la linea . c . b . in due tal parti che fatto di ciascuna di esse un quadrato, et aggiunti insieme siano pari a un quadrato fatto sopra la linea . a .*

Facciasi sopra la . *b* . *c* . il semicirculo . *b* . *d* . *c* ., et sopra . *b* . *g* . mezzo della . *b* . *c* . facciasi il semicirculo . *b* . *f* . *g* . et nel maggiore si tiri la . *b* . *d* . pari alla . *a* ., et dal punto . *d* . tirasi la . *d* . *c* . sopra la quale facciasi il semicirculo . *d* . *e* . *c* ., et dividasi la circumferenza in due parti pari in punto . *e* .,

---

Per il presente problema la *Regola generale* è così enunciata: (Manoscritto Carte 124, *L'Algebra*, pag. 448).

« Se una quantità si ha a dividere in due parti che moltiplicato una via l'altra faccia un terminato numero, pigliasi il mezzo de la quantità che si ha a dividere e quadrasi, et del produtto se ne cava il terminato numero et di quello che resta si piglia il creatore, et si aggiunge al mezzo di detta quantità et la summa sarà una delle parti addimandate ».

In altri termini, e con notazioni moderne, posto $x + y = a$, $xy = b^2$, si ha $x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} + \frac{a}{2}$.

Ma il B. dà un ulteriore grado di generalizzazione nel quale la risoluzione algebrica, anche nella espressione letterale, si accosta al formalismo moderno.

Il BOMBELLI, infatti, si propone *equazioni nelle quali i coefficienti contengono simboli atti a rappresentare numeri indeterminati qualisivogliano,* (la cosa), *e le risolve con formule che esprimono i valori delle incognite in funzione delle indeterminate che figurano nei coefficienti.*

Nel caso presente il problema è posto nei termini seguenti:

« Fami di 12 . p. 1 $\underset{\smile}{1}$ due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra, faccino 10 ». Ed è risoluto mediante la formula:

$$6 \,.\, p \,.\, \frac{1\,\underset{\smile}{1}}{2}\, p \,.\, R \left| \underline{16 \,.\, p \,.\, 6\,\underset{\smile}{1} \,.\, p \,.\, \frac{1\,\underset{\smile}{2}}{4}} \right| .$$

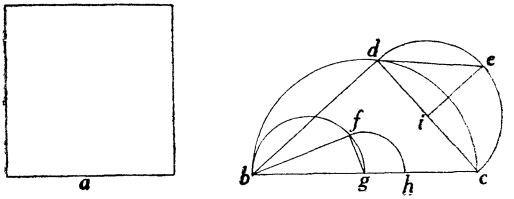
(Manoscritto, Carte 124: *Algebra*, pag. 448).

Cioè, con notazioni moderne, egli si propone un sistema della forma:

$$x + y = 12 + z$$

$$xy = 10$$

et tirasi la retta . *d* . *e* ., et facciasi . *b* . *f* . pari alla . *d* . *e* . et dal punto . *f* . tirasi la . *f* . *g* ., et facciasi . *g* . *h* . pari alla . *f* . *g* .; dico il punto . *h* . essere la divisione cercata, che, fatto un



quadrato sopra la . *b* . *h* . et uno sopra la . *h* . *c* ., et aggiunti insieme saranno pari a un quadrato fatto sopra linea . *a* .; Et notasi, ehe se la linea . *a* . sarà pari o maggiore della . *b* . *c* .
C. 197 *v*. si tratterà dell' impossibile, et così se la . *d* . sarà maggiore della . *b* . *g* . et *questa dimostratione è cavata dalla regola d'Algebra nella 49 dimanda del terzo* (1).

---

e scrive la formula di risoluzione:

$$x = 6 + \frac{z}{2} + \sqrt{16 + 6z + \frac{z^2}{4}}\,.$$

Infine, quando si tratta di *costruire il problema geometrico*, il BOMBELLI non fa che interpretare e tradurre geometricamente la *Regola generale* da lui trovata con algoritmo algebrico e, nella *Regola d'Algebra* egli trova ragione sufficiente alla dimostrazione del procedimento geometrico adoperato.

Questo procedimento logico è dunque perfettamente inverso a quello che gli antichi ed i suoi contemporanei (compreso lo stesso VIETA) seguivano nella loro: *Algebra Geometrica*, poichè qui non è più la costruzione geometrica che dimostra la validità dei risultati conseguiti col calcolo algebrico: ma è lo stesso algoritmo algebrico che interviene nei problemi geometrici e costituisce due delle parti essenziali della risoluzione: l'*Analisi* e la *Dimostrazione*.

(1) Carte 124, *v*. — « Fami di 12 due parti che li loro quadrati aggiunti insieme facciano 104 » (V. anche i nn. 50 e 51 a carte 125 e l'*Algebra* a pgg. 448, 449).

Come si può vedere col numero. Sia la . *b* . *c* . 12, et la superficie fatta sopra la . *a* . 100, che essendo quadrato la linea . *a* . sarà 10, et tanto è la . *b* . *d* . per essere pari alla . *a* .; la . *d* . *c* . sarà *R* 44 per essere il quadrato della . *b* . *d* . col quadrato della . *d* . *c* .; et per trovare la . *d* . *e* . trovasi la . *e* . *i* ., che sarà *R* 11 mezzo di . *d* . *c* . per essere la . *i* . centro del semicirculo, et la . *i* . *e* . sarà pure *R* 11, che aggiunto il suo quadrato col quadrato della . *d* . *i* . fanno 22, che il suo creatore è *R* 22, la . *b* . *g* . sarà 6, mezzo di . *b* . *c* .; et la . *b* . *f* . sarà R 22 per essere pari alla . *d* . *e* ., la . *f* . *g* . sarà *R* 14 per le ragion dette della . *d* . *c* .; et . *g* . *h* . sarà *R* 14, et tutta la . *b* . *h* . sarà 6 più *R* 14, et la . *h* . *c* . 6 meno *R* 14.

Et per farne la prova quadrasi . *b* . *h* ., et . *h* . *c* . ciascuna da se, et faranno 50 più *R* 2016, et 50 meno *R* 2016, che aggiunti insieme fanno 100, che è pari al quadrato fatto sopra la linea . *a* . come fu preposto.

§ [90]. *Sia la linea . b . c . la quale voglio dividere in due tal parti, che fatto di esse un parallelogrammo, sia pari a un parallelogrammo fatto delle lor differentie, et della linea . a . addimanandasi la divisione di detta linea.*

Proposto il sistema:

$$\begin{cases} x + y = \overline{bc} \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

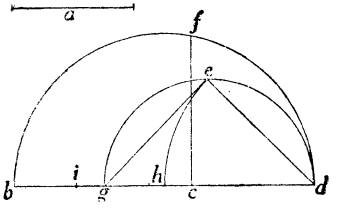
togliendo la seconda dal quadrato della prima si ottiene

$$2xy = \overline{bc}^2 - a^2 = \overline{dc}^2 \qquad xy = \frac{\overline{dc}^2}{2},$$

e si riconduce il problema a quello risoluto al n. precedente

Il BOMBELLI ha ben ragione di dire che *questa dimostratione è cavata dalla regola d'Algebra.*

Allungasi la . *b* . *c* . sino in . *d* ., et sia . *c* . *d* . pari alla . *a* ., et sopra tutta la linea . *b* . *d* . facciasi il semicirculo . *b* . *f* . *d* ., et tirasi dal punto . *c* . la perpendicolare . *c* . *f* . : poi dividasi . *c* . *b* . in due parti pari in punto . *g* ., et sopra la . *g* . *d* . si faccia il semicirculo . *g* . *e* . *d* ., et tirasi la . *g* . *e* . pari a la . *c* . *f* ., et dal punto . *e* . tirasi la . *e* . *d* ., et segnasi la . *h* . *d* . pari a la . *e* . *d* . la quale sarà minore della . *g* . *d* ., . *g* . *h* . : Et detta . *g* . *h* . sarà una delle parti addimandate, che fatta la . *b* . *i* . pari alla . *g* . *h* ., la . *i* . *c* . sarà l'altra parte.



Et questo modo nasce da lo operare d'Algebra a dividere un numero in due tal parti, che moltiplicata l'una via l'altra faccia tanto quanto le loro differentie moltiplicato per un dato
C. 198. *numero,* come dice la 52 del terzo (¹) ; et come ancora si può vedere col numero. Dato che la . *b* . *c* . sia 12, et la . *A* . 10, che fatto . *c* . *d* . pari a la . *a* . sarà pure 10 et per trovare la . *e* . *f* . si moltiplica . *b* . *c* . in . *c* . *d* ., fa 120, che il creatore è *R* 120, et tanto è . *e* . *f* . ; Come per la [8ª, del VI], che tanto può . *b* . *c* . in la . *c* . *d* . quanto . *c* . *f* .

(¹) Carte 125 — È dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y = \overline{bc} \\ xy = (x - y)\ a. \end{cases}$$

La risoluzione è suggerita dalla considerazione della

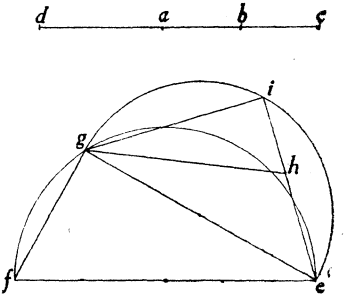
$$x^2 - (\overline{bc} + 2a)x + a\,.\,\overline{bc} = 0,$$

la quale richiede che si trovino due numeri la cui somma è $bc + 2a$, ed il prodotto è $a\,.\,bc$: (V. anche i nn. 53, 54, a carte 125. *v.*, e *L'Algebra* alle pp. 450, 451).

in se; et la . *g* . *c* . sarà 6 mezzo di . *b* . *c* . et tutta la . *g* . *d* . sarà 16 per essere . *c* . *d* . 10, che essendo . *g* . *e* . *R* 102 per essere pari alla . *c* . *f* ., la . *d* . *e* . sarà *R* 136 per essere l'angolo . *e* . retto, et tanto farà la . *d* . *h* ., che è pari alla . *d* . *e* ., che essendo tutta . *g* . *d* . 16, trattone la . *d* . *h* . resta 16 meno *R* 136, et tanto è la . *g* . *h* ., che è una parte; che tratta dalla . *b* . *c* ., che è 12 resta *R* 136 meno 4, che è l'altra parte, che moltiplicato l'una via l'altra fanno *R* 54400 meno 200, et questo è il parallelogrammo fatto di dette parti: per vedere se delle differentie loro fattone un parallelogrammo con la linea . *a* . gli sia pari. Cavasi 16 meno *R* 136 di *R* 136 meno 4, resta *R* 544 meno 20, che moltiplicato via la . *a* . cioè 10 fa *R* 54400 m. 200, che è pari, come si è mostrato al parallelogrammo fatto delle parti.

§ [91]. *Trovare due linee, che l'una sia maggiore dell'altra quanto è la linea . a . c ., et sopra ciascuna di esse fatto un quadrato et aggiunti insieme siano pari a un quadrato fatto sopra la linea . f . e .*

Per trovarle facciasi il semicirculo . *e* . *g* . *f* . sopra la linea . *e* . *f* . et tirasi la . *f* . *g* . pari a la . *a* . c ., et dal punto . *g* . tirasi la . *g* . *e* . sopra la quale, facciasi il semicirculo . *e* . *i* . *g* ., et dividasi la circonferenza in due parti pari in punto . *i* ., et tirasi la . *i* . *g* . et dal punto . *i* . tirasi la . *i* . *e* ., et segnasi . *i* . *h* . pari a la . *a* . *b* . mezzo della . *a* . *c* ., et dal punto . *g* . al punto . *h* . tirasi la retta . *g* . *h* ., et allungasi la . *a* . *c* . sino in . *d* . facendo la . *d* . *b* . pari a la . *g* . *h* .; dico la . *d* . *a* ., et la . *d* . *c* . essere le due linee addimandate.



Et il modo di ritrovarle nasce da la dimanda: « *Trovami*

due numeri, che uno sia maggiore dell'altro un dato numero: et che li lor quadrati aggiunti insieme facciano un assignato
C. 198 v. *numero* ». Come dice la 56 del terzo ([1]); et come ancora si può vedere col numero. Sia la linea . *a* . *c* . 4, et la . *e* . *f* . 8, che fatto il semicirculo . *f* . *g* . *e* ., et essendo . *e* . *f* . 8 la . *f* . *g* . 4, la . *e* . *g* . sarà *R* 48, che il suo quadrato aggiunto al quadrato della . *f* . *g* ., che è 16, fanno 64 quadrato della . *e* . *f* ., et la . *g* . *i* . et . *i* . *e* . saranno ciascuna da sè *R* 24, che li lor quadrati aggiunti insieme fanno 48, che è il quadrato della . *e* . *g* ., et essendo . *i* . *h* . 2, mezzo della . *a* . *c* ., il suo quadrato è 4, che aggiunto con 24 quadrato della . *g* . *i* . fa 28, et tanto è il quadrato della . *g* . *h* . per essere l'angolo . *i* . retto, che in lunghezza sarà *R* 28, et tanto è la . *d* . *b* ., che è pari alla . *h* . *g* ., che tutta la . *d* . *c* . sarà *R* 28 più 2 che è una parte, l'altra è *R* 28 cioè la . *d* . *b* ., et la . *a* . *b* ., che tratto dalla . *d* . *b* ., resta *R* 28 meno 2, et tanto è la . *d* . *a* .; che l'una è maggiore dell'altra la linea . *a* . *c* ., che è 4, et il quadrato della . *d* . *c* . è 32 più *R* 448, et il quadrato della . *d* . *a* . è 32 meno *R* 448 che aggiunte insieme fanno 64, et il medesimo è il quadrato fatto della linea . *e* . *f* ., che è longa 8.

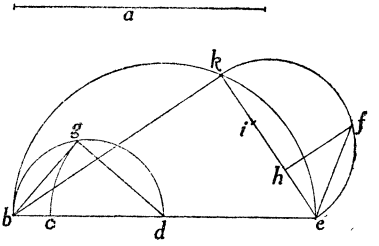
Et la regola di tal dimostratione nasce dalle regole dell'Algebra, come si può vedere nella 56 del terzo detta di sopra.

§ [92]. *Facciasi della linea . b . e . due tal parti, che fatti di esse parti due quadrati, et aggiunti insieme siano pari a un quadrato fatto della linea . a . col aggiungerli un parallelogrammo fatto delle due parti di detta linea.*

([1]) Carte 125 *v*. (V. anche i nn. 57-58 e *L'Algebra*, a pp. 447, 448). Si tratta qui del sistema:

$$\begin{cases} x - y = \overline{ac} \\ x^2 + y^2 = \overline{fe}^2 . \end{cases}$$

Facciasi il semicirculo . *b* . *k* . *e* . sopra la linea . *b* . *e* ., et tirasi la . *b* . *k* pari a la . *a* ., et dal punto . *k* . tirasi la . *k* . *e* .: poi dividasi la . *k* . *e* . in tre parti pari in punto . *h* ., et . *i* ., et sopra detta . *k* . *e* . facciasi il semicirculo . *k* . *f* . *e* ., et dal punto . *h* . si tiri la . *h* . *f* . ad angoli retti, et dal punto . *f* . tirasi la . *f* . *e* .: poi sopra la . *b* . *d* ., mezzo della . *b* . *e* ., si faccia il semicirculo . *b* . *g* . *d* ., et tirasi la . *b* . *g* . pari alla . *e* . *f* ., et dal punto . *g* . tirasi la . *g* . *d* ., et facciasi . *d* . *c* . pari alla . *g* . *d* .; . *b* . *c* . sarà una parte, et . *c* . *e* . l'altra.



Et tal regola nasce dalla operatione d'Algebra ne la domanda: « Fammi di un numero due tal parti, che li lor quadrati siano tanti, quanto a moltiplicare dette parti l'una via l'altra et al produtto aggiungere un terminato numero » (1). Dato, che la . *b* . *e* . sia 10, et la . *a* . 8, che, fatto il semicirculo, la . *b* . *k* . sarà pure 8 per essere pari alla . *a* ., et la . *k* . *e* . sarà 6, che divisa in tre parti pari . *e* . *h* . sarà 2, et *h* . *k* . 4, et . *h* . *f* . *R* 8, perchè tanto può la . *k* . *h* . in . *h* . *e* . quanto . *h* . *f* . in sè, et . *f* . *e* . sarà *R* 12, cioè il quadrato de la . *h* . *f* . che è 8 aggiunto con 4 quadrato della . *h* . *e* . per essere l'angolo . *h* . retto, che essendo la . *b* . *g* . *R* 12, che è pari alla . *f* . *e* ., et la . *b* . *d* . 5, la . *g* . *d* . sarà *R* 13 per essere l'angolo . *g* . retto, et fatto . *d* . *c* . pari alla . *g* . *d* ., la . *b* . *c* . sarà 5 meno *R* 13, et . *c* . *e* . sarà 5 più *R* 13 per essere C. 199.

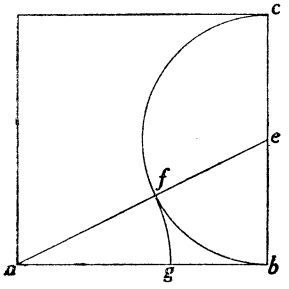
(1) Carte 126 e 126 *v*. — Problemi 59, 60, 61 (*Algebra*, pp. 459-460). Si tratta del sistema:

$$\begin{cases} x + y = \overline{be} \\ x^2 + y^2 = a^2 + xy. \end{cases}$$

. *d* . *e* . 5, et . *d* . *c* . *R* 13, che il quadrato della . *c* . *e* . sarà 38 più *R* 1300, et il quadrato . *c* . *b* . sarà 38 meno *R* 1300, che aggiunti insieme fanno 76, et questo ha da essere pari al parallelogrammo sopradetto, cioè alla moltiplicatione della . *b* . *c* . in . *c* . *e* ., che è 12, et al quadrato della . *a* ., che è 64, che aggiunti insieme fanno pure 76.

§ [93]. *Sia la linea . a . b . la quale si ha a dividere in due tal parti, che fatto di una et di tutta un parallelogrammo, sia pari a uno quadrato fatto sopra l'altra parte.*

Facciasi sopra essa linea . *a* . *b* . il quadrato . *a* . *b* . *c* ., et sopra la . *b* . *c* . facciasi il semicirculo . *b* . *f* . *c* ., et dal centro . *e* . tirasi la . *e* . *a* . la quale si taglierà col circulo in punto . *f* .: poi si faccia la . *a* . *g* . pari alla . *a* . *f* .; dico che nel punto . *g* . la linea è divisa secondo che si è proposto.

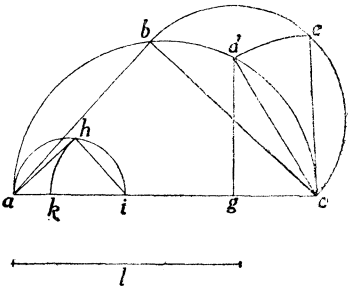


Come si può vedere col numero. Sia la . *a* . *b* . 12, la . *b* . *c* . sarà pure 12, la *b* . *e* . 6, et la . *e* . *f* . 6 per essere . *e* . centro del semicirculo, la . *a* . *e* . sarà *R* 180 cioè il quadrato della . *a* . *b* . aggiunto col quadrato della . *b* . *e* . per essere l'angolo . *b* . retto, et presone il creatore del tutto, che è, come è detto, *R* 180; et per trovare la . *a* . *f* .: cavasi di tutta la . *a* . *e* . la . *e* . *f* ., che è 6, resta *R* 180 meno 6, et tanto è la . *f* . *a* .; et tanto sarà la . *a* . *g* . per esserli pari, che tratta di tutta la . *a* . *b* ., che è 12, resta, 18 meno *R* 180, che è la . *g* . *b* .: et per farne la prova vedasi se il parallelogrammo fatto della . *g* . *b* ., et della . *b* . *a* . è pari al quadrato fatto della
C. 199 v. . *a* . *g* ., che moltiplicato . *a* . *g* . in sè fa 216 meno *R* 25920, et il medesimo fa la *a* . *b* . in la . *g* . *b* .; et questa dimostra-

tione nasce dall'Algebra. *Et è la 63 del terzo* (1), che dice: *Fammi di 10 due tal parti....*

§ [94]. *Sia dato la linea . a . c . la quale si habbia a dividere in tre parti continoe et proportionali, cioè in tal modo che tale proportione habbia la maggiore alla mezzana, come la mezzana alla minore, et che fatto di ciascuna di esse un quadrato, et aggiunti insieme siano pari al quadrato fatto sopra la linea . l .; addimandasi il modo di dividere detta linea.*

Facciasi il semicirculo *a . b . c .* sopra la linea *. a . c .* et tirasi la *. a . b .* pari alla *. l .*, et dal punto *. b .* tirasi la *. b . c .*, sopra la quale facciasi il semicirculo *. b . e . c .*, et dividasi la circonferenza *. c . b .* in due parti pari in punto *. e .*, et tirasi la *. c . e .*, poi facciasi la *. c . d .* pari alla *. c . e .*, et dal punto *. d .* si tiri la perpendiculare *. d . g .*; dico la *. g . c .* essere la parte mezzana: la quale se sarà maggiore della *. a . i .*, mezzo della *. a . g .*, si tratterà del impossibile, et sopra detta *a . i .* si faccia il semicirculo *. a . h . i .* et tirasi la *. a . h .* pari alla *. g . c .*, et dal punto *. h .* tirasi la *. h . i .*, et facciasi la *. i . k .* pari alla *. i . h .*; dico la *. a . k .* essere la parte minore, et la *. k . g .* la maggiore.



Come si può vedere col numero. Dato, che la linea *. a . c .* sia 14, et la *. l .* *R* 84, la *. a . b .* sarà *R* 84, per essere pari alla *. l .*, la *. b . c .* sarà *R* 112, per essere pari il qua-

(1) Carte 127 — « Fami di 10 due parti che tanto faccia a moltiplicare la maggiore in sè quanto la minore via detto 10 ».

Si tratta di trovare la *Sezione aurea di un dato numero*. Anche questo quesito è risoluto nei tre successivi gradi di generalizzazione (V. i problemi 63, 64, 65 alle carte 127, 127 *v.* e *L'Algebra* a pp. 468-469).

drato della . *b* . *c* . col quadrato della . *b* . *a* . al quadrato della . *a* . *c* ., et la . *c* . *e* . sarà *R* 56, per essere pari la . *c* . *e* . alla . *e* . *b* ., et li lor quadrati aggiunti insieme saranno pari il quadrato della . *b* . *c* ., et la . *c* . *d* . sarà *R* 56 per essere pari alla . *c* . *e* ., et la . *c* . *g* . sarà 4 perchè tanto può la . *c* . *g* . in la . *c* . *a* ., quanto la . *c* . *d* . in sè, la . *g* . *a* . sarà 10 per essere tutta la . *a* . *c* . 14, et la . *g* . *c* . 4, la . *a* . *i* .
C.200. sarà 5 per essere mezzo della . *a* . *g* . la . *a* . *h* ., sarà 4 per essere pari alla . *c* . *g* ., la . *h* . *i* . sarà 3 per essere il suo quadrato insieme col quadrato della . *a* . *h* . pari al quadrato della . *a* . *i* ., la . *i* . *k* . sarà 3 per essere pari alla . *i* . *h* ., et tutta la . *k* . *g* . sarà 8 per essere la . *i* . *g* . 5, et la . *k* . *a* . è 2 per essere la . *a* . *g* . 10.

Et per farne la prova: Quadrasi la . *g* . *c* .. fa 16, la . *g* . *k* . 64, et la . *a* . *k* . 4, che aggiunti insieme fanno 84, che è pari al quadrato della . *l* . come fu proposto. Et questa è la 68 del terzo, che dice: *Fammi di 14 tre parti continoe, et proportionali....*

Et la regola di tale demostratione nasce dall'Algebra, come è la regola 69, che dice: Se una quantità sarà divisa in tre parti continoe proportionali, che li lor quadrati aggiunti insieme facciano un dato numero, quadrasi la quantità, et del prodotto se ne cava il dato numero, et il resto si parte per il doppio della quantità, et lo avvenimento sarà la seconda parte (1):

---

(1) Carte 127 *v.*, 128, 128 *v.* — Come al solito in tre successivi gradi di generalizzazione ai nn. 68, 69, 70 (*L'Algebra*, pag. 481).

Dal sistema:

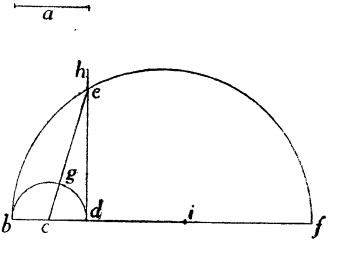
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + x + xy = \overline{ac} \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + x^2 + (xy)^2 = l^2 \end{cases}$$

dopo avere quadrato la prima si ricava $x = \dfrac{\overline{ac}^2 - l^2}{2ac}$; questo appunto esprime la *regola d' algebra*, e su questo è fondata la costruzione indicata.

si che essendo . *a* . *c* . la quantità, et il quadrato fatto sopra la . *l* . il dato numero, et essendogli . *a* . *b* . pari, il quadrato fatto la . *b* . *c* . sarà quello che resta, a cavare il dato numero del quadrato della . *a* . *c* .; et perchè dice, che il resto si à da partire per il doppio della quantità, non vuole dire altro, che fare sopra il doppio della . *a* . *c* . un parallelogrammo, che sia pari al quadrato fatto sopra la . *c* . *b* ., et per non havere a doppiare la . *a* . *c* . faccio un quadrato sopra la . *c* . *e* ., che viene ad essere il mezzo del quadrato fatto sopra la . *c* . *b* . però si ha da trovare un parallelogrammo fatto sopra la . *c* . *a* ., che sia pari al quadrato fatto sopra la . *c* . *e* ., che sarà la . *c* . *g* ., che tanto può la . *c* . *g* . in la . *c* . *a* . quanto la . *c* . *d* . in sè; et questa sarà la seconda, come dice la sopra detta regola; et per trovare l'altre due si farà della . *g* . *a* . due tal parti, che fattone di esse un parallelogrammo sia pari al quadrato fatto della . *c* . *g* ., che per essere stato detto a bastanza di tal divisione in altro luogo non starò a replicarlo.

§ [95]. *Voglio dividere la linea . b . f . in tre parti continue proportionali in tal modo che la parte minore sia pari alla . a .: addimandasi il modo di dividere detta linea.*

Facciasi la . *b* . *d* . pari alla . *a* . et dal punto . *d* . si tiri la perpendiculare . *d* . *h* ., et sopra la . *b* . *f* . facciasi il semicirculo . *b* . *e* . *f* ., che taglierà la . *d* . *h* . in punto . *e* ., et dividasi la . *b* . *d* . due parti pari in punto . *c* ., et tirasi la . *c* . *e* ., et sopra la . *b* . *d* . si faccia il semicirculo . *b* . *g* . *d* . che taglierà la . *c* . *e* . in punto . *g* .; dico la . *g* . *e* . essere la parte mezzana che, fatto la . *d* . *i* . pari alla . *g* . *e* ., la . *i* . *f* . sarà la parte maggiore.



C. 200 v.

Come si può vedere col numero. Sia la . *b* . *f* . 18, et la

. *a* . 3, la . *b* . *d* . sarà 3 per essere pari alla . *a* ., et la . *d* . *f* . sarà 15 per essere la . *b* . *f* . 18, la . *d* . *e* . sarà *R* 45, che tanto può la . *b* . *d* . in la . *d* . *f* . quanto la . *d* . *e* . in sè, la . *b* . *c* . sarà $1\frac{1}{2}$ per essere mezzo della . *b* . *d* ., et la . *c* . *e* . sarà *R* $47\frac{1}{4}$, perchè tanto può il quadrato della . *e* . *d* col quadrato della . *c* . *d* ., quanto il quadrato della . *c* . *e* .; et la . *c* . *g* . sarà $1\frac{1}{2}$, cioè pari alla . *c* . *d* . per essere . *c* . centro del semicirculo . *b* . *g* . *d* ., sarà *R* $47\frac{1}{4}$ meno $1\frac{1}{2}$, et il medesimo sarà la . *d* . *i* ., la . *i* . *f* . sarà il resto sino in 15 cioè $16\frac{1}{2}$ meno *R* $47\frac{1}{4}$.

Et questa è la dimanda 71 del terzo, che dice: *Fami di 18 tre parti continoe, et proportionali...*

Et la dimostratione nasce dalla regola 72, che dice: *Quando una quantità si haverà a dividere in tre parti continoe, et proportionali, et che la prima sia nota, per trovare l'altre due, cavasi la prima di tutta la quantità, et quello che resta si moltiplica via detta prima, et al produtto si aggiunge il quarto del quadrato della prima, et della somma pigliatone il creatore, del quale se ne cava il mezzo della prima, et il resto è la seconda parte* (1). Si che osservato il medesimo nelle linee si caverà la . *a* . della . *b* . *f* ., et si piglierà la media proportionale tra la . *b* . *d* ., et la . *d* . *f* ., che è . *d* . *e* ., che è il medesimo, come dire di moltiplicare la . *b* . *d* . via la . *d* . *f* ., et del produtto pigliarne il creatore, et il quadrato della . *c* . *d* . viene ad essere il quarto dal quadrato della . *b* . *d* . perchè essendoli . *c* . *d* . mezzo in lunghezza li sarà quarto in potentia, et la . *c* . *e* . sarà il creatore del quadrato

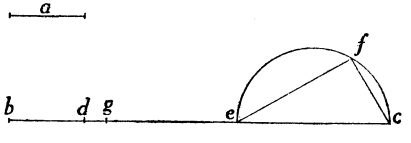
(1) Carte 128 *v.*, nn. 71, 72, 73, (*L'Algebra*, pag. 493).

della . *e* . *d* . col quadrato della . *c* . *d* . perchè tanto può la . *e* . *c* . quanto la . *e* . *d* ., et la . *d* . *c* .; et perchè dice, che di esso creatore se ne cava il mezzo della . *b* . *d* . tanto è a cavarne la . *c* . *g* . per esserli pari; et perchè dice, che il resto *C.201.* è la seconda, però in linee la . *g* . *e* . sarà la seconda, cavata della . *d* . *f* . ne resterà la terza.

Et notasi, che *se la . a . non sarà pari o minore della terza parte della . b . f . si tratterà del impossibile.*

§ [96]. *Voglio dividere la linea . b . c . in tre parti continoe, et proportionali in tal modo, che la . a . sia la media fra l'altre due: addimandasi il modo di dividere tale linea.* Facciasi la . *b* . *d* . pari alla . *a* . et sopra la . *c* . *e* ., mezzo della . *c* . *d* ., facciasi il semicirculo . *e* . *f* . *c* ., et tirasi la . *c* . *f* . pari alla . *a* ., et dal punto . *f* . tirasi la . *f* . *e* ., et la . *e* . *g* . che gli sia pari; dico la . *d* . *g* . essere la parte minore, et la . *g* . *c* . la maggiore.

Come si può vedere col numero. Sia la . *a* . 4, la . *b* . *c* . 14; la . *d* . *c* . sarà 10 per essere la . *b* . *d* . 4, et la . *b* . *c* . 14; la . *c* . *e* . sarà 5 per essere mezzo della . *d* . *c* .; la . *c* *f* . sarà 4 per essere pari alla . *a* ., la . *f* . *e* . sarà 3, per essere il quadrato della . *c* . *f* . et il quadrato della . *f* . *e* . pari al quadrato della . *c* . *e* .; la . *g* . *e* . sarà 3 per essere pari alla . *e* . *f* ., et tutta la . *g* . *c* . sarà 8 per essere la . *e* . *c* . 5, et la . *d* . *g* . sarà 2. *Et questa è la 74* del terzo che dice: *Fammi di 14 tre parti continoe, e proportionali...*



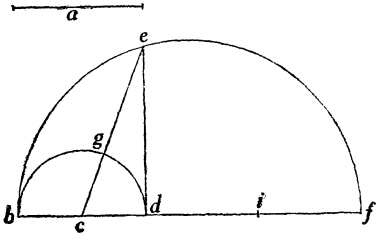
Et la dimostratione è la regola 75 cavata da l'Algebra nella detta 74 la quale dice: *Se una quantità si ha a dividere in tre parti continoe, et proportionali, et che la seconda parte sia nota, cavasi detta seconda di tutta quantità, et del resto*

pigliasene il mezzo, et quadrasi, et del produtto se ne cava il quadrato della seconda, et del resto se ne piglia il creatore, et cavasi del mezzo, che fu quadrato, et il resto sarà la prima parte, che aggiunto con la seconda, et tratto di tutta la quantità restarà la terza (1). Si che osservato il medesimo nelle linee si caverà la . *a* . della . *b* . *c* . et restarà la . *d* . *c* . ; et del quadrato della . *c* . *e* . mezzo di detto restocavato il quadrato della . *a* . ne restarà un quadrato fatto sopra la . *f* . *e* ., che cavato esso creatore della . *d* . *e* . ne restarà la . *g* . *d* ., che è la prima parte, che aggiunto con la . *a* ., cioè la . *b* . *d* ., che gli è pari sarà la . *b* . *g* ., che tratto della . *b* . *c* . ne restarà la . *g* . *c* . per la terza parte.

Et notasi, che *se la* . *a* . *sarà maggiore della terza parte*
C.201 v. *della* . *b* . *c* . *si tratterà del impossibile.*

§ [97]. *Voglio dividere la linea* . *b* . *f* . *in tre parti continoe, et proportionali che la maggiore sia la linea* . *a* .: *addimandasi il modo di dividere detta linea.*

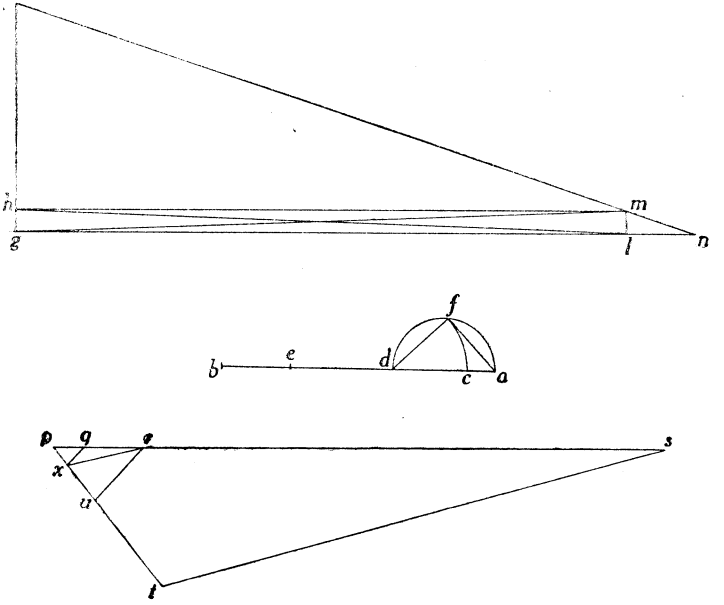
Facciasi sopra la . *b* . *f* . il semicirculo . *b* . *e* . *f* ., et facciasi la . *b* . *d* . pari alla . *a* ., et la . *b* . *d* . sia pari alla detta . *a* . [sic] sopra la quale si faccia il semicirculo . *b* . *g* . *d* ., et dal centro . *c* . si tiri la . *c* . *e* ., che taglierà il semicirculo in punto . *g* ., dico la . *g* . *e* . essere la parte media fra la maggiore, et la minore, che fatto . *d* . *i* . pari alla . *g* . *e* .; dico la . *i* . *f* . essere la parte minore; et questa è la 78 del terzo, che per essere la medesima che è la 71 non ne dirò altro perchè fra di loro non è differentia,



(1) Carte 129, nn. 74, 75 e 76, (*L'Algebra*, pag. 494).

se non che la linea . *a* . non può essere minore della terza parte della . *b* . *f* .

§ [98]. *Sia data la linea . a . b . la quale si habbia a dividere in tre parti continoe, et proportionali in tal modo, che trovato una linea che sia pari alla potentia della prima nella*



seconda, essendo la linea . o . la commune misura, et la detta linea moltiplicata via la terza faccia una linea pari alla . g . l .: Facciasi il parallelogrammo . *h* . *g* . *m* . *l* . facendo la . *m* . *l* . pari alla . *o* ., et per le regole date il suo creatore cubico sarà la . *l* . *n* ., et tanto è la seconda, cioè la media delle tre parti addimandate; che, fatto la . *e* . *b* . pari alla . *l* . *n* ., et nel resto procedendo, come nella passata, la . *a* . *c* . sarà la parte minore.

Come si può vedere col numero. Facendo che la . *g* . *l* . sia 27, et la . *a* . *b* 12, et la . *o* . 1, sempre per regola, la
C.202. . *l* . *n* . sarà 3, et il medesimo la . *e* . *b* . per essere pari alla . *l* . *n* ., la . *e* . *a* . sarà 9, la . *a* . *d* . $4\frac{1}{2}$, la . *f* . *a* . 3, la . *f* . *d* . *R* $11\frac{1}{4}$, la . *a* . *c* . $4\frac{1}{2}$ meno *R* $11\frac{1}{4}$, et tutte queste misure essendosi detto nelle due passate dove si cavano, non starò a replicarlo.

Et per farne la prova in geometria, et in numero. Tirasi la . *p* . *q* . pari alla . *a* . *c* ., la . *p* . *x* . pari alla . *o* ., la . *p* . *u* . pari alla . *l* . *n* ., et tirasi la . *x* . *q* ., et la . *u* . *r* . parallele fra di loro et facciasi la . *p* . *t* . pari alla . *e* . *c* ., et dal punto . *x* . al punto . *r* . si tiri la . *x* . *r* ., et dal punto . *t* . tirasi la . *t* . *s* ., che sia parallela alla . *x* . *r* .; dico la . *p* . *s* . à da essere pari a la . *g* . *l* .; et per vederlo con li numeri la . *p* . *q* . sarà $4\frac{1}{2}$ meno *R* $11\frac{1}{4}$ per essere pari alla . *a* . *c* . la . *p* . *x* . sarà 1, la . *p* . *u* . 3, per essere pari alla . *l* . *n* ., la . *p* . *t* . sarà $4\frac{1}{2}$ più *R* $11\frac{1}{4}$ per essere pari alla . *c* . *e* ., la . *p* . *r* . sarà $13\frac{1}{2}$ meno *R* $101\frac{1}{4}$ per essere tale proportione dalla . *p* . *x* . alla . *p* . *q* . come è dalla . *p* . *u* . alla . *p* . *r* ., la . *p* . *s* . sarà 27 per essere tale proportione dalla . *p* . *x* . alla . *p* . *t* ., come è dalla . *p* . *r* . alla . *p* . *f* . .

Et questa è la 80 del terzo, che dice: *Fammi di 12 tre parti continoe, et proportionali....*

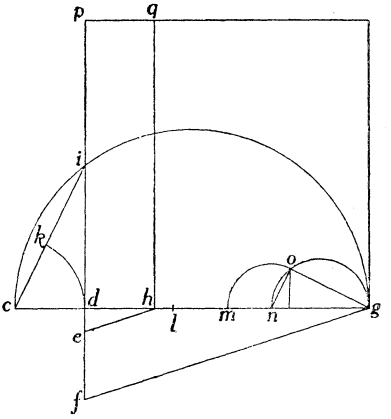
Et la dimostratione nasce dalla regola 81, *che per essere cosa ciarissima non starò a replicarlo* (1),

---

(1) Carte 129 *v*., 130, nn. 80, 81, 82, (*L'Algebra*, pp. 499, 500). « Se si harà a dividere una quantità in tre parti continoe et proportionali, che a moltiplicare la prima via la seconda et quello che fa la terza, et il produtto

§ [99]. *Sia data la linea . g . d . la quale si habbia a dividere in tre parti continoe, et proportionali in tal modo, che 'l quadrato fatto sopra la prima et il quadrato fatto sopra la terza aggiunti insieme, siano in proportione al quadrato fatto sopra la seconda, come la linea . b . alla linea . a . : addimandasi il modo di dividere detta linea.*

Tirasi la . d . e ., et la . e . f . facendo una pari alla . a ., C.202 v
et l'altra alla . b ., et dal punto . f . tirasi la . f . g ., et dal punto . e . la . e . h ., che gli sia parallela: poi allungasi la . g . d . sino in . c . facendo la . c . d . pari alla . d . h ., et sopra la . c . g . facciasi il semicirculo . c . i . g ., et dal punto . d . si tiri la perpendiculare . d . i ., et dal punto . i . tirasi la . i . c ., et facciasi la . c . k . pari alla . c . d .; dico la . i . k . essere la parte media delle tre addimandate.



Che, fatto la . d . l . pari alla . i . k . et divisa la . l . g . in punto . n . in due parti pari, et sopra la . n . g . si faccia il semicirculo, . n . o . g ., et dal punto . g . si tiri la . g . o . pari alla . d . l ., et dall' . o . si tiri la . o . n ., et facciasi . n . m .

---

havere ad esser pari a un dato numero. Pigliasi il creatore cubico dal dato numero, et quello sarà la seconda parte. Volendo poi trovare le altre due, facciasi come è stato detto ne la regola.... ».

Si tratta di risolvere le equazioni:

$$\begin{cases} x + xy + xy^2 = \overline{ab} \\ x^3y^3 = \overline{gl}. \end{cases}$$

pari alla . *n* . *o* ., la . *m* . *l* . sarà la parte minore, et la . *m* . *g* . la parte maggiore.

Come si può vedere col numero. Dato che la . *d* . *g* . sia 25, la . *a* . 2, la . *b* . 8; la . *d* . *e* . sarà 2 per essere pari alla . *a* ., la . *e* . *f* . sarà 8 per essere pari alla . *b* ., la . *d* . *h* . sarà 5, perchè tal proportione ha la . *d* . *h* . alla . *d* . *g* ., come ha la . *d* . *e* . alla *d* . *f* .; la . *d* . *c* . sarà 5 per essere pari alla . *d* . *h* ., la . *d* . *i* . sarà *R* 125 perchè tanto può la . *c* . *d* ., che è 5 in la . *d* . *g* . che è 25 quanto la . *d* . *i* . in sè; la . *c* . *i* . sarà *R* 150 perchè tanto è il quadrato della . *i* . *d* . aggiunto col quadrato della . *c* . *d* ., quanto il quadrato della . *c* . *i* .; la . *c* . *k* . sarà 5 per essere pari alla . *c* . *d* .; la . *k* . *i* . sarà *R* 150 meno 5; il medesimo sarà la . *d* . *l* .; la . *l* . *g* . sarà 30 meno *R* 150, la . *n* . *g* . sarà 15 meno *R* $37\frac{1}{2}$; la . *o* . *g* . sarà *R* 150 meno 5, che tratto il suo quadrato del quadrato della . *g* . *n* . restarà $87\frac{1}{2}$ meno *R* 3750, che il suo creatore è *R* $\left[87\frac{1}{2} \text{ meno } R\ 3750\right]$, et tanto è la . *n* . *o* ., et il medesimo la . *n* . *m* .; la . *m* . *l* . sarà 15 meno *R* $37\frac{1}{2}$ meno *R* $\left[87\frac{1}{2} \text{ meno } R\ 3750\right]$; la . *m* . *g* . sarà 15 meno *R* $37\frac{1}{2}$ più *R* $\left[87\frac{1}{2} \text{ meno } R\ 3750\right]$; che il quadrato della . *l* . *m* . aggiunto col quadrato della . *m* . *g* . sono in proportione al quadrato della . *d* . *l* ., come è la . *b* . alla . *a* .

Et questa è la 85 del terzo, che dice: *Fammi di 28 tre parti continoe, et proportionali...*

Et la dimostratione è cavata dalla sua regola ritrovata con l'Algebra, et è la 86 che dice: *Se una quantità si ha a dividere in tre parti continoe, et proportionali in tal modo, che 'l quadrato della prima, et terza aggiunti insieme siano pari*

al quadrato della seconda moltiplicato per un dato numero: quadrasi la quantità, et il produtto si parte per un più del dato numero, et salvasi lo avvenimento; poi duplasi la quantità, et si parte anch'ella per 1 più del dato numero, et de lo avvenimento se ne piglia il mezzo, et si quadra, et si aggiunge al numero serbato, et della somma se ne piglia il creatore et se ne cava il mezzo de lo avvenimento del duplato de la quantità, che fu quadrata, et il resto sarà la seconda parte (1). C.203.

---

(1) Carte 131 *v.*, 132, nn. 85, 86, 87, (*Algebra*, pp. 521, 522).

Notevole, per semplicità ed eleganza, il procedimento algebrico seguito dal BOMBELLI.

Indicata con x la seconda delle quantità cercate, le altre due avranno per somma $\overline{gd} - x$, e per prodotto x^2.

Esse saranno quindi espresse da:

$$\frac{\overline{gd} - x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{gd} - x}{2}\right)^2 - x^2}\,.$$

La somma dei loro quadrati sarà

$$4\left(\frac{\overline{gd} - x}{2}\right)^2 - 2\,x^2$$

e scrivendo che il rapporto di questa somma ad x^2 è $\frac{b}{a}$, si ha l'equazione:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)x^2 + 2\overline{gd}\,x - \overline{gd}^2 = 0$$

le cui radici sono date da

$$-\frac{\overline{gd}}{1 + \frac{b}{a}} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{gd}}{1 + \frac{b}{a}}\right)^2 + \frac{\overline{gd}^2}{1 + \frac{b}{a}}}$$

come appunto esprime la *Regola* del BOMBELLI.

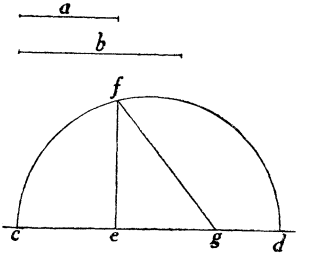
Et per dimostrare che nella figura non si è mancato di quanto dice la regola; dico la . *d* . *g* . essere la quantità proposta. Che, fatto sopra essa il quadrato . *g* . *d* . *p* . il quale diviso secondo la proportione, che è dalla . *b* . alla . *a* . perchè la . *b* . viene ad essere il dato numero, et la linea . *a* . la unità ne verrà il parallelogrammo . *d* . *h* . *q* . *p* . il quale sarà in proportione al parallelogrammo . *q* . *h* . *g* ., come è la . *d* . *h* . alla . *h* . *g* . perchè tutte due son poste fra le due parallele . *d* . *g* ., et . *p* . *r* ., et così si è partito il quadrato . *g* . *d* . *p* . *r* . per 1, più della linea . *b* ., che trovata la linea del quadrato che sia pari al parallelogrammo . *d* . *h* . *p* ., che essendo la . *d* . *g* . pari alla . *d* . *p* ., et la . *d* . *c* . pari alla . *d* . *h* . la . *d* . *i* . sarà il lato del quadrato addimandato. Et perchè dice, che si parti il doppio della . *d* . *g* . per la . *b* . *più 1*, cioè la . *a* ., che partita simplicemente ne viene la . *d* . *h* ., et se si partirà doppia ne verrà la . *h* . *c* ., che divisa in due parti, cioè la . *c* . *d* . et la . *d* . *h* ., che aggiunto il quadrato della . *c* . *d* . con il parallelogrammo . *h* . *d* . *p* . overo col quadrato fatto sopra la . *d* . *i* ., che l'uno, et l'altro è pari, come è stato detto il quadrato fatto sopra la . *c* . *i* . sarà pari a detti due quadrati aggiunti insieme; et perchè dice, che se ne piglia il creatore, che viene ad essere il lato: detto creatore sarà la . *c* . *i* ., che trattone il mezzo della . *c* . *h* . cioè la . *c* . *d* . resta la . *k* . *i* . per la parte media, come dice la regola, et per trovare l'altre due si terrà la strada, che è stata replicata più volte.

§ [100]. *Date le due linee . a . et . b . si addimanda quanto sarà maggiore la media della più corta.*

E di qui si vede come l'abitudine di risolvere equazioni con coefficienti letterali (funzioni dalla *cosa*) renda agevole al BOMBELLI la risoluzione di sistemi di equazioni di grado superiore al 1°.

Notevolissima anche la costruzione geometrica.

Tirasi la . *c* . *e* . *d* . facendo . *c* . *e* . pari alla . *a* ., et la . *e* . *d* . pari alla . *b* ., et sopra la . *c* . *d* . si faccia il semicirculo . *c* . *f* . *d* ., et dal punto . *e* . tirasi la perpendiculare . *e* . *f* . : poi vedasi quale è più corta o la . *c* . *e* . overo la . *e* . *d* ., che essendo la . *c* . *e* . si farà la . *e* . *g* . pari alla . *e* . *c* .; dico la . *g* . *f* . essere la linea addimandata et per essere cosa chiarissima non mi affaticarò nel metterla in numero.



C. 203 v.

Et è la 87 del Terzo, che dice: *Uno piglia ad interesse scudi 100...* (1).

§ [101]. *Voglio trovare cinque linee in continoa proportione, che la quinta cioè la maggiore sia più lunga della quarta la linea . a ., et che la proportione della prima alla quinta sia come dalla linea . b . alla linea . c . : addimandasi la lunghezza della quinta.*

Tirasi la . *d* . *p* . : poi facciasi la . *d* . *g* . pari alla . *c* ., et la . *g* . *h* . pari alla . *b* . et sopra la . *d* . *h* . facciasi il semicirculo . *d* . *k* . *h* ., et dal punto . *g* . si tiri la perpendiculare . *g* . *k* .; poi facciasi la . *g* . *i* . pari alla . *g* . *k* ., et sopra la . *d* . *i* . si faccia il semicirculo . *d* . *l* . *i* ., et allungasi la . *g* . *k* . sino alla circonferentia . *l* .; et tirasi la . *d* . *n* . pari alla . *d* . *g* ., et la . *n* . *m* . pari alla . *g* . *l* ., et la . *d* . *e* . pari alla . *a* ., et dal punto . *m* . al punto . *e* . si tiri la . *m* . *e* ., et dal punto . *n* . tirasi la . *n* . *o* . parallela alla . *m* . *e* .; dico la . *d* . *o* . essere la quinta linea, et la . *o* . *e* . la quarta.

---

(1) Carte 132 — « Uno piglia ad interesse scudi 100 per 2 anni a capo d'anno, et in capo di detti 2 anni, li restituì scudi 120. Addimando quanto sterono per cento ».

Et questa dimostratione è la 90 dimanda del terzo, che dice: Uno vivandiere porta una soma di vino... ([1]).

([1]) Carte 132, *v.* — « Uno vivandiere portando una soma di vino a uno essercito lontano quattro giornate, il primo giorno bevè bocali 4 di vino et poi riempì d'acqua, il secondo pure bevè 4 boccali di vino et pure riempiè d'acqua, et così fece il terzo e 'l quarto giorno. Quando fu giunto al campo, il vino era $\frac{1}{4}$ d'acqua. Addimandasi quanti boccali era la soma ».

« La regola di fare simili dimande senza positione è questa: Partire li boccali che bevè colui, per 1 . *m* . una sorta di Radici de la parte del vino mondo che era in detti barili, quando giunse in campo; et la sorte de la Radice che va per regola tratto di « 1 », si trova in questo modo: Vedasi quanti forno li giorni et la quantità di detti giorni si metta nel segno de la dignità; che come si è veduto di sopra, perchè erano 4 giorni, *sarà il presente segno* $\underline{4}$ *che è quello del Cen: censo*: però si piglia la Radice, Radice, et se i giorni fussero stati 3 si sarebbe pigliata la Radice Cuba » (Carte 133 . v.).

Indicando la progressione geometrica del problema col simbolo $\div\!\div\; xy^4 : xy^3 : \ldots$ $\ldots : xy : x$, si hanno le equazioni:

$$\begin{cases} y^4 = \dfrac{b}{c} \\ x - xy = a \end{cases}$$

cioè

$$y = \sqrt[4]{\frac{b}{c}}, \quad x = \frac{a}{1 - y}.$$

Per le costruzioni indicate, $\overline{lg} = \sqrt[4]{bc^3} = c\sqrt[4]{\frac{b}{c}} = cy$

$$y = \frac{\overline{gl}}{c}$$

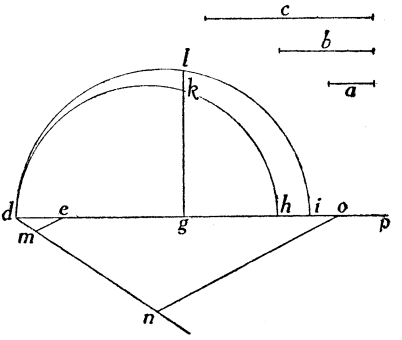
$$1 - y = \frac{c - \overline{gl}}{c}$$

$$x = \frac{a}{1 - y} = \frac{ac}{c - \overline{gl}}$$

$\frac{\overline{do}}{\overline{dn}} = \frac{\overline{de}}{\overline{dm}}$, cioè: $\overline{do} = \frac{ac}{c - cy}$, dunque $\overline{do} = x$.

Ed anche una volta faremo rilevare l'estrema semplicità ed eleganza di queste costruzioni.

Le cinque quantità vengano ad essere li quattro dì, che cavò il vino, la quinta viene ad essere tutta la quantità del vino, la linea . *a* . viene a servire per la quantità de boccali, che cavò ogni giorno ; la . *b* . si è la parte del vino che restò; et la . *c* . viene ad essere il tutto, che, posto che la quinta



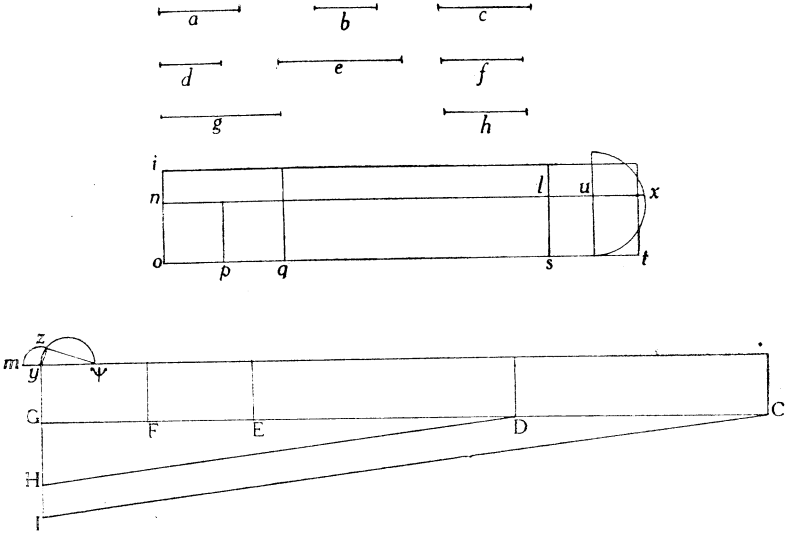
sia la . *d* . *g* ., cioè una cosa, la . *g* . *h* . sarà parte di cosa, che presone il creatore ne verrà la . *g* . *l* . la quale per regola si cava (come si vede in detta dimanda) della . *d* . *g* . che resta la . *d* . *m* . la quale ha da essere partitore della . *a* ., che come si vede ne viene la . *d* . *o* . ; et si come tale dimanda è difficile in numero così è difficile in linee a descriverla.

§ [102]. *Trovami tre linee con tale conditione, che la seconda sia il doppio della prima più la linea . a . ; et la terza sia tanto, che fatto di essa et della linea . b . un parallelogrammo, che sia pari al parallelogrammo fatto della prima et seconda, et aggiunte tutte tre insieme tale proportione habbia la prima al tutto, come la . c . alla . G . C . : addimandasi la lunghezza di ciascuna di dette linee.* C.204.

Pongasi la prima essere una linea come si voglia, ma per minore fastidio pongasi una che sia pari alla . *b* ., la quale sia la . *d* ., et questa sia la prima. La seconda sarà la . *e* .

più la . *f* . facendo, che la . *e* . sia il doppio della . *d* . la quale sia la cosa; la terza sarà la . *g* . più la . *h* ., ma la . *g* . sarà censi, et la . *h* . cose, et la . *g* . sarà pari in lunghezza alla . *e* ., et la . *h* . alla . *a* . .

Et perchè una sia censi, et l'altra cose lo chiarirò: se si farà della prima, et seconda un parallelogrammo tale parallelogrammo sarà censo più cose, cioè la parte che piglierà la

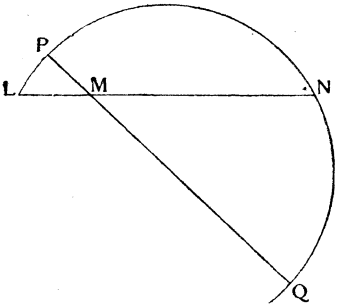


. *f* . per essere linea nota; et se sopra la . *b* . si farà un parallelogrammo che sia pari al parallegrammo fatto della prima et seconda, tal linea, che sarà detto parallelogrammo, sarà pari alla . *e* ., et . *f* . per essere la . *b* . pari alla . *d* .: ma per essere la . *b* . nota, et la . *d* . cose, la . *g* . sarà censi, et la . *h* . cose.

Che, aggiunte tutte tre insieme faranno la . *o* . *t* .: ma la
C. 204 v. . *o* . *q* . sarà censi, et . *q* . *s* . sarà cose, et sarà pari alla . *d* .,

et . *e* ., et . *h* ., la . *s* . *t* . sarà nota. Et perchè la domanda dice, che tale proportione haverà la prima a tutte tre, come la . *c* . alla . *G* . *C* . però il parallelogrammo fatto della . *o* . *t* ., et della . *c* . à ad essere pari al parallelogrammo fatto della . *G* . *C* ., et la . *d* ., che fatto il parallelogrammo . *t* . *i* . facendo . *o* . *i* . pari alla . *c* ., et il parallelogrammo . *C* . *y* . facendo . *y* . *G* . pari alla . *d* ., et detti parallelogrammi hanno ad essere eguali l'uno a l'altro: ma il parallelogrammo . *q* . *i* . sarà censi per esseri . *o* . *q* . censi, et . *o* . *i* . nota; la . *s* . *k* . sarà cose, et . *s* . *m* . sarà parallelogrammo noto.

Il parallelogrammo . *y* . *C* . sarà cose per essere la . *y* . *G* . cosa, et . *C* . *G* . nota, et per venire allo agguagliamento, facciasi la . *n* . *o* . pari alla . *b* ., et dal punto . *n* . tirasi la . *n* . *x* . parallela alla . *o* . *t* ., et si haverà il parallelogrammo . *t* . *n* ., et sarà eguale al parallelogrammo . *D* . *y* . perchè se ne leva la parte . *D* . *C* . per levarne proportionalmente, come si è levato del parallelogrammo . *t* . *i* . facendo . *G* . *I* ., et la . *G* . *H* . pari alla . *o* . *i* ., et *o* . *n* ., et tirato le due parallele . *I* . *C* ., et . *H* . *D* . che se ne verrà a levare il pezzo . *D* . *C* . come fu detto. Et perchè il parallelogrammo . *s* . *q* ., cioè fatto sopra la . *q* . *s* ., è cose, et la . *G* . *y* . è pari alla . *n* . *o* .. Hora levasi il pezzo . *D* . *E* . facendo pari la . *D* . *E* . alla . *s* . *q* ., et restarà il parallelogrammo . *q* . *n* ., censi, più il parallelogrammo . *E* . *y* .



Et per ridurre a uno censo facciasi la . *q* . *p* . pari alla . *d* ., et si haverà il censo fatto sopra la . *p* . *q* . più il parallelogrammo noto . *s* . *u* . (perchè si divide la . *s* . *t* . proportionalmente, come si è fatto la . *o* . *q* .) in punto eguale al pa-

rallelogrammo . F . Y . perchè ancora lui si divide in punto . F . secondo la proportione, che si ha detto, come si può vedere nella figura. Che, fatto la . y . ψ . pari al mezzo della . G . F ., et sopra essa fatto il semicirculo . y . z . ψ ., et tirasi la . z . ψ. pari alla . u . x ., la quale è il lato del quadrato, che è pari al parallelogrammo . s . u ., che per essersi detto più volte il modo, come si trova detta linea non l'ho voluto replicare; et punto . z . y ., et allungasi la . ψ . y . sino in . m . facendo . y . m . pari alla . y . z ., la . m . ψ . sarà la valuta della cosa; et tanto sarà la prima linea addimandata.

Et per trovare l'altre due, facciasi la . L . M . pari alla
C.205. . m . ψ ., et la . M . N . che sia il doppio della . L . M ., et più quanto è la linea . a ., et questa sarà la seconda; per trovare la terza, facciasi la . M . P . pari alla . b .; poi facciasi il circulo . L . P . N . Q . che tocchi li tre punti L . P. N ., la . M . Q . sarà la terza, che fatto la . N . O . pari alla . M . Q . si haverà le tre linee addimandate. La prima sarà la . L . M .; la seconda la . M . N .; et la terza sarà la . N . O ..

Et notasi che se la . z . ψ . fusse stata maggiore della . u . x . si saria addimandato lo impossibile; et volendone fare la prova se li potrà mettere il numero: ma essendosi osservato per Algebra in linee, quanto si è addimandato non mi è parso necessario mettervi il numero.

Et questa dimanda è la 92 del terzo, che dice: *Tre fanno compagnia, et hanno guadagnato scudi 300...* (1).

---

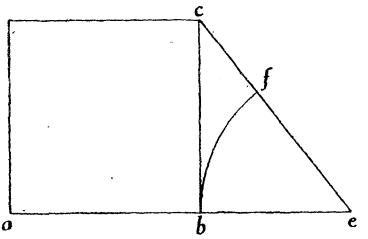
(1) Carte 134, v.: « Tre fanno compagnia et hanno guadagnato scudi 300. Il primo mise una quantità, il secondo duo tanti p. 4; il terzo mise il produtto di quelli del primo in quelli del secondo: et nel partire al primo toccò 20. Addimando quanto mise ciascuno, et che toccò a gli altri due ».

Nella analisi che precede la costruzione geometrica, il BOMBELLI rappresenta l'incognita con un segmento eguale a b. Perciò le tre linee cercate, invece della forma x, $2x + a$, $\frac{x}{b}(2x + a)$, assumono la forma b, $2b + a$, $2b + a$.

Ma la terza, benchè abbia la stessa dimensione lineare della seconda, ha

§ [103]. *Trovami un parallelogrammo, che sia pari al quadrato . a . b . c ., et che li due suoi lati sia uno maggiore dell'altro la linea . d .*

Allungasi la . a . b . sino in . e . in tal modo che la . b . e . sia mezzo della . d .; et tirasi la . e . c .: poi facciasi la . e . f .



pari alla . e . b .; la . f . c . sarà la parte minore, che fatta la . g . pari alla . c . f ., et alla . d .; detta . g . sarà l'altra linea, che dette due linee saranno quelle, che saranno il parallelogramma addimandato.

Et tale dimostratione nasce da l'Algebra: come si può provare col numero. Sia la linea . d . 4; et il quadrato . a . b . c . 12; la . b . c . sarà R 12; et la . b . e . 2, per essere il mezzo della . d . la . c . e . sarà 4 perchè il quadrato della . c . b . aggiunto al quadrato . b . e . è pari al quadrato fatto della . c . e . per essere l'angolo . e . b . c . retto.

---

significato diverso, poichè si compone dei termini

$$\frac{2x^2}{b} + \frac{ax}{b},$$

(censi più cose), essendo stato posto

$$g = \frac{2x^2}{b}$$

$$h = \frac{a}{b}x.$$

Et questa dimanda è la 98 del terzo, che dice: *Partasi 12 per tal numero...*

Et la regola della dimostratione è la 99 del detto, che dice: *Se una quantità nota si havrà a dividere...* (1), che per essere cosa tanto facile non ne dirò altro.

§ [104]. *Fammi della linea . a . b . quattro quantità continoe et proportionali, et che la prima sia pari alla linea . c .*

Pongasi la seconda essere una linea, come si voglia, et sia la . *d* . *e* ., che tirato due linee, che si toccano ad
C. 205 v. angolo retto, et una sia pari alla . *c* . et l'altra alla . *d* . *e* . cioè la . *f* . *g* . pari alla . *c* . et la . *h* . *g* . pari alla . *d* . *e* ., la quale . *d* . *e* ., et . *c* . per minore fatica le ho poste pari l'una a l'altra; che fatto il circulo . *f* . *h* . *i* . *k* . facendo . *g* . centro, che per essere pari la . *f* . *g* . alla . *g* . *h* . così . *g* . *i* . sarà pari alla . *g* . *h* ., et si haveranno le quattro quantità continoe, et proportionali, che la prima sarà la . *f* . *g* . nota, la seconda sarà la . *g* . *h* ., che è un tanto perchè è la linea che fu posta; la . *g* . *i* . sarà una potenza perchè tanto può la . *f* . *g* . in la . *g* . *i* . quanto la . *g* . *h* . in sè; la . *g* . *k* . sarà un Cubo perchè tanto può la . *h* . *g* . in la . *g* . *k* . quanto la . *f* . *g* . in la . *g* . *i* ., et, tutte quattro dette linee aggiunte insieme sono eguali alla . *a* . *b* ., però levasi la . *a* . *x* . della . *a* . *b* . la quale

---

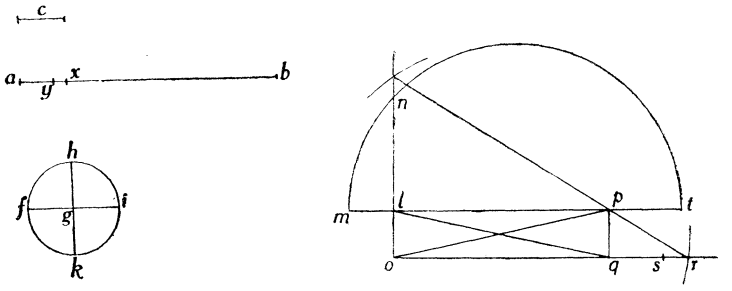
(1) Carte 137: « Se una quantità nota, si haverà a dividere per una ignota, in tal modo, che ne venga la medesima quantità ignota et più un dato numero, pigliasi il mezzo del dato numero et quadrasi, et detto quadrato si aggiunga alla quantità nota, et de la somma, pigliata che se ne haverà il creatore, se ne cava la metà del detto numero; et il restante è la quantità ignota ». V. anche: *Algebra* a pag. 452.

Si tratta del sistema

$$x - y = d, \quad xy = \overline{ab}^2 .$$

cioè di una equaz. di 2° grado del tipo $x^2 + dx - \overline{ab}^2 = 0$.

. *a* . *x* . sia pari a la . *f* . *g* ., la quale si leva per essere nota, et restarà la . *h* . *g* ., che è un tanto più la . *g* . *i* ., che è una potenza più la . *g* . *k* ., che è un Cubo, eguale alla . *x* . *b* .,



et per essere tutte le dignità pari si dividerà la . *g* . *h* . in 27 parti delle quali se ne piglierà 7, et si aggiungono alla . *x* . *b* .: poi tirasi la . *m* . *t* ., et facciasi la . *m* . *l* . pari alla . *c* ., et la . *l* . *n* . perpendiculare pari al mezzo della . *y* . *b* ., et facciasi il semicirculo . *m* . *n* . *t* ., la . *l* . *t* . sarà la potenza della . *l* . *n* . alla quale se gli aggiungerà $\frac{8}{729}$ della . *f* . *g* ., et di tutta se ne pigliarà il lato, e cioè la media proportionale fra essa et la linea . *l* . *m* . la quale media si aggiungerà alla . *l* . *n* ., che faranno la . *l* . *p* . della quale si trovarà la minore delle due medie fra essa et la linea . *m* . *l* ., che come si vede nella figura sarà la . *q* . *r* . della quale se ne levarà la . *s* . *r* . pari alla terza parte della . *g* . *i* ., et ancora se ne levarà un pezzo, che sia pari alla minore delle due medie poste fra la . *m* . *l* . et la differentia della . *n* . *l* . et quella, che chiamai creatore, *C.206.* et il restante sarà la seconda parte.

La operatione di questo ultimo pezzo che si è levato, non l'ho messa, perchè viene tanto minuta, che è quasi impossibile, et ancora il dividere la . *f* . *g* . in 729 parti è quasi impossibile; *si che tale dimanda si è messa per mostrare, che quello, che si fa in numero si può fare in linee, ma è impossibile metterla*

in atto in poco spacio. La quale dimanda è la 100 del terzo, che dice: Fammi di 30 quattro quantità continoe, et proportionali... ([1]). Et se a tale dimostratione se gli vorrà porre il numero, come sarebbe se la .*c*. fusse 3, et la .*a*.*b*. 12,

---

([1]) Carte 137 (Cfr. anche *L'Algebra*, pag. 577) « Fami di 30 quattro parti in continoa proportione che la prima sia 2 ».

Il problema è di 3° grado, si traduce nella equazione

$$c + X + \frac{X^2}{c} + \frac{X^3}{c^2} = \overline{ab}.$$

Nella parte algebrica (libro III) il BOMBELLI prima *riduce ad un cubo* scrivendo l'equazione:

$$X^3 + cX^2 = \overline{ab}c^2 - c^3,$$

poi fa la trasformata a radici aumentate $X = Y - \frac{1}{3}$, riduce l'equazione alla forma canonica

$$Y^3 + \frac{2c^3}{3} Y + \frac{7}{27} c^3 - \overline{ab}c^2 = 0,$$

infine risolve (agguaglia) questa con la formula di SCIPIONE DAL FERRO.

Il BOMBELLI vuol « *mostrare che quello che si fa in numero si può fare anche in linea* », epperò eseguisce successivamente tutte le costruzioni corrispondenti.

Suppone prima, *per minor fatica*, che la $c = \overline{fg}$ sia l'unità di misura della lunghezza, ed ha così l'equazione $X + X^2 + X^3 = \overline{xb}$ (un tanto più una potenza più un cubo eguale alle $\overline{xb}$).

Ove è posto $\overline{xb} = \overline{ab} - c$.

Nel testo esiste una breve lacuna relativa alla formazione della trasformata; ma dal seguito si scorge che egli ha posto $\overline{yb} = \overline{xb} + \frac{7}{27}$, e che la trasformata, per la posizione:

$$X = Y - \frac{1}{3},$$

è

$$Y^3 + \frac{2}{3} Y = \overline{yb}.$$

partasi la . *a* . *b* . per la . *c* . ne viene 4, et essendo la proportione da 3 a 12 come da 1 a 4, si dirà la . *c* . essere 1, et la . *a* . *b* . 4, che trovato che si harà la seconda si moltiplicarà per 3, et il produtto sarà la seconda essendo la . *c* . 3, et la . *a* . *b* . 12.

§ [105]. *Trovami una linea, che aggiuntoli una parte in proportione come la . a . alla . b ., et di tutta tagliatone un*

Ed infatti egli costruisce la formula di SCIPIONE DAL FERRO:

$$Y = \sqrt[3]{\frac{\overline{yb}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{yb}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{yb}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{yb}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27}}}$$

costruendo prima il segmento lt eguale al quadrato $\left(\frac{\overline{yb}}{2}\right)^2$; a questo segmento egli aggiunge $\frac{8}{729}$ e $\left(\text{cioè } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27}\right)$ e di questa somma prende la radice quadrata, costruendo la media proporzionale fra questa somma ed il segmento unitario $lm = c = \overline{fg}$.

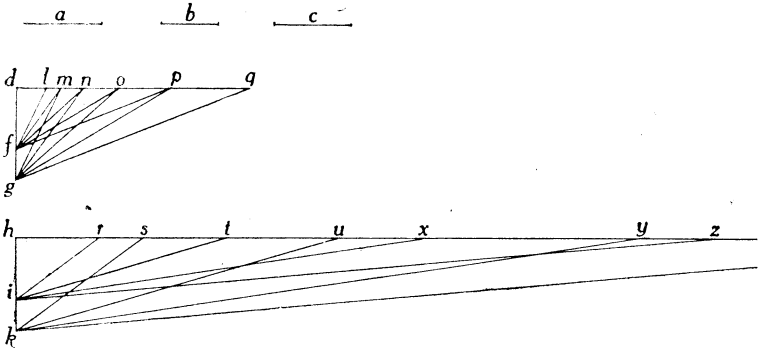
A questa radice quadrata aggiunge $\frac{\overline{xb}}{2} = \overline{ln}$, e di tutta la somma prende la radice cubica (costruendo le due medie proporzionali fra tale somma e l' unità).

Similmente costruisce la seconda radice cubica della formula di SCIPIONE DAL FERRO, e finalmente dal valore Y toglie la quantità $\frac{1}{3}\overline{gi} = \frac{1}{3}c$ (la terza parte del segmento unitario) in forza della posizione $X = Y - \frac{1}{3}$, da lui fatta da principio.

Il BOMBELLI osserva che, nel disegno, per la piccolezza della quantità $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27} - \frac{8}{729}$, il segmento $\overline{ln}$ non si distingue dal segmento $\sqrt{\left(\frac{\overline{xb}}{2}\right)^2 + \frac{8}{729}}$, perciò la costruzione di questo radicale non apparisce nella figura. Ed il segmento $\overline{lp}$, è sensibilmente doppio di $\overline{ln}$.

pezzo, pari alla . c ., et a quello che resta aggiuntoli un pezzo nella medesima proportione, che è dalla . a . alla . b ., et di tutta tagliatone un pezzo pari alla . c ., et a quello che resta aggiuntole un pezzo alla medesima proportione, et tagliatone un pezzo pari alla . c ., et a quello aggiuntoli un pezzo secondo la proportione detta, et il tutto sia pari alla . c .: addimandasi il modo di trovare detta linea.

Pigliasi una linea come si voglia, et sia la . *d* . *l* ., et tirasi la . *d* . *g* . pari alla . *a* ., et la . *d* . *f* . pari alla . *b* . et tirasi



la . *f* . *l* ., et la . *g* . *m* ., che siano parallele fra di loro, et tirasi la . *f* . *m* ., et la . *g* . *n* . parallele fra di loro, et la . *f* . *n* . et la . *g* . *o* . parallele fra di loro et la . *f* . *o* ., et la . *g* . *p* . parallele fra di loro: poi facciasi la . *h* . *r* . pari alla . *c* ., la . *h* . *k* . pari alla . *a* ., la . *h* . *i* . pari alla . *b* ., et tirasi la . *i* . *r* . et la . *k* . *s* . parallele fra di loro, et alla . *h* . *s* . aggiungasi la . *s* . *t* . pari alla . *c* ., et tirasi la . *i* . *t* . et la . *k* . *u* . parallele fra di loro, et alla . *h* . *u* . aggiungalisi la . *u* . *x* . pari alla
C. 206 v. . *c* . et tirasi la . *i* . *x* ., et la . *k* . *y* ., et alla . *h* . *y* . aggiungalisi la . *y* . *z* . pari alla . *c* . et facciasi la . *d* . *q* . pari alla . *x* . *z* ., et la . *d* . *e* . pari alla . *d* . *l* ., et tirasi la . *e* . *p* . et la . ψ . *q* . parallele fra di loro; dico la . *d* . ψ essere la linea addimandata.

Et tale dimostratione si cava dalla dimanda 101 del terzo, che dice: *Uno fa quattro viaggi...* (1). Come si può vedere col numero. Dato che la . *a* . sia 5, et la . *b* . 4; et la . *c* . 24; la . *d* . *f* . sarà 4 per essere pari alla . *b* ., la . *d* . *g* . sarà 5 per essere pari alla . *a* .; et dato che la . *d* . *l* . sia 1, la . *d* . *e* . sarà 1; la . *h* . *i* . sarà 4, la . *h* . *k* . 5, per essere una pari alla . *b* . et l'altra alla . *a* . la . *k* . *r* . sarà 24 per essere pari alla . *c* .; la . *l* . *m* . sarà $\frac{1}{4}$ per essere tale proportione dalla . *d* . *l* . alla . *d* . *f* . come è la . *l* . *m* . alla . *f* . *g* .; tutta la . *d* . *m* . sarà $1\frac{1}{4}$, la . *m* . *n* . sarà $\frac{5}{16}$ per la proportione detta, et la . *d* . *n* . sarà $1\frac{9}{16}$, la . *n* . *o* . sarà $\frac{25}{64}$ per la proportione detta; la . *d* . *o* sarà $1\frac{61}{64}$; la . *o* . *p* . sarà $\frac{125}{256}$, la . *d* . *p* . sarà $2\frac{113}{265}$: per trovare quanto è la . *d* . *q* ., vedasi quanto è la . *h* . *z* ., che essendo la . *h* . *r* . 24, la . *r* . *s* . sarà 6 per le raggione sopradette; la . *h* . *s* . sarà 30, la . *s* . *t* . 24 per essere pari alla . *c* ., la . *h* . *t* . sarà 54, la . *t* . *u* , sarà $13\frac{1}{2}$ per le raggione dette, la . *h* . *u* . sarà $67\frac{1}{2}$, la . *u* . *x* . sarà 24 per essere pari alla . *c* ., la . *h* . *x* . sarà $91\frac{1}{2}$, la . *x* . *y* . sarà $22\frac{7}{8}$ per le raggioni dette; la . *h* . *y* . sarà $114\frac{3}{8}$ la . *y* . *z* . 24 per

---

(1) Carte 137, v.: « Uno fa 4 viaggi, nel primo guadagna il quarto del suo capitale, et spende scudi 24; nel secondo guadagna il quarto di ciò che si trova, et pure spende 24, et così nel terzo, et nel quarto; et nella fine non si trovò nè capitale, nè guadagno; dimando con quanti denari si mise in viaggio ».

essere pari alla . *c* ., la . *h* . *z* . sarà $138\frac{3}{8}$, et tanto sarà la . *d* . *q* ., la . *d* . *e* . 1 per essere pari alla . *d* . *i* ., la . *d* . ψ . sarà $56\frac{424}{625}$ perchè tal proportione è dalla . *d* . *e* . alla . *d* . *p* ., come è dalla . *d* . *q* . alla . *d* . ψ .; et per farne la prova aggiungasi a $56\frac{424}{625}$ 14 $\frac{106}{25}$ fa $70\frac{106}{125}$, che trattone 24, cioè quanto è la . *a* . *c* . resta 46 $\frac{106}{125}$, che aggiuntoli 11 $\frac{89}{125}$ per la proportione detta fa $58\frac{14}{25}$, che trattone 24 cioè la . *a* . *c* . resta $34\frac{14}{25}$, che aggiuntoli 8 $\frac{16}{25}$ per la proportione detta, fa $43\frac{1}{5}$, che trattone 24 per la . *c* . resta 19 $\frac{1}{5}$ che aggiuntoli $4\frac{4}{5}$, per la raggione detta, fa 24, che è pari alla . *c* . come fu addimandato.

§ [106]. *Voglio dividere la linea . f . l . in tre parti continoe, et proportionali, che la seconda sia maggiore della prima quanto è la linea . a . b . : addimandasi la divisione di tal linea.*

Dividasi la . *a* . *b* . in tre parti pari cioè . *a* . *e* ., . *e* . *c* ., C.207. et . *c* . *b* ., et dal punto . *c* . si tiri la perpendiculare . *c* . *d* ., la quale taglierà il semicirculo . *a* . *d* . *b* . fatto sopra la linea . *a* . *b* . in punto . *d* ., et dal punto . *d* . tirasi la . *d* . *b* .: poi tagliasi della . *f* . *l* . la parte . *f* . *g* . la quale sia tre volte la linea . *a* . *b* ., et il restante cioè . *g* . *l* . si divida in 6 parti pari, et . *h* . *l* . sia una di dette parti sopra la quale si faccia il semicirculo . *h* . *m* . *l* ., et dal punto . *l* . tirasi la . *l* . *m* . pari alla . *b* . *d* ., et dal punto . *m* . si tiri la . *m* . *h* ., et dal punto . *h* . si segni la . *h* . *i* . pari a la . *h* . *m* .; dico la . *i* . *l* . essere la minore parte; l'altra sarà quanto è la . *a* . *b* . aggiunta con la . *i* . *l* ., che è la . *i* . *k* .; la terza sarà la . *k* . *f* . .

Et questa operatione nasce dalla regola d'Algebra nella dimanda 102 del terzo, di *dividere un dato numero in tre parti continoe, et proportionali, che la mezzana sia maggiore della minore un dato numero...* (1). Come si può vedere col

numero. Sia la linea . *a* . *b* . 3, la . *c* . *b* . sarà 1, la . *d* . *b* . sarà *R* 3 perchè tanto può la . *d* . *b* in se, quanto la . *a* . *b* . in la . *c* . *b* ., la . *f* . *g* . sarà 9 per essere tre tanti della . *a* . *b* ., et la . *g* . *l* . 18 per essere tutta la . *f* . *l* . 27, la . *k* . *l* . sarà 3, cioè la sesta parte della . *g* . *l* ., la . *l* . *m* . sarà *R* 3 per essere pari alla . *d* . *b* ., la . *m* . *h* . sarà *R* 6 per essere pari il quadrato della . *h* . *l* . alli quadrati della . *h* . *m* ., et della . *m* . *l* .; la . *h* . *i* . sarà *R* 6 per essere pari alla . *h* . *m* ., la . *i* . *l* . sarà 3 meno *R* 6 per essere la . *h* . *l* . 6, che trattone la . *h* . *i* . resta la . *i* . *l* ., la . *l* . *k* . sarà 6 meno *R* 6, cioè tre più della prima; la terza sarà 18 più *R* 24, che sommate tutte tre insieme fanno 27, et la seconda è maggiore della prima quanto

---

(1) Carte 138 (v. anche: *L'Algebra*, pag. 527). Indicando con x la prima parte, con $x + \overline{ab}$ la seconda, con $\overline{fl} - 2x - \overline{ab}$ la terza, e scrivendo che il quadrato della seconda equivale al prodotto della 1ª e 3ª, si ha l'equazione

$$x^2 + \frac{\overline{fl} - \overline{ab}}{3} x + \frac{\overline{ab}^2}{3} = 0 .$$

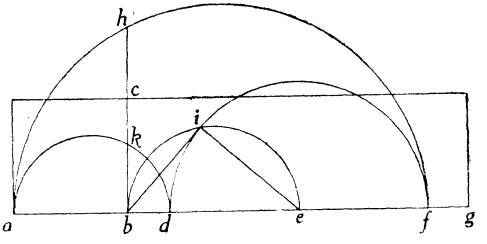
Nella figura

$$\overline{db}^2 = \frac{1}{3} \overline{ab}^2 , \quad \frac{\overline{fl} - 3\overline{ab}}{6} = \overline{hl}, \quad \sqrt{\left(\frac{\overline{fl} - 3\overline{ab}}{6}\right)^2 - \frac{1}{3} \overline{ab}^2} = \overline{hm} = \overline{hi} .$$

è la . *a* . *b* ., cioè 3: hora resta a vedere se sono continoe, et proportionali, che moltiplicando la prima nella terza, et la seconda in sè faranno 42 meno *R* 864.

§ [107]. *Trovami due linee che, fatto di esse un parallelogrammo, sia pari al quadrato* . *a* . *b* . *c* ., *et che fatto di ciascuna di esse un quadrato et aggiunti insieme siano pari al parallelogrammo* . *c* . *b* . *g* . .

Per trovare tal linea, prima vedasi se la superficie . *a* . *c* . *b* . è quadrata, benchè la proposta dice quadrata; ma dato che non
C. 207 v. fusse quadrata, si ridurrà a forma quadrata, et se il parallelo-



grammo . *c* . *b* . *g* . non haverà una linea pari al lato del quadrato si farà un parallelogrammo, che gli sia pari, et habbia un lato pari al quadrato . *a* . *b* . *c* .; ma il parallelogrammo proposto ha l'una et l'altra delle parti dette, Et venendo a l'operatione, dividasi la linea . *b* . *g* . in due parti pari in punto . *e* ., et sopra la . *b* . *e* . facciasi il semicirculo . *b* . *i* . *e* . et tirasi la . *b* . *i* . pari alla . *a* . *b* ., et dal punto . *i* . si tiri la . *i* . *e* ., et facciasi la . *e* . *d* . et la . *e* . *f* . ciascuna di loro pari alla . *e* . *i* ., facendo il semicirculo . *d* . *i* . *f* . et che . *e* . li sia centro, et sopra la . *a* . *d* . si faccia il semicirculo . *a* . *k* . *d* ., et sopra la . *a* . *f* . facciasi il semicirculo . *a* . *h* . *f* .: poi allungasi la . *b* . *c* . sino alla circonferentia . *h* .; dico che la . *b* . *h* . et la . *b* . *k* . essere le due linee addimandate. Come si può vedere col numero. Dato che 'l quadrato . *a* . *b* . *c* . sia 8, et il

parallelogrammo . *c* . *b* . *g* . 24 la linea . *a* . *b* ., et la . *b* . *c* . ciascuna di loro sarà *R* 8, et la . *b* . *g* . *R* 72, che moltiplicato la . *c* . *b* . via la . *b* . *g* ., fa *R* 576, che è 24, numero, la . *b* . *e* . sarà *R* 18 per essere il mezzo della . *b* . *g* ., la . *b* . *i* . sarà *R* 8 per essere pari alla . *b* . *a* ., la . *i* . *e* . sarà *R* 10; che aggiunto il quadrato della . *b* . *i* . col quadrato della . *i* . *e* . sono pari al quadrato della . *b* . *e* .: et la . *d* . *e* ., et . *e* . *f* . ciascuna di loro saranno *R* 10 per essere pari alla . *i* . *c* ., la . *b* . *d* . sarà *R* 18 meno *R* 10, et la . *b* . *f* . sarà *R* 18 più *R* 10, la . *b* . *k* . in potentia sarà 12 meno *R* 80 perchè tanto può la . *a* . *b* ., che è *R* 8 via la . *b* . *d* ., che è *R* 18 meno *R* 10 et tanto ha da fare la . *b* . *k* . in sè, che preso il lato di 12 meno *R* 80 sarà *R* 10 meno *R* 2 et tanto è la . *b* . *k* ., la . *b* . *h* . sarà in potentia 12 più *R* 80 cioè il produtto della . *a* . *b* . in la . *b* . *f* ., che presone il lato ne verrà *R* 10 più *R* 2, et tanto è la . *b* . *h* .; et per farne la prova moltiplicasi la . *b* . *k* ., che è *R* 10 meno *R* 2 via la . *b* . *h* ., che è *R* 10 più *R* 2, fa 8, che è pari al quadrato . *b* . *c* ., e il quadrato della . *b* . *k* . è 12 meno *R* 80, et il quadrato della . *b* . *h* . è 12 più *R* 80, che aggiunte insieme fanno 24, che è pari al parallelogrammo . *c* . *b* . *g* . come fu addimandato: Et notasi, che se il parallelogrammo . *c* . *b* . *g* . non sarà doppio o più del quadrato . *a* . *b* . *c* . si tratterà del impossibile.

Et tale dimostratione si cava dalla operatione dell'Algebra nella dimanda 104 del terzo (1), che dice: *Trovami due nu-*

---

(1) Carte 138 (v. anche il n. 105 a Carte 138 v. ove è enunciata la *Regola*, e *L'Algebra*, a pag. 527).

Si tratta del sistema $\begin{cases} xy = \overline{bc}^2 \\ x^2 + y^2 = \overline{bc} \cdot \overline{bg} \end{cases}$.

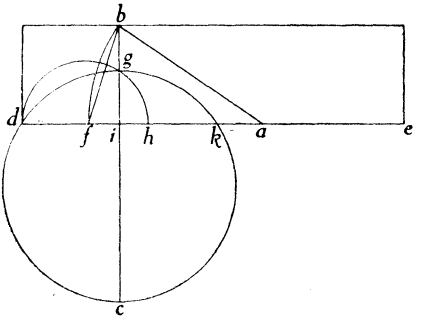
Il BOMBELLI sostituisce nella seconda il valore di y ricavato dalla prima e costruisce la formula:

$$x^2 = bc \left\{ \frac{\overline{bg}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{bg}}{2}\right)^2 - \overline{bc}^2} \right\}.$$

meri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 8, et che li lor quadrati aggiunti insieme facciano 24; et dalla Regola 105 si cava la dimostratione.

C.208. § [108]. *Trovami due linee, che fatte di esse un parallelogrammo, che sia pari al quadrato . d . i . b ., et che fatto di ciascuna di esse un quadrato, et tratto l'uno de l'altro, il restante sia pari al parallelogrammo . b . i . e ..*

Per trovare tal linea bisogna che il quadrato et il parallelogrammo habbiano le conditioni dette nella passata, et non



l'havendo facciasi in modo, che l'habbiano: poi dividasi la . i . e . in due parti pari in punto . a . et tirasi la . b . a ., et facciasi la . a . f . pari alla . b . a ., et la . i . h . pari alla . i . f ., et sopra la . d . h . si faccia il semicirculo . d . g . h .: dico la . g . i . essere una delle linee addimandate: et per trovare l'altra facciasi la . i . k . pari alla . i . d ., et facciasi il circulo . d . g . k ., et allungasi la . g . i . sino alla circonferentia . c .;

Nella figura $\overline{ab} = \overline{bc}$, $\overline{ei} = \sqrt{\left(\frac{\overline{bg}}{2}\right)^2 - \overline{bc}^2}$.

Notevole, per semplicità, questa *costruzione geometrica della equazione biquadratica.*

dico la . *i* . *c* . essere l'altra linea addimandata. Come si può vedere col numero. Dato che il quadrato . *d* . *i* . *b* . sia 8, et il parallelogrammo . *b* . *i* . *e* . 24, la . *d* . *i* ., et . *i* . *b* . saranno ciascuna di loro *R* 8, et la . *i* . *e* . sarà *R* 72, come si è detto nella passata la . *b* . *a* . sarà *R* 26 per essere pari il suo quadrato al quadrato dalla . *a* . *i* ., et . *i* . *b* ., la . *a* . *f* . sarà *R* 26 per essere pari alla . *a* . *b* ., la . *f* . *i* . sarà *R* 26 meno *R* 18, et il medesimo sarà . *i* . *h* . per essere pari; la . *i* . *g* . sarà *R* |*R* 208 m. 12| perchè tanto può la . *d* . *i* . in la . *i* . *h* . quanto la . *i* . *g* . in se, et per trovare la . *i* . *c* . moltiplicasi la . *i* . *k* . via la . *i* . *d* ., fa 8, et partasi per la . *i* . *g* ., che è *R* |*R* 208 m. 12| ne viene *R* |*R* 208 p. 12|, et tanto è la . *c* . *i* .: et per farne la prova moltiplicasi *R* |*R* 208 m. 12|, che è la . *g* . *i* . via *R* |*R* 208 p. 12|, che è la . *i* . *c* ., fa 8 che è pari al quadrato . *d* . *i* . *b* ., et il quadrato della . *g* . *i* . è *R* 208 m. 12, che tratto del quadrato della . *i* . *c* ., che è *R* 208 p. 12 resta 24, che è pari al parallelogrammo . *b* . *i* . *e* ., come fu addimandato.

Et tale dimostratione si cava da l'operatione dell'Algebra nella dimanda 106 del terzo, che dice: *Trovami due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 8, et che il quadrato del minore tratto del quadrato del maggiore resti 24.*

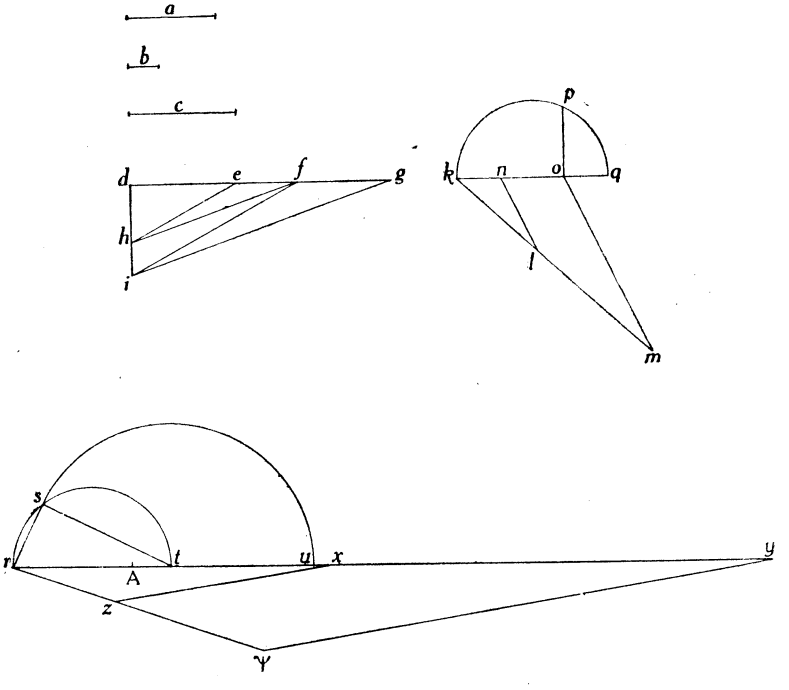
Et la dimostratione nasce dalla regola 107 del terzo, che dice: *Se si harrà a trovare due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro...* (1).

---

(1) Carte 138 v. « Se si haveranno a trovare due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro habbiano a fare un dato numero, et che tratti li loro quadrati l'uno de l'altro resti un terminato numero... ». (V. anche *L'Algebra*, pag. 528),

La costruzione procede in modo analogo a quello seguito nel problema precedente.

C.20 8 v. § [109]. *Trovami una linea, che aggiuntoli un pezzo, che gli sia in proportione come la . b . alla . a . poi tagliatone un pezzo pari alla . c ., et al resto aggiuntoli un pezzo, che gli sia in proportione come la . b . alla . a ., et di tutta taglia-*



tone un pezzo nella proportione che fu tagliata l'altra volta, et il restante sia pari alla . r . A . .

Pigliasi una linea come si voglia, ma per più comodità pigliasi la . *d* . *e* . pari alla . *c* . la quale si allunga quanto bisognarà, et facciasi la . *d* . *i* . pari alla . *a* . et la . *i* . *h* . pari alla . *b* ., et tirasi la . *h* . *e* ., et la . *i* . *f* . parallele fra di loro: poi tirasi la . *h* . *f* ., et la . *i* . *g* . parallele fra di loro, et tirasi

la . *k* . *o* . pari alla . *c* ., la . *k* . *l* . pari alla . *d* . *e* ., la . *k* . *m* . pari alla . *d* . *g* ., et tirasi la . *m* . *o* ., et la . *l* . *n* . parallele fra di loro, et la . *o* . *q* . pari alla . *k* . *n* .; et trovasi la media proportionale fra la . *o* . *q* ., et la . *o* . *k* ., che sarà la . *o* . *p* .: poi aggiungasi la . *A* . *x* . alla . *r* . *A* ., che sia doppia alla . *d* . *e* . essendo pari la . *d* . *e* . alla . *c* . ma quando non fussero pari si aggiunga alla . *r* . *A* . come si è detto, et tirasi la . *r* . *z* . pari alla . *d* . *e* ., et la . *r* . ψ . pari alla . *d* . *g* ., et tirasi la . ψ . *y* ., et la . *z* . *x* . parallele fra di loro, et la . *r* . *x* . si divida in due parti pari in punto . *t* . et sopra la . *r* . *t* . si faccia il semicirculo . *r* . *s* . *t* ., et tirasi la . *r* . *s* . pari alla . *o* . *p* ., et dal punto . *s* . si tiri la *s* . *t* ., et facciasi la . *t* . *u* . pari alla . *s* . *t* .; dico la . *r* . *u* . essere la linea addimandata.

Come si può vedere col numero. Dato che la linea . *b* . sia 1, la . *a* . 3, la . *c* . 6, la . *r* . *A* . 10, la . *d* . *e* ., et la . *k* . *o* ., et la . *r* . *z* ., ciascuna di loro saranno 6 per essere tutte pari alla . *c* ., la . *d* . *i* . sarà 3, per essere pari alla . *a* .; la . *h* . *i* . 1 per essere pari alla . *b* ., la . *e* . *f* . sarà 2 per essere tal proportione dalla . *d* . *e* . alla . *e* . *f* ., come è dalla . *d* . *h* . alla . *h* . *i* .; la . *d* . *f* . sarà 8, la . *f* . *g* . sarà $2\frac{2}{3}$ per la proportione detta tutta la . *d* . *g* . sarà $10\frac{2}{3}$, la . *k* . *m* ., et la . *r* . ψ . ciascuna di loro sarà $10\frac{2}{3}$ per essere pari alla . *d* . *g* ., la . *k* . *n* . sarà $3\frac{3}{8}$ perchè tale proportione è dalla . *k* . *o* ., che *C.209*
è 6 alla . *n* . *k* ., che è $3\frac{3}{8}$, come è la . *k* . *m* ., che è $10\frac{2}{3}$, alla . *k* . *l* ., che è 6; la . *o* . *q* . sarà $3\frac{3}{8}$, la . *o* . *p* . sarà *R* $20\ 1\frac{1}{4}$, cioè il creatore del produtto della . *k* . *o* . in la . *o* . *q* . la . *A* . *x* . sarà 16 per essere il doppio della . *d* . *f* .

tutta la . *r* . *y* . sarà 26, la . *r* . *x* . sarà $14\frac{5}{8}$ per essere tale proportione dalla . *r* . *y* . alla . *r* . *x* . come è dalla . *r* . ψ . alla . *r* . *Z* ., la . *r* . *t* . sarà $7\frac{5}{16}$ per essere il mezzo della . *r* . *x* ., la . *r* . *s* . sarà $4\frac{1}{2}$ per essere pari alla . *o* . *p* ., la . *s* . *t* . sarà $R\ 33\frac{57}{256}$ perchè il quadrato della . *r* . *s* ., et il quadrato della . *s* . *t* . sono pari al quadrato della . *r* . *t* ., la . t . *u* . sarà $R\ 33\frac{57}{256}$, et tutta la . *r* . *u* . sarà $7\frac{5}{16}$ più $R\ 33\frac{57}{256}$, che è la linea addimandata; et per farne la prova aggiungalisi il suo terzo, che è $2\frac{7}{16}$ p. $R\ 3\frac{177}{256}$ perchè la . *b* . è il terzo della . *a* ., fa $9\frac{3}{4}$ più $R\ 59\frac{1}{16}$; che cavatone 6, cioè la . *c* ., resta $3\frac{3}{4}$ più $R\ 59\frac{1}{16}$, che aggiuntoli il suo terzo per la ragione detta fa 5 più R 105: hora per vedere quanto se ne ha da cavare facciasi per la regola della proportione, dicendo se $9\frac{3}{4}$ più $R\ 59\frac{1}{16}$ mi dà 6, che darà 5 più R 105? che darà R 105 meno 5, che tratto di 5 più R 105 resta 10, che è pari alla . *r* . *A* ., come fu addimandato.

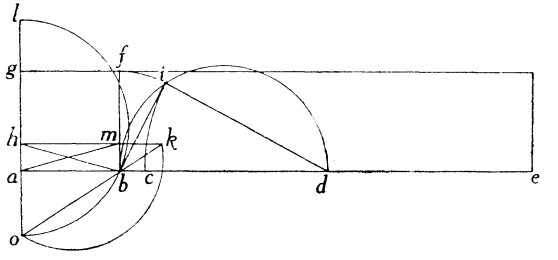
Et questa nel terzo è la 112, che dice: *Uno fa due viaggi*... (1). Et la dimostratione nasce dalla sua operatione Algebratica.

---

(1) Carte 139, v. « Uno fa due viaggi, nel primo guadagna il quarto del suo capitale, et spende scudi 24, nel secondo pure il quarto di ciò che si trova, et spende a la proportion del primo, et in capo dell' ultimo viaggio si trovò scudi 100. Si domanda con quanti denari si mise in viaggio ».

§ [110]. *Sia dato il quadrato . a . b ., et che si habbia a trovare due linee che di esse fattone un parallelogrammo sia pari al sopra detto quadrato, et che di ciascuna di dette due linee fatto due parallelogrammi, che ciascuno sia composto di una di dette due linee, et della potentia di essa, et aggiunti essi parallelogrammi insieme siano pari al parallelogrammo . f . b . e . .*

Prima bisogna vedere se uno de lati del parallelogrammo . f . b . e . ha un lato pari al quadrato . a . b . f ., et non l'ha-



vendo si farà in modo che l'habbia, come è stato mostro: ma dato che 'l lato . f . b . sia pari al lato del quadrato, et al lato del parallelogrammo: dividasi la . b . e . in due parti pari in punto . d ., et sopra la . b . d . si faccia il semicirculo . b . i . d . et tirasi la . b . i . pari alla . b . f ., et dal punto . i . tirasi la . i . d .: et notasi che se la . b . f . sarà maggiore della . b . d . o pari, si tratterà del impossibile, et della . b . d . si taglia la C. 209 v.
. c . d . pari alla . d . i ., et fra la . b . c .. et la . b . a . si trovarà le due medie proportionali, et la minore sarà una delle linee addimandate, che, fatto come si è mostrato, la minore sarà la . a . o ., et sarà una delle linee addimandate, et per trovare l'altra allungasi la . o . g ., et sopra essa facciasi il semicirculo, che tocchi li due punti . o ., et . b .; tale semicirculo andarà a finire nel punto . l ., et la . a . l . sarà l'altra linea, che tutte e doe contengono un parallelogrammo pari al

quadrato . *o* . *b* . *f* . perchè tanto può la . *a* . *o* . in la . *a* . *l* . quanto la . *a* . *b* . in se.

Et tale dimostratione nasce dalla regola 109, che dice: Se si haveranno a trovare due numeri... *Et tal regola si cava dalla operatione d'Algebra nella 108 del terzo,* che dice: *Trovami due numeri, che moltiplicato l'uno via l'altro faccia 8, et che li lor cubati aggiunti insieme facciano 48* (1). Et volendo ponere il numero a tal dimostratione, si ponerà che 'l lato . *a* . *b* . sia 1, et nel resto si procederà, eome si è mostrato ma se si ponerà, che detto lato sia più d' 1, bisognarà tenere questo altro ordine: come se 'l quadrato . *a* . *b* . *f* . fusse 8 si farà un parallelogrammo, che sia otto volte lungo quanto largo, et che sia pari al quadrato . *a* . *b* . *f* . et il lato maggiore di detto parallelogrammo si ridurrà a potentia cubica rispetto al suo lato minore, et se ne pigliarà il suo creatore, et tale creatore si operarà in cambio del lato . *a* . *b* . ma nel pigliare il creatore cubico si servirà del parallelogrammo trovato.

---

(1) Carte 138 v. 139, (v. anche *L'Algebra* a pag. 529).

Si tratta del sistema: $\begin{cases} xy = \overline{bf}^2 \\ x^3 + y^3 = \overline{bf}^2 \cdot \overline{be} \,. \end{cases}$

Il BOMBELLI elimina la y, e costruisce geometricamente la formula risolutiva

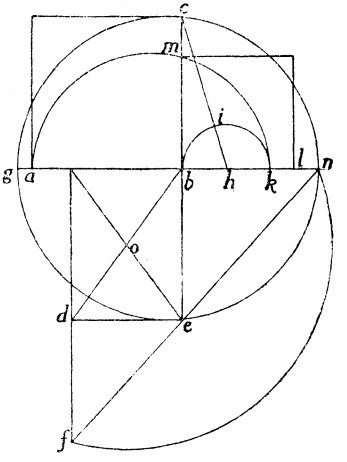
$$x^3 = \overline{fb}^2 \left\{ \frac{be}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{be}}{2}\right) - \overline{fb}^2} \right\}.$$

Il procedimento è esatto, ma la esposizione è un po' confusa. Quando dice che il *parallelogrammo fbe* ha *un lato pari al quadrato afh,* effettivamente si riferisce ad un parallelepipedo di cui una base è quadrata, ed eguale al quadrato *abf,* e di questo parallelepipedo rappresenta solo la faccia laterale *fbe.* Egli poi assume $\overline{bf}$ come unità di misura, ed allora, *numericamente,* il parallelepipedo ed il parallelogrammo si equivalgono.

Si ricordi la costruzione del problema del n. 20. (Dimostratione del creatore cubico in linee), ove appunto si cerca il lato di un cubo equivalente ad un dato parallelepipedo a base quadrata, mediante la inserzione di due medie proporzionali.

§ [111]. *Sia il quadrato . a . b . c ., et che si habbia a trovare due linee, che contengono un parallelogrammo, che gli sia pari di superficie; et che di ciascuna di esse linee fatto un parallelogrammo fatto di una di esse linee et della sua potentia, cavato il minore del maggiore ne resti una superficie pari al quadrato . m . b . l . .*

Prima si ha da trovare la linea potentiale del quadrato . m . b . l ., la quale sarà la . b . k ., facendo il semicirculo . a . m . k .; poi dividasi la . b . k . in due parti pari in punto . h ., et facciasi il semicirculo . b . i . k . sopra la . b . k ., et dal centro . h . tirasi la . h . c ., che taglierà il sudetto semicirculo in punto . i .: Hora della parte . i . c . bisogna trovare il creatore cubico, facendo il parallelogrammo . d . e . b ., facendo la . d . e . pari a la . i . c ., et la . b . e . pari alla . b . c ., che trovato il centro . o . et fatta la circonferentia . n . f . in tal modo, che tirata la retta . n . f . che tocchi il punto . e . la . b . n . sarà il creatore cubico della . c . i . come si è mostrato a suo luogo, et fatto il circulo . e . n . c . g . in tal modo, che la circunferenza tocchi li tre punti . i . n . e ., et allungata la . a . b . sino a la circunferenza . g . si haveranno le due linee cercate; l'una sarà la . g . b ., l'altra la . b . n . . C.210.



Et questo modo di operare si trova per le regole algebratiche nella dimanda 100, che dice: *Trovami due numeri, che moltiplicato l'uno via l'altro faccia un dato numero et che li loro cubati tratti l'uno dell'altro resti un dato numero:* et la dimostratione si cava dalla Regola 111, che dice: *Se*

si haranno a trovare due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro... (1).

Et se a tal dimostratione se li vorrà ponere il numero, sempre pongasi la . a . b . essere 1, la . b . l . si ponerà come si voglia: ma dato, che sia $\frac{3}{4}$, la . b . k . sarà $\frac{9}{16}$ perchè tanto può la . a . b . in la . b . k . quanto la . b . m . in se, la . b . h . sarà $\frac{2}{32}$, la . c . h . sarà $R\ 1\ \frac{81}{1024}$, la . c . i . sarà $R\ 1\ \frac{81}{1024}$ meno $\frac{9}{32}$, la . b . n . sarà $R^3 \left| R\ 1\ \frac{81}{1024} \text{ meno } \frac{9}{32} \right|$, et la . b . g . sarà $R^3 \left| R\ 1\ \frac{81}{1024} \text{ più } \frac{9}{32} \right|$: ma se si ponerà la . a . b . essere 2 il quadrato . a . b . c . sarà 4 si trovarà un parallelo-

---

(1) Carte 139 e 139, v.; vedi anche: *L'Algebra*, pag. 530. Questo quesito è analogo al precedente, ed è risolto nello stesso modo.

Anche qui suppone che $\overline{ab}$ sia preso per unità di misura delle lunghezze, e la *linea potenziale* $\overline{bk}$ sodisfa la condizione:

$$\overline{bk} \cdot \overline{ab} = \overline{bm}^2 .$$

Numericamente, per essere $\overline{ab} = 1$, si ha anche $\overline{bk} \cdot \overline{ab}^2 = \overline{bk} \cdot \overline{ab} = \overline{bk} = \overline{bm}^2$. Il sistema è dunque ricondotto alla forma

$$\begin{cases} xy = \overline{ab}^2, \\ x^3 - y^3 = \overline{ab}^2 \cdot \overline{kb}, \end{cases}$$

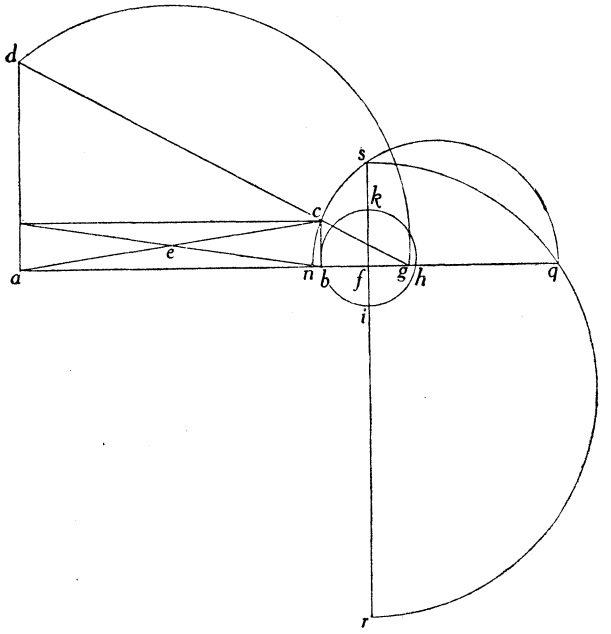
dà luogo alla equazione $x^6 - \overline{ab}^2 \cdot \overline{bk} x^3 - \overline{ab}^6 = 0$ ed è risoluto dalla formula

$$x^3 = \overline{ab}^2 \left\{ \frac{\overline{bk}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{bk}}{2}\right)^2 + \overline{ab}^2} \right\}.$$

Il BOMBELLI costruisce questa formula, ed estrae la radice cubica al solito modo.

grammo, che sia quattro volte lungo come largo, et quella larghezza servirà per la unità, et si trovarà la potentia della . *b* . *l* . con questa unità detta, et così nel trovare il creatore cubico, come si è detto nella passata.

§ [112]. *Trovami quattro quantità continoe proportionali, che la seconda più lunga della prima linea . l ., et fatto della*



prima, et della linea . m . un parallelogrammo sia pari a un parallelogrammo fatto della quarta, et della linea . l .

Facciasi il parallelogrammo . *a* . *b* . *c* . facendo la . *a* . *b* . pari alla . *m* ., et la . *b* . *c* . pari alla . *l* ., et trovasi il centro . *e* . facendo la circunferenza . *d* . *g* . in tal modo, che tirata *C.210v.* la retta . *d* . *g* . tocchi il punto . *c* . che tagliarà la . *a* . *h* . in

punto . *g* .; et la . *b* . *g* . verrà ad essere il creatore cubico della . *m* . rispettive a la . *l* ., della quale . *b* . *g* . se ne tagli la . *b* . *f* . pari alla . *c* . *b* ., et dal punto . *f* . si tiri la . *f* . *i* . a angolo retto pari a la . *f* . *g* ., et allungasi la . *b* . *f* . fino in . *h* . facendo . *f* . *h* . pari a la . *l* .; poi facciasi il circulo . *b* . *i* . *h* . *k* . in tal modo, che tocchi li tre punti . *b* . *i* . *h* ., et allungasi la . *i* . *f* . fino a la circunferenza . *k* . et la . *f* . *k* . sarà la prima quantità, che allungata sino in . *s* . facendo la . *k* . *s* . pari a la . *l* .; la . *f* . *s* . sarà la seconda; et havendo queste due note, si troverà la terza, facendo la . *f* . *n* . pari alla . *f* . *k* . et sopra la . *n* . *h* . il semicirculo . *n* . *q* ., che tocchi li due punti . *n* . et . *s* ., la . *f* . *q* . sarà la terza, et fatto sopra la . *s* . *r* . il semicirculo . *s* . *q* . *r* ., che tocchi li due punti . *s* ., et . *q* .; la . *f* . *r* . sarà la quarta; come ancora si può vedere col numero. Dato che la linea . *l* . sia 1, la . *m* . 8, la . *a* . *b* . sarà 8 per essere pari a la . *m* . la . *b* . *c* . sarà 1 per essere pari alla . *l* ., la . *b* . *g* . sarà 2 per essere la radice cuba della . *b* . *a* ., la . *b* . *f* . sarà 1 per essere pari alla . *b* . *c* ., la . *f* . *g* . sarà 1 per essere tutta la . *b* . *g* . 2, la . *f* . *i* . sarà 1 per essere pari alla . *f* . *g* ., la . *f* . *h* . sarà 1 per essere pari alla . *l* ., la . *f* . *k* . sarà pure 1, perchè tanto può la . *b* . *f* .
C.211. in la . *f* . *h* ., quanto la . *f* . *i* . in la . *f* . *k* ., la . *k* . *f* . sarà 1 per essere pari alla . *l* . et tutta la . *f* . *s* . sarà 2, la . *f* . *n* . sarà 1 per essere pari alla . *f* . *k* ., la *f* . *q* . sarà 4 perchè tanto può la . *n* . *f* . in la . *f* . *g* . quanto . *f* . *s* . in se, et la . *f* . *r* . sarà 8 per la medesima raggione; si che si vede, che la . *f* . *s* ., che è la seconda parte è 1, più della . *f* . *k* . che è la prima, et il produtto della . *f* . *k* . in la . *m* . è pari al produtto della . *f* . *l* . in la . *l* ., come fu addimandato, ma dato, che la . *l* . fusse 3, et la . *m* . 8 si dividerà la . *m* . in otto parti pari, et una parte si farà la . *b* . *c* ., et nel resto si proceda come è stato detto.

Et questa dimostratione nasce dalla operatione dell'Algebra

nella 115 del terzo, che dice: *Trovami quattro quantità continoe, proportionali, che la seconda sia 2 più della prima* (1).

§ [113]. *Trovami due linee, che siano in proportione l'una dell'altra come è la . a . a la . b ., et che il parallelogrammo fatto di esse linee sia pari al quadrato . c . d . e ..*

Tirasi la . c . k . pari a la . a ., et la . h . k . pari alla . b ., et tirasi la . k . d ., et la . h . i . parallele fra di loro, et del parallelogrammo . i . d . e . si trovarà la linea del suo quadrato, che fatto la . d . g . pari a la . d . i ., et sopra la . e . g . il semicirculo . e . f . g .; la linea d . f . sarà una delle linee addimandate, et per trovare l'altra; facciasi la . d . l . pari a la . d . f ., et il semicirculo . l . e . m ., che tocchi le due parti . l . et . e .; la . d . m . sarà l'altra.

Come si può vedere col numero, sia la . a . 3, la . b . 1, et il quadrato . c . d . e . 36, la linea . c . d . sarà 6 cioè il creatore di 36, la . c . k . 3 per essere pari a la . a ., la . b . k . 1 per essere pari a la . b ., la . d . i . sarà 2 per essere tale proportione dalla . c . d . a la . d . i . come è dalla . c . k . a la . h . k ., la . d . g . sarà 2 pari alla . d . i ., la . d . f .

---

(1) Carte 141. Il sistema da risolvere è:

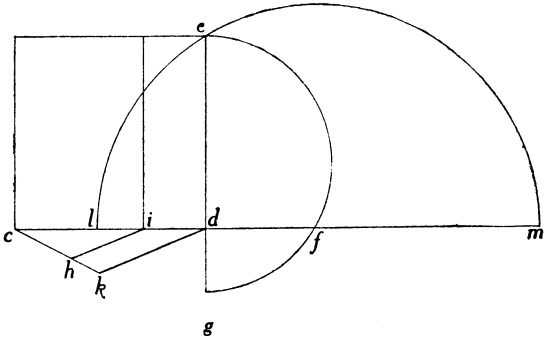
$$\begin{cases} x - y = l \\ mx = \dfrac{y^3 \cdot l}{x^2} \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} y = l + x \\ \dfrac{x}{y} = \sqrt[3]{\dfrac{l}{m}} \end{cases}.$$

La costruzione geometrica è assai semplice e chiara e non richiede altra spiegazione.

sarà R 12 perchè tanto può la . d . g . in la . d . e ., quanto
C.211 v. la . d . f . in se, la . d . l . sarà R 12 per essere pari a la . d . f ., la . d . m . sarà R 108 perchè tanto può la . l . d . in la . d . m . quanto la . d . e . in se; et per farne la prova,



vedasi se la proportione della . l . d . alla . d . m . è come la . b . alla . a ., che se si vede l'una, et l'altra essere tripla, et il produtto della . l . d . in la . d . m . è 36, che è pari al quadrato . c . d . e . .

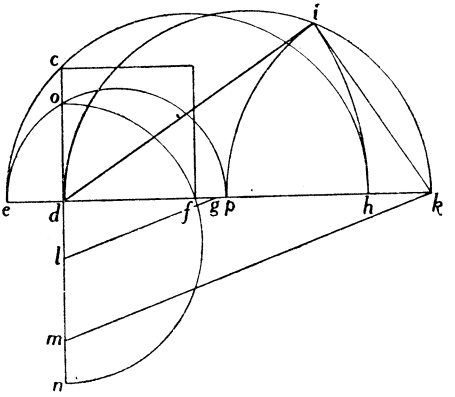
Et questa dimanda è la 116 del terzo, et la dimostratione si cava da la regola 117 trovata con l'Algebra nella detta 116 (1).

§ [114]. *Trovami due linee, che fatto di esse un parallelogrammo sia pari al quadrato . c . d . f ., et che trovato una linea, che sia in proportione a la . b . come la maggiore di dette due linee a la minore, et un'altra, che sia in proportione a detta . b . come la minore a la maggiore, et aggiunte insieme dette due linee siano pari a la . a . .*

Tirasi la . d . f . sino in . e . et la . d . e . sia pari a la . b ., et sopra la . e . f . allungata sino in . k . si faccia il semicir-

(1) Carte 141.

culo . *e* . *c* . *h* ., che tocchi li due punti . *e* .. et . *c* .; et la . *d* . *h* . si divida in due parti pari in punto . *g* ., et dal punto . *d* . si tiri la . *d* . *m* ., che sia pari a la . *a* ., et la . *d* . *l* ., che sia pari a la . *b* ., et dal punto . *l* ., et . *m* . si tiri la . *l* . *g* ., et la . *m* . *k* ., che siano parallele fra di loro, et sopra la . *d* . *k* . si faccia il semicirculo . *d* . *i* . *k* ., et tirasi la . *d* . *i* . pari a la



: *d* . *h* ., et dal punto . *i* . si tiri la . *i* . *k* ., et facciasi la . *p* . *k* . pari a la . *i* . *k* ., et sopra la . *p* . *e* . si faccia il semicirculo . *e* . *o* . *p* ., che taglierà la . *d* . *c* . in punto . *o* .; dico la . *o* . *d* . essere la minore delle due linee addimandate, et per trovare l'altra si farà il semicirculo . *o* . *f* . *n* . sopra la . *o* . *n* ., che tocchi li due punti . *o* ., et . *f* .; dico la . *d* . *n* . essere l'altra.

Come si può vedere col numero. Dato che 'l quadrato . *c* . *d* . *f* . sia 16, la . *a* . 5, la . *b* . 2; la . *d* . *f* . sarà 4 per essere il creatore di 16, la . *d* . *e* . sarà 2 per essere pari a la . *b* ., la . *d* . *h* . sarà 8 perchè tanto può la . *e* . *d* . in la . *h* . *d* ., quanto la . *c* . *d* . in sè; la . *d* . *g* . sarà 4 per essere il mezzo della . *d* . *h* ., la . *d* . *l* . sarà 2 per essere pari a

C.212. la . *b* . et la . *d* . *m* . sarà 5 per essere pari a la . *a* ., la . *d* . *k* . sarà 10 perchè tale proportione ha la . *d* . *g* . con la . *d* . *l* . come la . *d* . *k* . con la . *d* . *m* ., la . *d* . *i* . sarà 8 per essere pari a la . *d* . *h* ., la . *i* . *k* . sarà 6 perchè il suo quadrato, col quadrato della . *d* . *i* . è pari al quadrato della . *d* . *k* ., la . *p* . *k* . sarà 6 per essere pari a la . *i* . *k* . la . *p* . *d* . sarà 4 perchè tutta la . *d* . *k* . è 10, la . *d* . *o* . sarà *R* 8, che tanto può la . *d* . *o* . in sè quanto la . *e* . *d* ., che è 2 in la . *d* . *p* ., che è 4, la . *d* . *n* . sarà *R* 32 perchè tanto può la . *d* . *o* . in la . *d* . *n* ., quanto la . *d* . *f* . in sè; sichè quanto a la prima parte è satisfatta la dimanda, perchè fatto un parallelogrammo della . *d* . *o* ., et della . *d* . *n* . sarà pari a un quadrato fatto sopra la . *d* . *f* .. Et per fare la prova del resto pigliasi una linea che sia in proportione a la . *b* ., che è 2, come la . *o* . *d* ., che è *R* 8, alla . *d* . *n* ., che è *R* 32; tale linea sarà 4, et si salva: poi trovasi una linea, che sia in proportione a la . *b* ., che è 2, come la . *n* . *d* ., che è *R* 32, a la . *d* . *o* ., che è *R* 8, che tale linea sarà 1, che aggiunto col 4 salvato di sopra fa 5, che è pari a la . *a* . come fu addimandato: Et notasi che se la . *d* . *k* . sarà minore o pari a la . *d* . *h* . si tratterà del impossibile: *Et questa è la 118 del terzo*; et la dimostratione si cava da la Regola 119 trovata con la operatione d'Algebra, nella detta 118, che dice: *Trovami due numeri...* (1).

---

(1) Carte 141, v. « Trovami due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 16, et che partito il maggiore per il minore, poi il minore per il maggiore, et gli avvenimenti insieme facciano $4\frac{1}{4}$ ».

Il sistema proposto ha la forma:

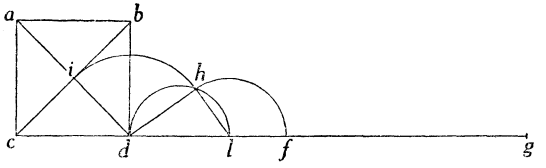
$$\begin{cases} xy = \overline{df}^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{a}{b}\overline{df}^2 \end{cases}$$

dà luogo alla equazione $x^4 - \frac{a}{b}\overline{df}^2 x^2 + \overline{df}^4 = 0$.

§ [115]. *Fammi della linea k due tal parti, che fatto di esse un parallelogrammo, sia pari a un quadrato fatto sopra una di dette linee, et al quadrato . a . b . c . d..*

Tirasi due diametri . *a* . *d*., et . *c* . *b*. li quali si taglieranno in punto . *i*., poi facciasi la . *d* . *g* . pari alla . *k*. la quale dividasi in quattro parti pari, che una sarà la . *d* . *l*. sopra la quale si faccia il semicirculo . *d* . *h* . *l*. et si faccia . *d* . *h* . pari alla . *d* . *i*., et . *l* . *f*. pari a la . *l* . *h* .; dico la . *d* . *f*. essere una parte; et la . *f* . *g* . l'altra.

Come si può vedere col numero. Dato, che la linea . *k* . sia 10, et il quadrato . *a* . *b* . *c* . *d* ., 6, la . *c* . *d*. sarà *R* 6,



et la . *c* . *b* . *R* 12 perchè tanto può la . *c* . *b* . in sè quanto tutte due, la . *c* . *d* ., et la . *b* . *d* .; la . *c* . *i* . sarà *R* 3, la . *d* . *g* . sarà 10 per essere pari alla . *k* ., la . *d* . *l* . sarà C. 212 v.
$2\frac{1}{2}$ per essere la quarta parte della . *d* . *g* ., la . *d* . *h* . sarà *R* 3 per essere pari a la . *c* . *i* ., la . *h* . *l* . sarà *R* $3\frac{1}{4}$ perchè tanto può la . *d* . *l* . in sè quanto la . *d* . *h* ., et la . *h* . *l* .; la . *l* . *f* . sarà *R* $3\frac{1}{4}$ per essere pari a la . *l* . *h* .; la . *f* . *d* .

Il BOMBELLI costruisce la soluzione:

$$x^2 = \overline{df}^2\left(\frac{a}{2b} - \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - 1}\right)$$

in modo analogo a quello indicato al problema 107.

sarà $2\frac{1}{2}$ più $R\,3\frac{1}{4}$, et la $.f.g.$ $7\frac{1}{2}$ meno $R\,3\frac{4}{4}$ per essere tutta la $.g.d.$ 10. Et per farne la prova moltiplicasi la $.d.f.$ in sè, fa $9\frac{1}{2}$ più $R\,81\frac{1}{4}$, che aggiuntoli il quadrato $.a.b.c.d.$, che è 6, fa $15\frac{1}{2}$ più $R\,81\frac{1}{4}$, et a moltiplicare la $.d.f.$, che è $2\frac{1}{2}$ più $R\,3\frac{1}{4}$, via la $.f.g.$, che è $7\frac{1}{2}$ meno $R\,3\frac{1}{4}$, fa $15\frac{1}{2}$ più $R\,81\frac{1}{4}$, che è pari, come si vede, a l'altra somma. *Et questa è la 121 del terzo*; et la dimostratione si cava da la operatione d'Algebra nella detta dimanda 121 (1).

§ [116]. *Trovami due linee, che li lor quadrati aggiunti insieme siano pari al quadrato* $.a.b.c.$, *et che siano in proportione l'uno a l'altro come il quadrato* $.d.e.f.$ *al quadrato* $.g.h.f.$.

Facciasi sopra la $.i.g.$ il semicirculo $.g.e.i.$, che tocchi li due punti $.g.$ et $.e.$; et dal punto $.b.$ si tiri la $.b.o.$ pari a la $.g.i.$, et la $.b.n.$ pari a la $.f.g.$; et dal punto $.o.$ et $.n.$ si tiri la $.o.c.$, et la $.n.l.$; et allungasi la $.a.b.$ sino in $.m.$, facendo la $.b.m.$ pari a la $.b.l.$; et sopra la $.a.m.$ si faccia il semicirculo $.a.p.m.$, che taglierà la $.b.c.$ in punto $.p.$; dico la $.b.p.$ essere

---

(1) Carte 142. Fammi di 10 due tal parte, che moltiplicata l'una via l'altra faccia tanto quanto il quadrato di una di dette parti aggiuntoli 6 ».

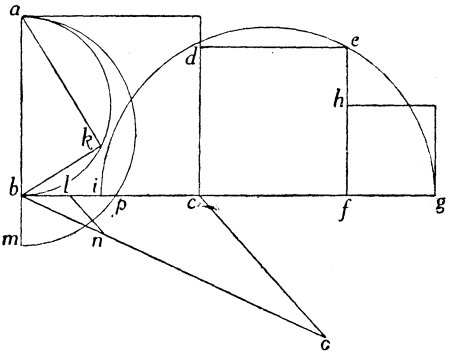
È proposto il sistema: $\begin{cases} x+y=k \\ xy=x^2+\overline{ab}^2. \end{cases}$

Il BOMBELLI costruisce l'espressione:

$$x=\frac{k}{4}+\sqrt{\frac{k^2}{16}-\frac{\overline{ab}}{2}^2}.$$

una delle linee addimandate; et per trovare l'altra facciasi sopra la . *a* . *b* . il semicirculo . *a* . *k* . *b* . et tirasi la . *b* . *k* . pari a la . *b* . *p* ., et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *a* ., che è l'altra linea: Come si può vedere col numero.

Sia il quadrato. *a* . *b* . *c* . 80, il quadrato . *d* . *c* . *f* . 40, il quadrato . *h* . *f* . *g* . 10, la . *f* . *g* . sarà *R* 10, la . *f* . *c* . *R* 40, la



. *c* . *b* . *R* 80, la . *f* . *i* . sarà *R* 160 perchè tanto può la . *f* . *e* . in sè quanto la . *f* . *g* . in la . *f* . *i* ., et tutta la . *i* . *g* . sarà *R* 250, la . *b* . *o* . sarà *R* 250 per essere pari a la . *i* . *g* ., la . *b* . *n* . è *R* 10 per essere pari a la . *f* . *g* ., la . *b* . *l* . sarà *R* $3\frac{1}{5}$ per essere tal proportione la . *b* . *l* . a la . *b* . *c* . come la . *b* . *n* . a la . *b* . *o* ., la . *b* . *m* . sarà *R* $3\frac{1}{5}$ per essere pari a la . *b* . *l* ., la . *b* . *p* . sarà 4 perchè tanto può la . *b* . *p* . C. 213
in sè quanto la . *b* . *m* . in la . *b* . *a* ., la . *b* . *k* . sarà 4 per essere pari a la . *b* . *p* ., la . *a* . *k* . sarà 8 perchè tanto può la . *b* . *a* . in sè, quanto la . *a* . *k* . in sè, et . *b* . *k* . in sè, et li produtti aggiunti insieme, et quanto a la prima parte è satisfatta la dimanda perchè il quadrato fatto sopra la . *a* . *k* ., che è 8 sarà 64, et il quadrato, che è sopra la . *q* . *k* . che è 4 sarà 16, che aggiunti insieme fanno 80,

che è pari al quadrato . *a* . *b* . *c* ., et la proportione da 16 a 64, è sottoquadrupla, et la proportione del quadrato . *g* . *f* . *h* ., che è 10 è sottoquadrupla al quadrato . *e f* . *c* ., che è 40 :

Et questa dimostratione è cavata da la regola 124, et detta regola è cavata da la operatione d'Algebra nella 123 del terzo, che dice : *Trovami due numeri, che li lor quadrati aggiunti insieme facciano 104, et che il quadrato de l'uno moltiplicato per 25 sia pari al quadrato de l'altro* (1).

§ [117]. *Fammi della linea . a . k . quattro parti continoe proportionali, et che le due minori siano pari a la linea . n ..* Facciasi la . *a* . *c* . pari a la . *n* ., et la . *c* . *e* . pari a la . *a* . *c* ., et tirasi la . *e* . *h* . pari a la detta . *a* . *c* ., et la . *f* . *e* . il medesimo, et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *h* ., et dal punto . *f* . la . *f* . *g* . che siano parallele fra di loro, et facciasi la . *c* . *d* . pari a la . *e* . *g* ., et sopra la . *a* . *d* . si faccia il semicirculo . *a* . *c* . *d* ., et dal punto . *c* . tirasi la perpendiculare . *c* . *l* ., et facciasi la . *d* . *b* . pari a la . *d* . *l* . ; dico la . *b* . *c* . essere la minor parte addimandata et la . *a* . *b* ., la seconda. Per trovare la terza facciasi la . *c* . *m* . pari a la . *a* . *b* . et sopra al

---

(1) Carte 142, v. (V. anche: *L'Algebra*, pag. 544).

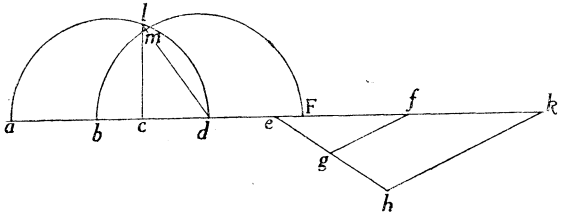
Dal sistema proposto : $x^2 + y^2 = \overline{bc}^2$, $\frac{x^2}{y^2} = \frac{\overline{cf}^2}{\overline{fg}^2}$ il BOMBELLI, nella parte algebrica, ricava $y^2 = \frac{\overline{bc}^2}{\frac{\overline{cf}^2}{\overline{fg}^2} + 1}$. Per la costruzione si osservi che:

$$\overline{if} \cdot \overline{fg} = \overline{cf}^2, \text{ da cui } \frac{\overline{cf}^2}{\overline{fg}^2} + 1 = \frac{\overline{ig}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bl}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bm}}.$$

Dunque $y^2 = \overline{bc}^3 \cdot \frac{\overline{bm}}{\overline{bc}} = \overline{bc} \cdot \overline{bm} = \overline{ab} \cdot \overline{bm}$.

. *b* . *k* . facciasi il semicirculo, che tocchi li due punti . *b* . et . *m* . che taglierà la . *b* . *k* . in punto . *F* ., et la . *c* . *F* . sarà la terza, et la . *F* . *k* . la quarta : Come si può vedere col numero.

Sia la . *n* . 4, la . *a* . *k* . 16 la . *a* . *c* ., et la . *c* . *e* ., et la . *f* . *e* ., et la . *e* . *h* . tutte saranno 4, per essere tutte pari a la



. *n* ., la . *f* . *k* . sarà pure 4 perchè tutta la . *a* . *k* . è 16, che trattone la . *f* . *a* . che è 12, resta 4, la . *e* . *g* . sarà 2 perchè tal proportione è da la . *e* . *f* . a la . *e* . *k* . come è la . *e* . *g* . a la . *e* . *h* ., la . *c* . *d* . sarà 2 per assere pari a la . *e* . *g* . la
C.213v. . *l* . *d* . sarà *R* 12 perchè il suo quadrato è pari al quadrato della . *c* . *l* ., et al quadrato della . *c* . *d* ., la . *d* . *b* . sarà *R* 12 per essere pari a la . *d* . *l* ., la . *c* . *b* . sarà *R* 12 meno 2 perchè la . *c* . *d* . è 2, la . *a* . *b* . sarà 6 meno *R* 12 perchè aggiunto con la . *b* . *c* ., fa 4 che è la . *a* . *c* ., la . *F* . *k* . sarà 18 meno *R* 108 perchè tanto può la . *b* . *c* ., che è *R* 12 meno 2, in la . *k* . *F* ., che è 18 meno *R* 108, quanto la . *c* . *m* ., che è pari a la . *a* . *b* ., in la . *c* . *F* . che è *R* 108 meno 6. *Et questa è la 127 del terzo* (1); et la dimostra-

---

(1) Carte 143, v. (V. anche *L'Algebra* a pag. 555).

Nella parte algebrica il BOMBELLI osserva che date quattro quantità continuamente proporzionali $\dot{\cdot}\dot{\cdot}\, x : xy : xy^2 : xy^3$, la terza è uguale al prodotto della prima per il rapporto della somma delle due ultime alla somma delle due prime, cioè: $\dfrac{xy^2 + xy^3}{x + xy} \cdot x = xy^2$.

Indicata con x la prima, la seconda, per le condizioni del problema sarà

tione si cava da la operatione d'Algebra in solvere detta dimanda.

$n - x$, la somma delle ultime due sarà $\overline{ak} - n$, e la terza sarà: $\dfrac{x \cdot \overline{ak} - n}{n}$ la quarta $\overline{ak} - n - x\dfrac{\overline{ak} - n}{n}$ e per ottenere l'equazione del problema scrive che il prodotto della prima per la terza è eguale al quadrato della seconda.

Ottiene così l'equazione

$$x^2 + \frac{2n^2}{\overline{ak} - 2n}x - \frac{n^3}{\overline{ak} - 2n} = 0$$

$$x = \frac{-n^2}{\overline{ak} - 2n} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{\overline{ak} - 2n}\right)^2 + \frac{n^3}{\overline{ak} - 2n}},$$

e questa costruisce geometricamente.

Per la costruzione si osservi che:

$$\overline{cd} = \overline{ed} = n \cdot \frac{n}{\overline{ak} - 2n} = \frac{n^2}{\overline{ak} - 2n}, \quad \overline{cl}^2 = n \cdot cd = \frac{n^3}{\overline{ak} - 2n},$$

$$\overline{dl} = \sqrt{\left(\frac{n^2}{ak - 2n}\right)^2 + \frac{n^3}{ak - 2n}}.$$

6 CARTE BIANCHE

Le carte seguenti non erano numerate; fu ad esse data una numerazione a lapis, in continuazione della precedente, per rendere più agevoli le citazioni.

L' ALGEBRA

PARTE MAGGIORE DELL' ARITMETICA

DI RAFAEL BOMBELLI

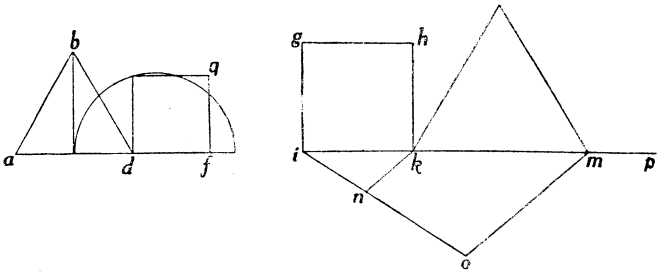
LIBRO QUINTO

[Cap. I.]

[PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA]

C. 219 § [118]. *Egli è un triangolo equilatero, che la sua superficie è pari al quadrato . g . h . i . k . addimando il lato di detto triangolo.*

Questa dimanda non vuol dire altro che, fammi del qua-



drato . g . h . i . k . un triangolo equilatero, che gli sia pari di superficie.

Et per fare questo pigliasi un triangolo equilatero, et facciasi un quadrato pari a detto triangolo, et sia il triangolo pigliato . a . b . d . che 'l suo quadrato è . d . f . q .: poi tirasi la linea . i . o . in tal modo, che . i . n . sia pari a la . d . f . lato del quadrato . d . f . q ., et la . n . o . sia pari a la . b . d . lato del triangolo . a . b . d .. Poi allungasi la . i . k . sino in . p ., et

tirasi la . *k* . *n* ., et la . *o* . *m* . in tal modo, che . *o* . *m* . sia equidistante a la . *n* . *k* .; la quale . *o* . *m* . taglia la linea . *i* . *p* . in punto . *m* .; dico la . *k* . *m* . essere il lato del triangolo addimandato: perchè tal proportione è da la . *i* . *k* . a la . *i* . *n* . come da la . *k* . *m* . a la . *n* . *o* ., et tal proportione è da la . *i* . *n* . a la . *n* . *o* . pari in superficie per essere . *i* . *n* . faccia del quadrato . *d* . *f* . *q* ., et la . *n* . *o* . pari a la . *b* . *d* . lato del triangolo . *a* . *b* . *d* ., così la . *i* . *k* . sarà pari di superficie a la . *k* . *m* . essendo la . *i* . *k* . lato del quadrato . *g* . *h* . *i* . *k* ., et la . *k* . *m* . lato del triangolo equilatero . *l* . *k* . *m* ..

§ [119]. *Egli è il triangolo diversilatero, che è di superficie 168 et li suoi lati sono proportionati a un triangolo, che li tre suoi lati siano 13, 14 et 15; addimandasi quanto è ciascuno lato di detto triangolo.*

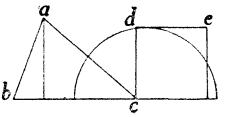
Per solvere simili domande vedasi quanto sarebbe di superficie il triangolo, che li suoi lati fussero 13, 14 e 15, che
C. 219 v. come s'è detto sarebbe 84: hora partisi la superficie . *A* ., che è 168 per detto 84 ne viene 2, che 'l suo creatore è *R* 2: Moltiplicasi detto 13, 14 et 15 per detta *R* 2 ne viene *R* 450, et *R* 392, et *R* 338, et questi sono li lati di detto triangolo: Et questa regola viene da proportione.

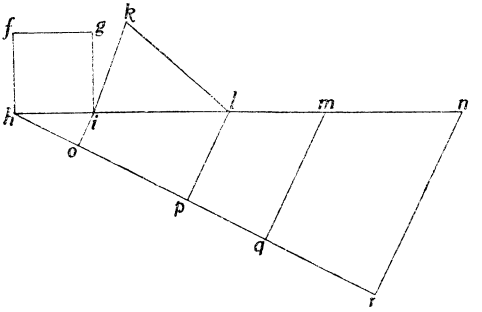
Et ancora si può trovare con l'Algebra con ponere, che le faccie di detto triangolo . *A* . siano 13$\underline{1}$, 14$\underline{1}$, et 15$\underline{1}$, che la sua superficie sarà $84x^2$, et questi sono eguali a 168, che agguagliato la cosa valerà *R* 2. Et perchè la positione fu di 13$\underline{1}$, 14$\underline{1}$, et 15$\underline{1}$, si moltiplica detta *R* 2 via 13, 14 et 15, che ne vengono *R* 450, *R* 392, et *R* 338, come fu detto di sopra.

§ [120]. *Egli è un triangolo diversilatero, che è proportionato al triangolo . a . b . c . et è di superficie pari al quadrato . f . g . h . i . addimandasi li suoi lati.*

Trovasi il quadrato pari al triangolo . *a* . *b* . *c* ., che sarà . *c* . *d* . *e* . poi allungasi la linea . *h* . *i* . sino in punto . *n* . o più

che non importa: poi tirasi la .*h*.*r*. in lungo pure quanto si voglia: poi facciasi la .*h*.*o*. pari a la .*c*.*d*., et .*o*.*p*. pari a la .*b*.*c*., et .*p*.*q*. pari a la .*b*.*a*. et .*q*.*r*. pari a la .*a*.*c*. poi tirasi .*i*.*o*., .*l*.*p*., .*q*.*m*., .*r*.*n*. tutte parallele a detta .*i*.*o*., che taglieranno la .*h*.*n*. in punto .*l*. in punto .*m*. et in punto .*n*., dico le tre linee .*i*.*l*., .*l*.*m*., .*m*.*n*. essere li tre lati del triangolo addimandato, per le raggioni



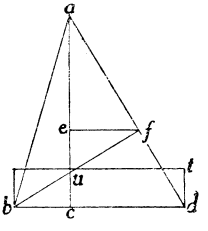


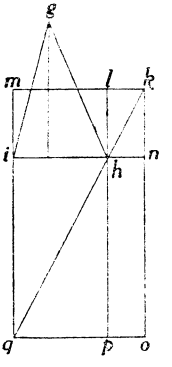
dette ne la medesima dimanda del triangolo equilatero: sì che formato il triangolo .*i*.*k*.*l*. de le sudette tre linee, sarà pari di superficie al quadrato .*f*.*g*.*h*.*i*..

§ [121]. *Egli è il triangolo .a.b.d. nel quale voglio tirare .b.f. in tal modo, che tagli de la superficie di detto triangolo una parte pari al triangolo .g.h.i., et tal parte sia sopra la .b.d..*

Facciasi del triangolo .*g*.*h*.*i*. il parallelogrammo .*l*.*m*.*h*.*i*., che tagli la perpendiculare .*g*.*r*. in due parti pari et facciasi la .*h*.*p*. pari a la .*b*.*d*., poi tirasi il diametro .*q*.*h*. il quale si allunghi tanto, che allungando .*m*.*l*. si taglino insieme, che si taglieranno in punto .*k*.. Et dal punto .*k*. si tiri la C. 220.
.*k*.*o*. parallela a la .*l*.*p*., et allungasi .*h*.*i*. sino in .*n*.. Dico, che 'l parallelogrammo .*h*.*o*. è pari al parallelogrammo

. *h* . *m* . per la 44 del primo, et perchè esso parallelogrammo . *h* . *m* . è pari al triangolo . *g* . *h* . *i* . così il parallelogrammo . *h* . *o* . è pari al triangolo . *g* . *h* . *i* .: et perchè la . *h* . *p* . è pari a la . *b* . *d* . facciasi sopra la . *b* . *d* . il parallelogrammo



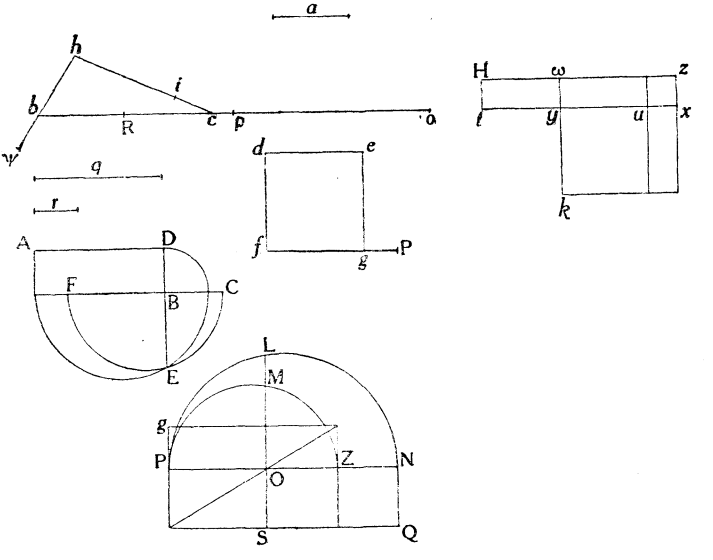


. *b* . *d* . *t* . il quale taglierà la perpendiculare . *a* . *c* . in punto . *u* . poi segnasi il punto . *e* . in tal modo che . *e* . *u* . sia pari a la . *u* . *c* ., et dal punto . *e* . si tiri la . *e* . *f* . parallela a la . *b* . *d* ., et dal punto . *f* . si tiri la . *b* . *f* .. Dico che'l triangolo . *b* . *f* . *d* . esser pari al triangolo . *g* . *h* . *i* . perchè il parallelogrammo . *b* . *d* . *t* . è pari al triangolo . *g* . *h* . *i* ., et al triangolo . *b* . *f* . *d* . perchè la . *d* . *t* . è mezzo di . *e* . *c* . .

§ [122]. *Sia data la linea . b . c . sopra la quale si habbia a formare un triangolo, che li altri due lati uno sia mag-*
C. 220 v. *giore de l'altro quanto è la linea . a . et che detto triangolo sia di superficie pari al quadrato . d . e . f ., addimandasi li lati di detto triangolo.*

Pongasi che la faccia minore di detto triangolo sia la linea . ψ . *h* . meno la . *b* . ψ . la quale . *b* . ψ . sia il mezzo de la . *a* . et la . *h* . *c* . sia quanto è la . *h* . ψ . et il mezzo della . *a* .; si che . *h* . *i* . verrà ad essere la cosa, più la . *i* . *c* . mezzo de la . *a* .. Hora sommansi tutti li lati del triangolo: insieme

fanno tutta la . *b* . *o* ., che è tutta la . *b* . *c* . più due volte la . *h* . *i* ., che è la cosa: che divisa detta . *b* . *o* . in due parti [pari in punto . *p* ., et la . *b* . *c* . in due parti pari in punto . *R* .], ne verrà, la . *p* . *R* . *b* ., et la . *b* . *R* . sarà nota, et . *R* . *p* . sarà la cosa. Hora cavasi la . *b* . *h* . de la . *p* . *b* . resta . *q* . che è nota perchè . ψ . *h* . è pari a la . *R* . *p* ., si cava ancora di



detta . *p* . *b* . la . *h* . *c* ., che resta . *r* .; et ancora si cava di detta . *p* . *b* . la . *b* . *c* . quale è nota, resta . *c* . *p* .; (. *R* . *p* . cosa meno la . *R* . *c* . nota): Hora si hanno quattro linee, che si hanno a moltiplicare l' una via l' altra, et il creatore del produtto sarà pari a la superficie . *f* . *d* . *e* .. Facciasi la . *p* . *b* ., et . *p* . *c* . la superficie . *t* . *x* . *H* . *z* .. Et perchè la linea . *t* . *H* . è pari a la . *p* . *c* ., et la . *t* . *x* . alla . *p* . *b* . il supplemento . ω . *u* . sarà meno; et il supplemento . *i* . ω. sarà più, et saranno pari, che aggiunte insieme fanno nulla: Et questo è perchè le due superficie . *k* . *z* . et . *z* . *u* . sono quadrate: però detti supplementi sono pari. Sichè detta moltiplicatione

sarà censo . z . k . meno il quadrato . u . k . sarà noto. Hora moltiplicasi la . q . r . ne viene la superficie . A . B . D ., che ridutta in linea (servendosi de la . d . e . per la comune misura) et riducendo in linea il censo . z . k ., et il quadrato . k . u ., che sarà . N . O . meno . O . Z ., che moltiplicato via la . B . C . linea del parallelogrammo . A . B . D . ridutto in linea; come si vede per la figura, . B . E . F .; che essendo stato insegnato a suo luogo non replicherò hora il modo; sarà il censo . N . O . S . meno la superficie . O . S . Z . et questo è eguale al quadrato del quadrato . d . f . e . ma per essere la sua linea medesima la comune misura, tanto si potrà dire il censo . N . O . S . meno la superficie nota . S . O . Z ., che levato il meno si havrà il censo . N . O . S . eguale a un quadrato fatto sopra la linea . f . P ., che è la somma del quadrato . f . d . e . et la superficie . O . S . Z . perchè la linea . P . g . è la linea del quadrato fatto de la superficie . S . O . Z .. Et benchè sia stato detto a suo luogo di detto agguagliare non di meno, lo replicherò anco qui. Tirasi la . Q . R ., et la . R . G ., et sia . R . G . pari a la . N . Q ., et . R . G . pari a la . P . f ., et tirasi la . S . R ., et la . T . G ., et sia detta . T . G . parallela a la . R . S . et allungasi la . S . T .
C. 221. sino in . V ., et sia . T . V . pari a . P . f ., et sopra . S . V . si faccia il semicirculo . S . X . V ., et poi tirasi del punto . T . la . T . X . dico la . T . X . essere la linea . a . h ., che trattone . b . a . resta la . b . k . et per trovare . h . c . aggiungasi la . i . c ., che ne viene la . c . k . le quali due linee formano il triangolo . k . b . c ., che è il triangolo addimandato. (1)

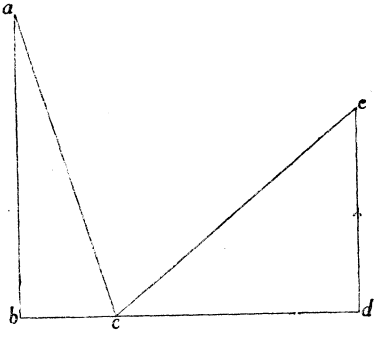
---

(1) I tre lati del triangolo sono indicati dalle espressioni $x - \frac{a}{2}$, $x + \frac{a}{2}$, $\overline{bc}$, perciò l'area è espressa da:

$$\sqrt{\left(x^2 - \frac{\overline{bc}^2}{4}\right)\left(\frac{\overline{bc}^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right)} = \overline{gf}^2$$

Per la soluzione, il BOMBELLI, assume come unità di lunghezza il lato $\overline{gf}$

§ [123]. *Sia il piano . b . d . lungo canne 150, et sopra il punto . b . sta una altezza perpendiculare alta canne 120, che è la . a . b ., et sopra al punto . d . ne sta un' altra cioè . d . e ., che è alta canne 80; hora voglio nel piano . b . d . segnare un punto il quale sarà . c ., che tirato una linea da esso punto a la altezza . e . sia pari a la linea tirata da esso punto . c . a la altezza . a ..*



Pongasi . b . c . essere 1 $\underline{1}$. c . d . sarà il resto fino in 150 cioè 150 meno 1 $\underline{1}$, hora per trovare quanto è la linea . a . c ., et: . c . e . aggiungasi il quadrato . b . a ., fa 14400 più 1 $\underline{2}$, che 'l suo creatote è R | 14400 più 1 $\underline{2}$ |, et tanto è la linea . a . c .: Per trovare la . c . e . quadrasi . c . d ., che è 150 m. 1 $\underline{1}$, fa 22500 meno 300 $\underline{1}$ più 1 $\underline{2}$, che aggiunto con il quadrato . d . e . che è 6400, fa 28900 m. 300 $\underline{1}$ più 1 $\underline{2}$, che 'l suo creatore è R | 28900 m. 300 $\underline{1}$ più 1 $\underline{2}$ |, che è eguale a la . a . c . cioè a

---

del quadrato dato, ed, in questa ipotesi, trova i segmenti BC, OZ che misurano le aree $\frac{bc^2}{4} - \frac{a^2}{4}$, $\frac{bc^2}{4}$.

Indicando con $\overline{ON}$ il segmento incognito che corrisponde al quadrato $\overline{x}^2$ (tale cioè che $\overline{ON} \cdot \overline{gf} = x^2$) egli giunge così alla equazione:

$$(\overline{ON} - \overline{OZ}) \cdot \overline{BC} = \overline{gf}^2 .$$

L' *agguagliamento* (la risoluzione) non offre difficoltà alcuna; ma per i molti errori di copia che qui si ritrovano nel manoscritto, non è facile la ricostruzione della figura (che manca). Temendo di non riuscire alla esatta interpretazione del testo, si è perciò tralasciata.

R |14400 più 1⌢| che levata la Radice legata a ciascuna de le parti, si haverà

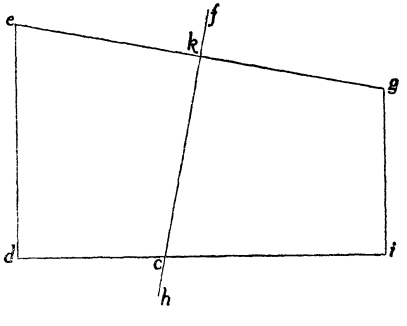
28900 meno 300⌣ più 1⌢ eguale a 14400 più 1⌢,

che, levato 1⌢ a ciascuna delle parti et il meno, et il minor numero, si haverà

300⌣ eguale a 14400,

che, agguagliato, la cosa valerà 48 $\frac{1}{3}$, et tanto è dal punto . *b* . al punto . *c* ., che il suo quadrato sarà 2336 $\frac{1}{9}$, che aggiunto col quadrato . *a* . *b* . fa 16736 $\frac{1}{9}$, che 'l suo creatore è R 16736 $\frac{1}{9}$, et tanto è la linea . *c* . *a* . overo . *c* . *e* .

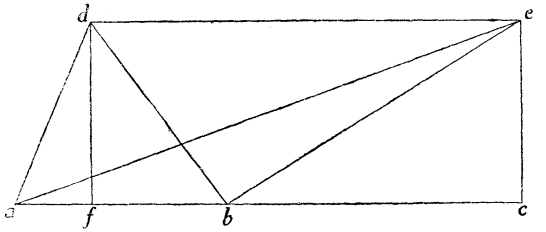
§ [124]. *Sia la linea . d . i ., et sopra il punto . d . sia tirata la perpendiculare . e . d . et sopra il punto . i . sia tirata la perpendiculare . g . i .. Voglio ne la . d . i . segnare un punto, che tirato da detto punto due linee una al punto . g . et l'altra al punto . e . che siano pari fra di loro.*



Per trovare dove si ha a fare il punto . *c* . tirasi la . *e* . *g* . la quale sia divisa in due parti pari, et sia tirata la . *f* . *h* . che taglia la . *e* . *g* . in punto . *k* . ad angol retto la quale . *f* . *h* . C.221 taglierà la . *d* . *i* . in punto . *c* . dico 'l punto . *c* . (per la *terza* del *terzo*) essere il punto addimandato: perchè da tutti i punti, che saranno nella linea . *f* . *h* . se saranno tirate due

linee l'una al punto . e ., et l'altra al punto . g . sempre saranno pari.

§ [125]. *Sia il triangolo . a . b . d ., che li suoi lati cioè . a . b . è* 14, *. b . d .* 15, *. a . d .* 13. *Voglio sopra la . a . b . formare un altro triangolo, cioè . a . b . e ., che sia pari di superficie ad . a. b . d ., et che le linee . a . e ., et . e . b . siano il doppio della . b . d ., et . a . d . aggiunte insieme: et la per-*



pendiculare . e . c . sia pari a la perpendiculare . d . f . addimandasi quanto sono le linee . a . e ., et . e . b . ciascuna da se (1).

Prima vedasi se detta perpendiculare . e . c . cade dentro o fuori del triangolo . a . b . d . in questo modo: trovasi quanto è la perpendiculare . d . f . che per le regole date è 12: quadrasi detto 12 fa 144, che aggiunto col quadrato di . a . b . che è 196, fa 340, che 'l suo creatore è R 340, la quale si aggiunge con detta perpendiculare . d . f . fa 12 più R 340: vedasi poi quanto ha da essere . a . e ., et . e . b ., che havendo ad essere il doppio di . a . d ., et . d . b . sarà 56: hora vedasi, chi è più 56 overo 12 più R 340, che si vede che 56 è maggiore: però la perpendiculare . e . c . caderà fuori del

(1) Il triangolo (13, 14, 15) è **razionale**, cioè somma di due triangoli pitagorici, in esso sono razionali i lati, le altezze, l'area, ed i segmenti che l'altezza taglia nella base. Anche al § 119 si è usato tale triangolo. Notevole il criterio qui enunciato per giudicare se il piede dell'altezza cade entro la base o fuori.

triangolo . *a* . *d* . *b* . . Ma quando il 56 fusse stato minore detta perpendiculare . *e* . *c* . sarebbe caduta dentro sopra la . *a* . *b* . Et se fusse stato pari, sarebbe caduta nel punto . *b* . . Ma cadendo fuori pongasi che cada lontano dal . *b* . $1\underline{1}$ cioè, che . *b* . *c* . sia $1\underline{1}$, et . *c* . *e* . 12 per essere pari a la . *d* . *f* . ; hora aggiungasi il quadrato . *c* . *b* . che è $1\underline{2}$ con . *c* . *e* . , che è 144 fa 144 più $1\underline{2}$, che 'l suo creatore è R $|\underline{144 \text{ più } 1\underline{2}}|$, et tanto è la linea . *b* . *e* . . Per trovare la . *a* . *c* . aggiungasi il quadrato . *a* . *c* . che è 196 più $\frac{1}{28}$ più $1\underline{2}$ perchè la . *c* . *e* . 14 più $1\underline{1}$, che aggiunto con 144, quadrato di . *c* . *e* . , fa 340 più $\frac{1}{28}$ più $1\underline{2}$, che 'l suo creatore è R $|\underline{340 \text{ più } 28\underline{1} \text{ più } 1\underline{2}}|$ et tanto è la . *a* . *e* . la quale aggiunta con la . *e* . *b* . fa R $|\underline{340 \text{ più } 28\underline{1} \text{ più } 1\underline{2}}|$ più R $|\underline{144 \text{ più } 1\underline{2}}|$ che è uguale a 56 doppio di . *a* . *d* . , et . *d* . *b* . . Et per fuggire fatica ne lo agguagliare, levasi a ciascuna de le parti la R $|\underline{144 \text{ più } 1\underline{2}}|$ resterà

56 meno R $|\underline{144 \text{ più } 1\underline{2}}|$ eguale a R $|\underline{340 \text{ più } 28\underline{1} \text{ più } 1\underline{2}}|$.

C. *222*. Quadrasi ciascuna de le parti, si haverà

3280 più $1\underline{2}$ meno R $|\underline{1806336 \text{ più } 12144\underline{2}}|$
eguale a 340 più $28\underline{1}$ più $1\underline{2}$,

che, levato il meno, et il 340 più $28\underline{1}$ più $1\underline{2}$, si haverà

2940 meno $28\underline{1}$ eguale a R $|\underline{1806336 \text{ più } 12544\underline{2}}|$,

che, quadrato ciascuna de le parti, si haverà

8643600 meno $162640\underline{1}$ più $784\underline{2}$ eguale a 1806336,

che levato il meno, et la minor quantità di censi et numero, si haverà

$$6837264 \text{ eguale } 164640\underline{1} \text{ più } 117601\underline{2},$$

che ridutto a $1\underline{2}$ si haverà

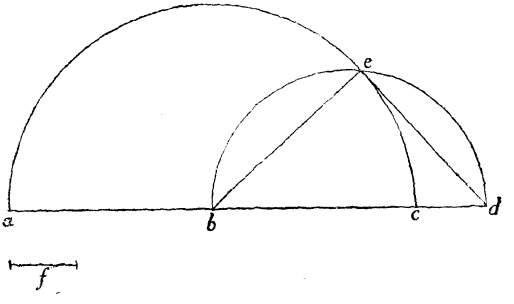
$$581\frac{2}{5} \text{ eguale a } 1\underline{2} \text{ più } 14\underline{1},$$

che agguagliato la cosa valerà R $630\frac{2}{5}$ meno 7, et tanto sarà la linea . *b* . *c* . . Per trovare da poi quanto fa . *b* . *e* . , et la . *a* . *e* . ciascuna da sè: quadrasi . *b* . *c* . fa, $679\frac{2}{5}$ meno R $123718\frac{2}{5}$, che aggiunto con . *c* . *e* . , che è 144, fa $823\frac{2}{5}$ meno R $123718\frac{2}{5}$, che il suo creatore sarà 28 meno R $39\frac{2}{5}$: et tanto è la . *b* . *e* . . Per trovare la . *a* . *e* . quadrasi . *a* . *c* . , che è R $630\frac{2}{5}$ più 7, farà $679\frac{2}{5}$ più R $123718\frac{2}{5}$ che aggiuntoli il quadrato . *c* . *e* . cioè 144 fa $823\frac{2}{5}$ più R $123718\frac{2}{5}$ che 'l suo creatore è 28 più R $39\frac{2}{5}$, et tanto è la linea . *a* . *e* . .

§ [126]. *Data la linea . a . d ., che sia lunga 7 volte la linea . f ., volendone trovare la sua Radice,...*

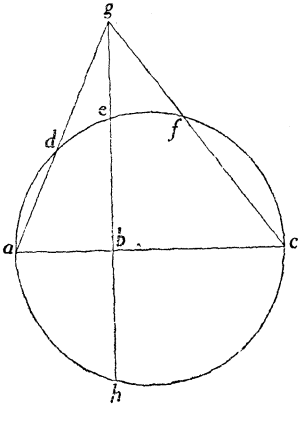
tagliasene la . *c* . *d* . pari a la . *f* . , et sopra il restante cioè ad . *a* . *c* . si faccia il semicirculo . *a* . *e* . *c* . , et dal centro . *b* . sino a la . *d* . se li faccia il semicirculo . *b* . *e* . *d* . li quali due semicirculi si taglieranno in punto . *e* . et da detto punto . *e* . si tiri la . *e* . *d* . : dico detta . *e* . *d* . essere il crea-

tore de la . *a* . *d* . . Et si prova in questo modo : tirasi la . *b* . *e* . , et l'angolo . *b* . *e* . *d* . per la 31 del Terzo sarà retto, et per



la 18 del terzo tanto può la . *a* . *d* . , [in la . *c* . *d* .] quanto . *d* . *e* . in sè, si che detta . *d* . *e* . per le propositioni allegate, è medio proportionale fra . *a* . *d* . et . *c* . *d* . .

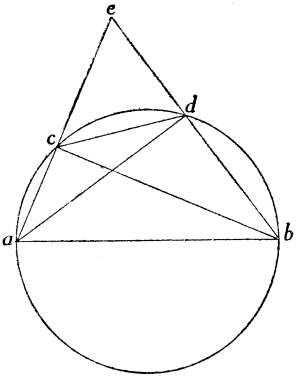
§ [127]. *Sia il semicirculo . a . d . c . , et sopra il diametro . a . c . , che è 14, sia il triangolo . a . g . c . , et sia il lato . g . c . 15, et . a . g . 13 addimando quanto sia la . f . c . , et la . a . d . .*



Tirasi la perpendiculare . *g* . *b* . , che per le regole date sarà 12, et la . *a* . *b* . sarà 5, et la . *b* . *c* . 9: hora per trovare quanto è la . *b* . *e* . la quale è medio proportionale fra la . *a* . *b* . , et . *b* . *c* . per essere l'angolo . *a* . *e* . *c* . retto; moltiplicasi 5 via 9, fa 45, che 'l suo creatore è R 45; et tanto è la . *b* . *e* . ; et la . *g* . *e* . sarà il
C. 222 v. restante fino in 12 cioè *12 meno R 45*. Et è manifesto che se il semicirculo fusse fornito, et la linea . *b* . *e* . fusse allungata

sino all'altra circumferentia, sarebbe lunga il doppio cioè R 180, che aggiunta con . *e* . *g* . sarebbe 12 più R 45: Et tanto sarebbe tutta la linea . *g* . *h* ., che moltiplicata via la . *g* . *e* . fa 99, et tanto ha da fare la . *a* . *g* . via la . *d* . *g* ., et la . *c* . *g* . via la . *g* . *f* . siche partito detto 99 per 13, et per 15 ne viene $7\frac{8}{13}$, et $6\frac{3}{5}$, et la prima parte sarà la . *g* . *d* ., et l'altra la . *g* . *f* ., che tratto $6\frac{3}{5}$ di 15 resta $8\frac{2}{5}$, et tratto $7\frac{8}{13}$ di 13, resta $5\frac{5}{13}$, et tanto è la . *a* . *d* ..

§ [128]. *Sia il semicirculo . a . c . b ., et sopra il diametro . a . b . che è 14, sia il triangolo . a . e . b ., che 'l lato . a . e . sia 13, et il lato . b . e . 15, et che da li due punti dove taglia detti due lati la circumferentia del circulo sia tirata una retta cioè . c . d .: addimandasi quanto sarà lunga detta retta.*



Prima si truova quanto è . *d* . *b* ., et . *a* . *c* . per la regola mostrata ne la dimanda passata, che . *d* . *b* . sarà $8\frac{2}{5}$, et l'altra $5\frac{5}{13}$: Hora bisogna truovare quanto è la . *a* . *d* ., che l'angolo . *a* . *d* . *b* . è retto per essere nel semicirculo: quadrasi . *b* . *d* . fa $70\frac{14}{25}$, che tratto di 196 quadrato de la . *a* . *b* ., resta $125\frac{11}{25}$ che 'l suo creatore è $11\frac{1}{5}$, et tanto è la . *a* . *d* ., et per trovare la . *c* . *b* . quadrasi . *a* . *c* ., fa $28\frac{168}{169}$, che tratto

di 196 quadrato di . *a* . *b* ., resta $167\frac{1}{169}$, che 'l suo creatore è $12\frac{12}{13}$, et tanto è la . *c* . *b* .. Et perchè ogni quadrilatero, che sia dentro d'un circulo tanto faranno a moltiplicare le due linee opposite l'una a l'altra, et sommate insieme, quanto le due diametrali l'una via l'altra: però moltiplicasi . *a* . *d* . via . *c* . *b* . fanno $144\frac{48}{65}$, et tanto hanno da fare . *a* . *c* . via . *d* . *b* . et . *c* . *d* . via . *a* . *b* ., aggiunti e produtti insieme, che moltiplicato . *a* . *c* . via . *d* . *c* . fa $63\frac{63}{65}$, che tratto $144\frac{48}{65}$, resta $80\frac{10}{13}$, et tanto deve essere il produtto di . *a* . *b* . in . *c* . *d* . che partito detto $80\frac{10}{13}$ per . *a* . *b* ., cioè 14, ne viene $5\frac{10}{13}$, et tanto è la . *c* . *d* ..

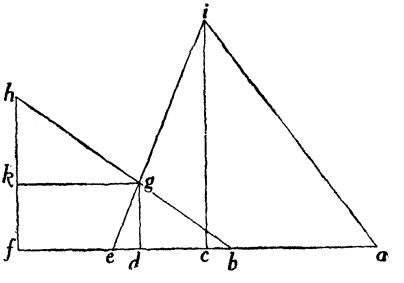
4 CARTE BIANCHE

C. 227. § [129]. *Egli è il triangolo . a . e . i ., che 'l lato . a . e . è 14, . e . i . 13, et . i . a . 15, et lontano da esso triangolo, è posto il punto . h . in tal modo, che tirata la perpendiculare . h . f . cada lontano dal punto . e . 5, et la . h . f . sino a la linea . a . f . è 8: hora voglio dal detto punto . h . tirare una linea, che vada a trovare la . e . a . o vero la . a . i . la quale tagli del triangolo sopradetto . a . e . i . 12 di superficie, et che tal parte di superficie sia sopra la linea . a . e .: addimandasi quanto sarà la linea . g . d .* (1).

---

(1) In questo problema e nel seguente la *posizione del punto h* è *determinata col* **metodo delle coordinate.**

Per solvere tal dimanda trovasi quanto è la perpendiculare . *i* . *c* ., che per le regole date è 12: Hora, per fuggire i rotti, pongasi la perpendiculare . *g* . *d* . essere 12$\underline{1}$. Et per essere . *c* . *e* . 5, si potrà dire se . *c* . *i* . che è 12 di perpendiculare mi dà 5 di base, che mi daranno 12$\underline{1}$ di perpendiculare, cioè la . *g* . *d* . ?, che verranno ad essere 5$\underline{1}$, cioè la . *d* . *e* ., et la . *d* . *f* . sarà 5$\underline{1}$ più 5, per essere . *e* . *f* . 5. Tirasi poi la . *g* . *k* . equidistante a la . *d* . *f* ., che taglierà la . *f* . *h* . in punto . *k* ., et . *f* . *k* . sarà 12$\underline{1}$ per essere pari a la . *g* . *d* ., et . *k* . *h* . verrà ad essere il restante fino in 8, per essere . *f* . *h* . 8, cioè 8 meno 12$\underline{1}$: Et per la regola de la proportione si dirà se 8 meno 12$\underline{1}$, perpendiculare, mi da di base 5 più 5$\underline{1}$, cioè la . *g* . *k* ., che mi darà 8, cioè la perpendiculare . *f* . *h* . ? che è per trovare la base . *b* . *f* ., che verrà a dare $\frac{40\underline{1} \text{ più } 40}{8 \text{ meno } 12\underline{1}}$, et tanto è tutta la . *b* . *f* ., che trattone . *e* . *f* . che è 5, restano $\frac{100\underline{1}}{8 \text{ meno } 12\underline{1}}$, che tanto è la . *b* . *e* .: vedasi poi quanto è di superficie il triangolo . *b* . *g* . *e* ., che havendo nota la base . *b* . *e* . che è $\frac{100\underline{1}}{8 \text{ meno } 12\underline{1}}$, et la perpendiculare . *g* . *d* . 12$\underline{1}$, che moltiplicato il tutto de l'una via il mezzo dell'altra, fa $\frac{600\underline{2}}{8 \text{ meno } 12\underline{1}}$, et questo è eguale a 12 di superficie, che si haveva da levare dal triangolo . *a* . *e* . *i* ., che levato il rotto, et ridutto a 1$\underline{1}$ si haverà



$$1\underline{2} \text{ più } \frac{6\underline{1}}{25} \text{ eguale a } \frac{4}{25},$$

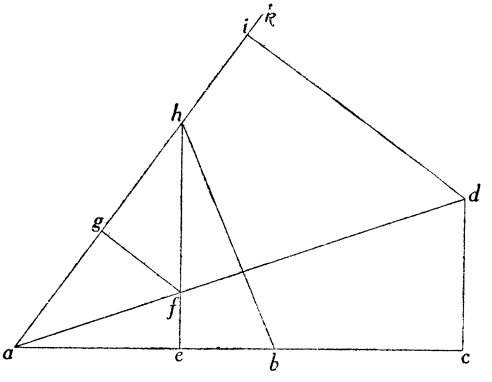
che, agguagliato, la cosa valerà R $\frac{109}{625}$ meno $\frac{3}{25}$. Et perchè la positione fu 12⊥ si moltiplicherà detta valuta per 12, che ne verrà R 25 $\frac{71}{625}$ meno 1 $\frac{12}{25}$: et tanto è la perpendiculare . *g* . *d* . .

Poi bisogna trovare quanto è la . *b* . *e* ., che, havendo nota la superficie del triangolo . *b* . *g* . *e* ., basta partire detta superficie per il mezzo della perpendiculare . *g* . *d* . che ne verrà R 27 $\frac{108460917}{205262929}$ più 1 $\frac{7873}{14327}$, et se detta linea superasse
C.227v. la . *a* . *e* ., che è 14, bisognarebbe procedere per la strada, che si metterà ne la seguente dimanda.

§ [130]. *Sia dato il triangolo . a . b . h ., che 'l lato . a . b . è 14; . a . h . 15, et . h . b . 13. et fuori di esso triangolo sia il punto . d . dal quale tirando la perpendiculare . d . c . caderà lontano da punto . b . 10, et la perpendiculare . d . c ., che cade sopra la . a . c . è 8, vorrei dal detto punto . d . tirare una retta la quale tagliasse il triangolo in due parti, et che la parte di sotto sia 60 di superficie: addimandasi dove taglierà detta linea.*

Questa dimanda è quella promessa nella passata, che, facendo la positione, come s'è fatto nell'altra: la linea . *a* . *b* . sarebbe più di 14: però bisogna mutar modo, et tirare la linea et vedere dove taglia la . *h* . *e* . perpendiculare del triangolo . *a* . *h* . *b* . sopra la . *a* . *b* . la quale, come ho detto è 12, et . *e* . *b* . 5, et . *a* . *e* . 9 . però per la regola de la positione si dirà, se . *a* . *c* ., che è in tutto 24, cioè . *a* . *b* . 14, et . *b* . *c* . 10, mi dà de perpendiculare 8, che mi darà . *a* . *e* . che è 9?. Bisogna trovare la perpendiculare . *f* . *g* ., et per trovare quanto è . *a* . *f* . aggiungendo il quadrato . *a* . *e* ., che è 81 et . *f* . *e* . che è 9, fa 90, che 'l suo creatore è R 90, hora si ha un triangolo che 'l lato . *a* . *h* . è 15 . *a* . *f* . R 90,

et . *f* . *h* . 9, che trovato quanto è la . *a* . *g* ., et . *g* . *h* . per le regole insegnate, . *a* . *g* . sarà $7\frac{4}{5}$, et . *g* . *h* . $7\frac{1}{5}$, et per



trovare la . *g* . *f* . si cavarà il quadrato di . *a* . *g* . di . *a* . *f* . resta $29\frac{4}{25}$, che 'l suo creatore è $5\frac{2}{5}$, et tanto è la . *g* . *f* . Et per trovare la perpendiculare . *d* . *i* . la quale cade sopra la linea . *k* . *a* . essendosi allungata la . *a* . *h* . fino in . *k* ., facciasi così: vedasi quanto è tutta la . *a* . *d* . aggiungendo il quadrato di . *a* . *c* ., che è 576 col quadrato . *c* . *d* ., che è 64 fa 640, che 'l suo creatore è R 640, che tanto è la . *d* . *a* ., che trattone . *a* . *f* . resta R 250, poi per la regola de la proportione si dirà, se R 90 di costa cioè la . *f* . *a* . mi dà di perpendiculare $5\frac{2}{5}$ cioè la . *f* . *g* ., che mi darà R 250, che è la . *f* . *d* .?, che darà $15\frac{11}{65}$, et tanto è la . *d* . *i* . per trovare poi quanto è la . *h* . *i* . si dirà pure se R 90 di costa mi dà $7\frac{4}{5}$ di base, che mi darà R 640 di costa, cioè tutta la . *a* . *d* .? che darà $20\frac{4}{5}$, et tanto è la . *i* . *a* ., che trattone . *a* . *h* . che

è 15, resta $5\frac{4}{5}$: et tanto è la . *i* . *h* .: Et così la figura è
C. 228. rivoltata, et si potrà formare la dimanda di nuovo; et dire. Egli è un triangolo . *a* . *h* . *b* ., che il lato . *a* . *h* . è 15, . *a* . *b* . 14, et . *a* . *h* . 13, et fuori di esso triangolo è signato al punto . *d* . che tirando la perpendiculare . *d* . *i* . cade lontano dall'angolo . *h* . $5\frac{4}{5}$, et la perpendiculare . *d* . *i* . è $15\frac{11}{15}$: dal detto punto . *d* . voglio tirare una linea la quale tagli il triangolo in due parti, et la parte, che sarà sopra la base . *h* . *a* . sia 24 cioè il restante da 60 fino a 84, che è tutta la superficie del triangolo; et nel resto si proceda come la dimanda passata.

§ [131]. *Sia dato il triangolo . a . k . f . fuori del quale sia signato il punto . i . dal qual punto . i . voglio tirare una linea retta, la quale tagli il triangolo in due parti, et che la parte, che resta sopra la base . a . f . sia pari al quadrato . O . Addimandasi dove taglierà tal linea la . k . f ..*

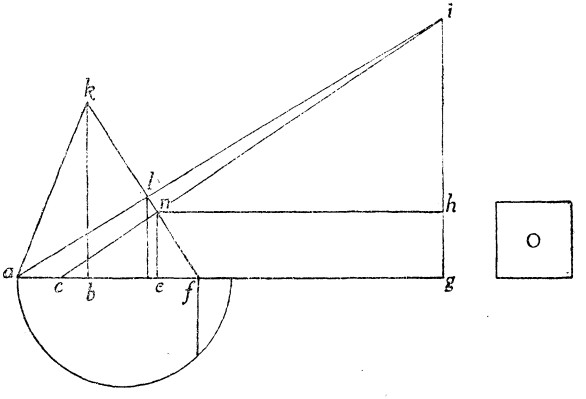
Prima bisogna tirare la retta . *a* . *i* . la qual taglia la . *k* . *f* . in punto . *l* . et divide il triangolo in due parti, et bisogna vedere se la parte . *a* . *f* . *l* . è maggiore o minore del quadrato . *O* ., et questo è maggiore come dimostra il semicirculo posto sotto la base . *a* . *f* ., et perchè è maggiore si procedarà in questo modo: allungasi la . *a* . *f* . fino in . *g* ., et tirasi la perpendiculare . *g* . *i* ., et da poi dal punto . *i* . si
C. 228 v. tiri la . *i* . *c* . come si voglia, che taglierà . *k* . *f* . in punto . *n* ., et dal punto . *n* . si tiri la perpendiculare . *n* . *e* ., et la . *n* . *h* . equidistante a la . e . *g* . (1).

---

(1) Posto $\overline{ne} = x$, si ha $\overline{ef} = \frac{\overline{bf}}{\overline{bk}}\, x$

$$\overline{ih} : \overline{eg} = \overline{ig} : \overline{cg}$$

Hora pongasi che la perpendiculare . *n* . *e* . sia la cosa, la . *e* . *f* . sarà parte di cosa perchè la proportione che è da



. *k* . *b* . a la . *b* . *f* . è come da . *n* . *e* . a la . *e* . *f* . et volendo trovare quanto è la . *c* . *f* . per potere quadrare il triangolo . *c* . *n* . *f* ., et vedere se egli è pari al quadrato . *O* . si dirà

$$cg = \frac{\overline{eg} \cdot \overline{ig}}{\overline{ih}} = \frac{(\overline{ef} + \overline{fg})\,\overline{ig}}{\overline{ih}} = \frac{\overline{ef} \cdot \overline{ig} + \overline{fg} \cdot \overline{ig}}{\overline{ih}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{bf}}{\overline{bk}} \cdot \overline{gi} \cdot x + \overline{fg} \cdot \overline{gi}}{\overline{ih}}$$

$$cf = \frac{\frac{\overline{bf}}{\overline{bk}} \cdot \overline{gi} \cdot x + \overline{fg} \cdot \overline{gi} - \overline{ih} \cdot \overline{fg}}{\overline{ih}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{bf}}{\overline{bk}} \cdot \overline{gi} \cdot x + \overline{fg} \cdot \overline{gh}}{\overline{ih}} = \frac{\left(\frac{\overline{bf}}{\overline{bk}} \cdot \overline{gi} + \overline{fg}\right) x}{\overline{gi} - x}$$

la condizione del problema è

$$\frac{1}{2}\,\overline{cf} \cdot x = O,$$

per la regola de la proportione, se la linea . *p* . *q* . meno la . *g* . *r* . perpendiculare ha di base la . *u* . *x* . più la . *x* . *y* . che haverà la . *Z* . Ψ . ?:

Et notisi, che la . *p* . *q* . è pari a la . *g* . *i* ., la . *g* . *r* . a la . *g* . *h* ., la . *u* . *x* . a la . *f* . *g* ., la . *x* . *y* . a la . *e* . *f* ., et la . *g* . Ψ . a la . *g* . *i* .; che, moltiplicata la . *g* . Ψ . via la . *u* . *x* . ne vengono i due parallelogrammi . *Z* . *B* . che sono cose, et . *B* . *C* ., che è noto: et questi due parallelogrammi sono esimi della linea . *p* . *q* . *r* ., et tanto è tutta la linea . *c* . *g* .; che volendone trare la . *f* . *g* . che è linea nota, bisogna moltiplicarla via la linea dell' esimo, che ne verrà la superficie . *p* . *s* . meno le cose . *s* . *r* ., che volendole cavare di . *C* . *B* ., et . *B* . *Z* . per essere due parallelogrammi pari . *p* . *s* . et . *C* . *B* . basterà solo a sommare . *r* . *s* ., et . *Z* . *B* . per essere un più et l' altro meno, che sommati, et ridutti tutti a larghezza di una cosa come è stato insegnato ne verrà la . *D* . *t* . sopra la quale ha da essere un parallelogrammo largo una cosa, et è esimo de la linea . *a* . *q* . *r* ., che moltiplicata detta . *D* . *t* . via di mezzo di . *n* . *e* . ne vengono li censi . *F* . *t* . esimi de la linea . *p* . *q* . *r* ., che sono eguali al quadrato . *O* ., che ridutto detto quadrato . *O* . in linea, facendo . *n* . *e* . la unità, come ha servito in tutta questa operatione, ne verrà la linea . *S* . *I* ., che per levare l' esimo si moltiplicarà via la linea . *p* . *q* . *r* . ne verrà il parallelogrammo . *K* . *S* . meno il parallelogrammo . *S* . *O* .. Et questo è eguale a li censi . *F* . *t* ., che ridutta la cosa a 1$\frac{2}{}$ partendo ogni cosa per la linea . *F* . *E* .

---

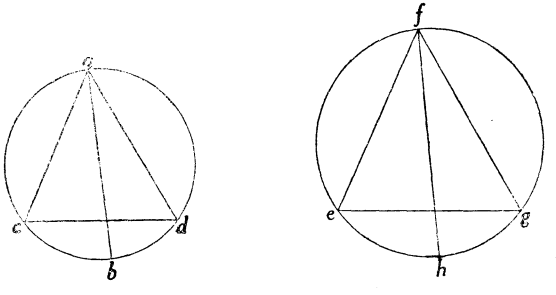
dunque si ha l' equazione

$$2.O\left(\overline{gi} - x\right) = \left(\frac{bf}{bk} \cdot \overline{gi} + \overline{fg}\right) x^2.$$

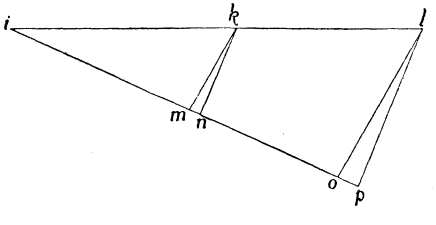
I calcoli che inducono a questa equazione e la risoluzione della equazione medesima sono indicati dal BOMBELLI, ed effettuati con una costruzione geometrica che, per la mancanza della figura, può essere variamente interpretata.

ne verrà il parallelogrammo . *K* . *M* . noto, meno le cose . *L* . *O* . eguali al censo . *J* . *X* ., che agguagliato la cosa valerà . *R* . *N* . meno . *N* . *Q* ., mezzo de le cose, cioè . *Q* . *R* ., et tanto ha da essere la . *n* . *e* ., che allungata sino in . *Z* . tanto che . *Z* . *e* . sia pari a . *Q* . *R* ., et poi tirata la . *Z* . *m* . taglierà la . *f* . *l* . in punto . *m* ., et dal punto . *i* . tirata la linea . *i* . *m* . *G* . il triangolo . *f* . *m* . *G* . sarà pari al quadrato . *O* ..

§ [132]. *Egli è il circulo . a . d . b . c . drento del quale voglio mettere un triangolo simile al triangolo . e . f . g ..* Prima si formerà il circulo intorno al triangolo . *e* . *f* . *g* . per *C. 229.*



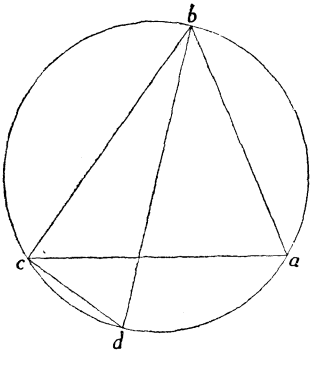
la dottrina de la quinta del quarto, il quale circulo sarà . *e* . *f* . *g* . *h* . nel quale si tira il diametro . *f* . *h* . poi si ag-



giungano insieme il diametro . *f* . *h* ., et il diametro . *a* . *b* . cioè . *i* . *k* . sia pari a . *f* . *h* ., et . *k* . *l* . sia pari al diametro . *a* . *b* ., poi si tira la . *i* . *p* . et segnasi . *i* . *n* . pari a la . *f* . *g* ., et tirasi la . *k* . *n* ., et . *l* . *p* . equidistante a la . *k* . *n* ., dico

la . *n* . *p* . essere un lato del triangolo, che va posto nel circulo . *a* . *c* . *d* . *b* . ; però tirasi la . *a* . *d* . pari a la . *n* . *p* . : et tirasi la . *i* . *m* . pari alla . *f* . *e* . , et dal punto . *k* . si tiri la . *k* . *m* . . et la . *l* . *o* . , che gli sia parallela; dico . *m* . *o* . essere l'altro lato del triangolo, che, tirata la . *a* . *c* . pari a la . *m* . *o* . nel circulo . *a* . *c* . *b* . *d* . , et dal punto . *c* . si tiri la . *c* . *d* . , così sarà formato il triangolo . *a* . *c* . *d* . simile al triangolo . *f* . *e* . *g* . ; Et tal proportione ha il diametro . *f* . *h* . al diametro . *a* . *b* . , come il lato . *f* . *g* . al lato . *a* . *d* . et così è la proportione di . *f* . *h* . ad . *a* . *b* . , come . *f* . *e* . ad . *a* . *c* . : Et così, essendo l'angolo . *g* . *f* . *e* . pari a l'angolo . *d* . *a* . *c* . per essere in portione di circulo simile; et essendo tal proportione dal lato . *f* . *g* . al lato . *a* . *d* . , come . *f* . *e* . a la . *a* . *c* . , così sarà . *e* . *g* . al . *c* . *d* . Et per essere cose manifeste non citarò le propositioni a una per una per non andare per l'infinito.

§ [133]. *Egli è il triangolo . a . b . c . , che 'l lato . a . b . è 13, . b . c . 15, et . a . c . 14 intorno al quale voglio descrivere un circulo, che tocchi ciascuno de gli angoli: addimando quanto sarà il diametro.*



A solvere simili dimande, ci sono più vie; ma solo ne mostrerò due parendomi a bastanza: Pongasi che 'l diametro . *b* . *d* . sia 1 ♀ per trovare quanto è la . *d* . *c* . si cavarà il quadrato . *b* . *c* . , che è 225, di . *b* . *d* . che è 1 ♀ , restarà 1 ♀ meno 225, che
C. 229 *v*. 'l suo creatore è $R\,|\,\underline{1\,♀ \text{ m. } 225}\,|$, et tanto è la . *d* . *c* . : et per trovare la . *a* . *d* . cavasi 169, quadrato di . *a* . *b* . , di 1 ♀ quadrato di . *d* . *b* . resta 1 ♀ meno 169, che 'l suo creatore è $R\,|\,\underline{1\,♀ \text{ m. } 169}\,|$, et tanto è la . *a* . *d* . ; che, moltiplicata via . *b* . *c* . , fa $R\,|\,\underline{225\,♀ \text{ m. } 38025}\,|$, et mol-

tiplicato . *d* . *c* . via . *a* . *b* . fa $R\,|\,\underline{169\,\underline{2}\text{ m. }38025}\,|$, che aggiunte insieme fanno

$$R\,|\,\underline{225\,\underline{2}\text{ m. }38025}\,|\ \text{più}\ R\,|\,\underline{169\,\underline{2}\text{ m. }38025}\,|,$$
$$\text{che sono eguali a } 14\,\underline{1}$$

produtto di . *b* . *d* . in . *a* . *c* ., che quadrata l'una et l'altra parte per levare le radici legate si haverà

$$394\,\underline{2}\text{ m. }76050$$
$$\text{p. } R\,|\,\underline{152100\,\underline{4}\text{ m. }59927400\,\underline{2}\text{ p. }5783602500}\,|$$
$$\text{eguali a } 196\,\underline{2},$$

che, levato li $394\,\underline{2}$ m. 76050 a ciascuna de le parti, si haverà

$$76050 \text{ meno } 198\,\underline{2} \text{ eguale a}$$
$$R\,|\,\underline{152100\,\underline{4}\text{ m. }59927400\,\underline{2}\text{ p. }5783602500}\,|,$$

che, quadrato ciascuna de le parti, si haverà

$$152100\,\underline{4}\text{ m. }59927400\,\underline{2}\text{ p. }5783602500 \text{ eguali a } 39204\,\underline{4}$$
$$\text{meno } 30115800\,\underline{2} \text{ più } 5783602500,$$

che, levato il numero da ogni banda et il meno, con le minori quantità, si haverà

$$112896\,\underline{4} \text{ eguali a } 29811600\,\underline{2}$$

che ridutto a $1\,\underline{4}$, si haverà

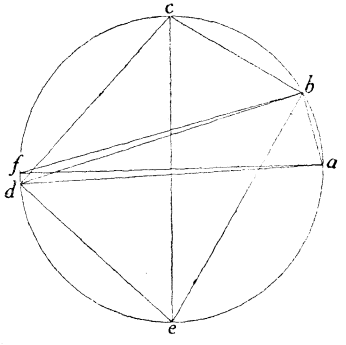
$$1\,\underline{4} \text{ eguale a } 264\,\underline{2}\,\frac{1}{16},$$

che agguagliato la cosa valerà $16\,\frac{1}{4}$, et tanto è il diametro . *b* . *d* .

§ [134]. *Egli è il circulo . a . b . c . d . dentro del quale è posto il quadrilatero . a . b . c . d ., che ciascuno de gl' angoli*

tocca la circunferentia, et la linea . a . d . è 16; . d . c . 12, . c . b . 8, . b . a . 4, addimandasi quanto è 'l diametro di detto circulo.

Pongasi, che sia $1\underline{1}$, et sia . c . e . : per trovare la . b . d ., uno de diametri del quadrilatero, quadrasi la . c . d . fa 144, che tratto del quadrato de la . c . e . resta $1\underline{2}$ meno 144, che 'l suo creatore è $R\,|\,1\underline{2}$ m. 144|, et tanto è la . d . e . perchè l'angolo . e . d . c . è retto, et per trovare la . b . e . cavasi il quadrato . b . c . del quadrato . c . e . resta $1\underline{2}$ meno 64, che 'l suo creatore è $R\,|\,1\underline{2}$ m. 64|, et tanto è la . b . e . per essere l'angolo . c . b . e . anch'egli retto.



Hora bisogna moltiplicare la . c . d . via la . b . e ., che sono le linee opposite del quadrilatero . b . c . d . e ., et così . b . c . via . d . e ., che faranno $R\,|\,144\,\underline{2}$ meno 9216| et $R\,|\,64\,\underline{2}$ m. 9216|, che aggiunte in sieme fanno $R\,|\,144\,\underline{2}$ m. 9216| più $R\,|\,64\,\underline{2}$ m. 9216|, et tanto ha da fare la . c . e . via la . b . d ., che sono li due diametri del quadrilatero . b . c . d . e ., et
C. 230 non essendo nota se non la . c . e . partendo le due Radici legate per . c . e ., che è $1\underline{1}$, ne verrà . b . d . cioè

$$\frac{R\,|\,144\,\underline{2}\text{ m. }9216\,|\text{ p. }R\,|\,64\,\underline{2}\text{ m. }9216\,|}{1\,\underline{1}}.$$

Da poi bisogna vedere, se si fusse pigliato la . b . a . et . a . d . tirando il diametro . a . f . quanto sarebbe pure detta . b . d ., trovando quanto è . b . f ., et . f . d . nel modo, che si è trovato . b . e ., et . e . d ., che, essendo . a . f . $1\underline{1}$, et trattone il quadrato . a . b ., resta $1\underline{2}$ meno 16, che 'l suo creatore

è $R\,|\,\underline{1\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }16}\,|$, et tanto è $.b.f.$; et la $.d.f.$ sarà $R\,|\,\underline{1\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }256}\,|$ cioè il resto del quadrato di $.a.f.$ trattone il quadrato $.a.d.$ perchè l'angolo $.a.d.f.$ è retto et così $.a.b.f.$: Poi moltiplicasi $.d.f.$ via $.a.b.$, et $.a.d.$ via $.b.f.$, che faranno $R\,|\,\underline{256\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|$ più $R\,|\,\underline{16\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|$, et tanto ha da fare la $.a.f.$ via la $.b.d.$, che essendo nota $.a.f.$, che è $1\,\overset{1}{\smile}$ si partirà dette Radici legate per $1\,\overset{1}{\smile}$ che ne verrà $\dfrac{R\,|\,\underline{256\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|\text{ più }R\,|\,\underline{16\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|}{1\,\overset{1}{\smile}}$, et tanto è la $.b.d.$. Et di sopra per l'altra strada si trovò essere $\dfrac{R\,|\,\underline{144\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }9216}\,|\text{ più }R\,|\,\underline{64\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }9216}\,|}{1\,\overset{1}{\smile}}$, et l'una quantità sarà eguale a l'altra, che levato il rotto per essere in ciascuna de le parti a un modo, si haverà

$$R\,|\,\underline{256\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|\text{ più }R\,|\,\underline{16\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }4096}\,|$$
$$\text{eguali a }R\,|\,\underline{144\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }9216}\,|\text{ più }R\,|\,\underline{64\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }9216}\,|$$

che, quadrata l'una et l'altra parte per poter levare le Radici, si haverà

$$272\,\overset{2}{\smile}\text{ meno }8192\text{ più }R\,|\,\underline{16384\,\overset{4}{\smile}\text{ m. }4456448\,\overset{2}{\smile}\text{ p. }67108864}\,|$$
$$\text{eguali a }208\,\overset{2}{\smile}\text{ m. }18432$$
$$\text{più }R\,|\,\underline{36864\,\overset{4}{\smile}\text{ m. }7667712\,\overset{2}{\smile}\text{ p. }339738624}\,|,$$

che, levato $208\,\overset{2}{\smile}$ meno 18432 a ciascuna de le parti, si haverà

$$64\,\overset{2}{\smile}\text{ più }10240\text{ più }R\,|\,\underline{16384\,\overset{4}{\smile}\text{ m. }4456448\,\overset{2}{\smile}\text{ più }67108864}\,|$$
$$\text{eguali a }R\,|\,\underline{36864\,\overset{4}{\smile}\text{ meno }7667712\,\overset{2}{\smile}\text{ p. }339738624}\,|:$$

Et per abbreviare la fatica si partirà l'una et l'altra parte per 64, et si haverà

$$1\,\overset{2}{\smile}\text{ più }160\text{ più }R\,|\,\underline{4\,\overset{4}{\smile}\text{ m. }1088\,\overset{2}{\smile}\text{ p. }16384}\,|$$
$$\text{eguali a }R\,|\,\underline{9\,\overset{4}{\smile}\text{ m. }1872\,\overset{2}{\smile}\text{ p. }82944}\,|$$

et per potere fare lo agguagliamento levasi

$$R\,|\,\underline{4\,{}^{4}\!\text{m. } 1088\,{}^{2}\!\text{ p. } 16384}\,|$$

a ciascuna de le parti; et si haverà

$$1\,{}^{2}\!\text{ più } 160 \text{ eguale a } R\,|\,\underline{9\,{}^{4}\!\text{ m. } 1872\,{}^{2}\!\text{ più } 82944}\,|$$
$$\text{meno } R\,|\,\underline{4\,{}^{4}\!\text{ m. } 1088\,{}^{2}\!\text{ p. } 16384}\,|$$

che quadrata l'una et l'altra parte, si haverà

$1\,{}^{4}$ più $320\,{}^{2}$ p. $25600\,{}^{0}$ eguale a $13\,{}^{4}$ m. $2960\,{}^{2}$ p. 99328 p. due volte questa

$$R\,|\,\underline{36\,{}^{8}\text{m. } 17280\,{}^{6}\text{p. } 2515968\,{}^{4}\text{m. } 120913920\,{}^{2}\text{p. } 1358954496}\,|$$

che levato a ciascuna de le parti $1\,{}^{4}$ p. $320\,{}^{2}$ p. 25600, et il meno de la Radice si haverà

$12\,{}^{4}$ meno $3280\,{}^{2}$ più 73728 eguali a due volte
$$R\,|\,\underline{36\,{}^{8}\text{m. } 17280\,{}^{6}\text{p. } 2515968\,{}^{4}\text{m. } 120913920\,{}^{2}\text{p. } 1358954496}\,|$$

che divisa ciascuna de le parti per 2, si haverà

$$6\,{}^{4} \text{ meno } 1640\,{}^{2} \text{ più } 36864$$

eguale a la radice sopradetta ma una volta sola; che quadrata
C. 230 v. l'una et l'altra parte si haverà

$36\,{}^{8}$ m. $19680\,{}^{6}$ p. $3131968\,{}^{4}$ m. $120913920\,{}^{2}$ p. 1358954496
eguale a $36\,{}^{8}$ m. $17280\,{}^{6}$ p. $25155968\,{}^{4}$ meno $120913920\,{}^{2}$
più 1358954496,

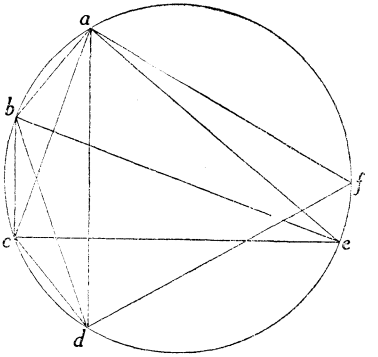
che, levate le minori quantità et il meno, si haverà

$$2400\,{}^{6} \text{ eguale a } 6160\,{}^{4},$$

che, agguagliato, la cosa valerà $R\ 256\ \frac{2}{3}$, che tanto è il diametro addimandato.

§ [135]. *Egli è il circulo . a . b . c . d . e . f ., che 'l diametro . b . e ., è R 192, dentro del quale vorrei fare un nove faccie di lati eguali; addimandasi quanto sarà uno de detti lati* (1).

Questa dimanda sino ad hora la tengo impossibile, fino a tanto che non sia retrovato il modo generale di agguagliare il capitolo di cubo et numero eguale a cose, et dato che detto Capitolo ancor si ritrovi, dificil cosa sarà che in detto agguagliamento non intravenga qualche Radice Cuba, che darebbe inditio, che potendosi formare detto nove faccie, non si potrebbe fare se non per via instrumentale, benchè da Horontio, et Alberto Duro siano state date regole da fare detto nove faccie, le quali sono falsissime: et per essere cose chiare non mi affaticarò in volerle dimostrare; ma verrò a la operatione de la presente dimanda. Facciasi nel detto circulo il triangolo equilatero . a . d . f ., che per le regole date sarà *12* per faccia; et sopra la faccia . a . d . si presuporà di havere divisa la portione . a . b . c . d . in tre parti pari, et che



(1) Questo passo dove il BOMBELLI mette in relazione la risoluzione della equazione cubica nel caso irriducibile, col problema della trisezione dell'angolo è stato pubblicato per la prima volta nella Nota: ETTORE BORTOLOTTI, *La trisezione dell' angolo ed il caso irriducibile dell' equazione cubica nell' Al-*

siano tirate le tre rette . *a* . *b* ., . *b* . *c* ., et . *c* . *d* ., le quali saranno pure eguali, et se così fussero ciascuna di loro sarebbe la faccia addimandata: però pongasi, che ciascuna de le tre rette sia $2 \underline{1}$, per sapere quanto è . *b* . *d* ., et . *a* . *c* ., che ciascuna è eguale, si moltiplicherà . *b* . *c* . in . *a* . *d* ., che fa $24 \underline{1}$, et . *a* . *b* . in . *c* . *d* ., che fa $4 \underline{2}$, che aggiunte insieme fanno $4 \underline{2}$ più $24 \underline{1}$, et tanto ha da fare . *a* . *c* . in . *b* . *d* . per essere li due diametri del quadrilatero . *a* . *b* . *e* . *d* . Et perchè sono pari basta pigliare il creatore di $4 \underline{2}$ più $24 \underline{1}$, che sarà $R \lfloor 4 \underline{2} \text{ p. } 24 \underline{1} \rfloor$, et tanto è . *a* . *c* . overo . *b* . *d* ..

Et per potere fare lo agguagliamento si cercarà la . *a* . *c* . per questo altro modo. Tirasi il diametro . *b* . *e* ., et cavasi
C. 231 il quadrato . *a* . *b* . di . *b* . *e* ., resta 192 m. $4 \underline{2}$, che 'l suo creatore è R [192 m. $4 \underline{2}$], et tanto è la . *a* . *e* ., overo la . *c* . *e* ., per essere l'una et l'altra pari et l'angolo . *e* . *a* . *b* . et . *b* . *c* . *e* . retti; et tanto ha da fare il lato . *b* . *c* . in . *a* . *e* ., et . *a* . *b* . in . *c* . *e* ., quanto . *b* . *e* . in . *a* . *c* ., che sono li due diametri del quadrilatero . *a* . *b* . *c* . *e* ., che moltiplicati . *a* . *b* . in . *c* . *e* ., et . *b* . *c* . in . *a* . *e* ., et li produtti aggiunti insieme fanno R [3072 $\underline{2}$ m. 64 $\underline{4}$], che partito per . *b* . *e* . ne viene

$$R\left[16 \underline{2} \text{ m. } \frac{1}{3} \underline{4}\right], \text{ et questo è eguale a } R\left[4 \underline{2} \text{ p. } 24 \underline{1}\right],$$

che quadrata l'una, et l'altra parte si haverà

$$4 \underline{2} \text{ più } 24 \underline{1} \text{ eguale a } 16 \underline{2} \text{ meno } \frac{1}{3} \underline{4}$$

---

gebra di RAFAEL BOMBELLI: nei *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna,* nel 1923.

Fu comunicato a detta Accademia nella seduta del 29 aprile 1923, ed al Congresso della Società sul progresso delle Scienze in Catania nell' aprile di quello stesso anno.

A questo proposito è da notare che nel testo a stampa, il BOMBELLI avverte (*L'Algebra*, pag. 321) che, nel caso irriducibile della equazione cubica, *la sua agguagliatione gli serve in dividere l' angolo in tre parti pari* (come a suo tempo si dirà).

che ridotto a 1 ⌣4 et levato il meno et la minore quantità de censi, si haverà

1 ⌣4 più 72 ⌣1 eguale a 36 ⌣2,

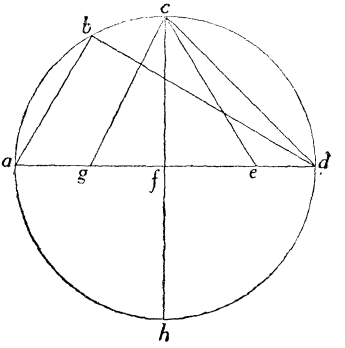
che, partita ciascuna de le parti per 1 ⌣1, si haverà

1 ⌣3 più 22 eguale a 36 ⌣1,

che sino ad hora non ci è regola di agguagliarlo per non essere proportione fra di loro, come fu detto nel principio.

§ [136]. *Egli è il circulo . a . b . c . d . h ., che 'l diametro . a . d . è 12, addimando la linea del triangolo equilatero del quadrato del pentagono et de lo exagono, che saranno circundati da la circunferentia del detto circulo.*

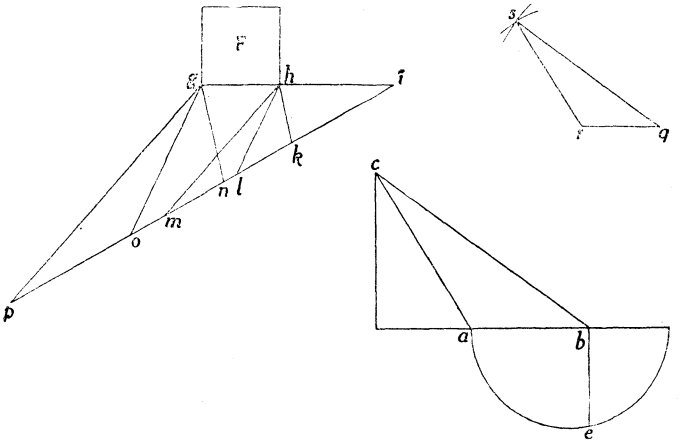
Tirasi la . a . b . la quale sia pari a la . a . f . mezzo del diametro, che è 6, et questo sarà il lato dello exagono equilatero, poi cavasi il quadrato . a . b . del quadrato . a . d ., resta 108, che 'l suo creatore è *R* 108, et tanto è la . b . d . per essere l'angolo . a . b . d . retto, et questa sarà la faccia del triangolo equilatero maggiore che potrà capire in detto circulo. Poi tirasi il diametro . c . h . tagliando il diametro . a . d . ad angolo retto et aggiungendo il quadrato . f . d . col quadrato . f . c ., che presone il creatore, fa *R* 72, et tanto è la linea . c . d ., et è la faccia del maggior quadrato, che capisca in detto circulo. Poi dividasi . a . f . in due parti pari in punto . g ., che sarà 3, che aggiunto il suo quadrato col quadrato . f . c . fanno 45, che 'l suo creatore è *R* 45; et tanto è . g . c ., che, fatto la . g . e . pari a la . g . c ., la . f . e . sarà *R* 45 meno 3, che 'l suo quadrato aggiunto col quadrato . f . c . fanno 90 m. *R*. 1620,



che 'l suo creatore è R $\underline{|90 \text{ m. } R\, 1620|}$, et tanto è la faccia del pentagono, et la .*f*.*e*. è la faccia del decagono mag-
C. 231 v. giore, che capisca in detto circulo, et la medesima figura viene a servire in Geometria, et in arithmetica, come si è veduto di sopra.

§ [137]. *Dato il quadrato .F. del quale se ne habbia da fare un triangolo simile al triangolo .a.b.c. addimandasi li suoi lati.*

Prima vedasi quanto sarebbe la faccia del quadrato, che fussi pari a la superficie del triangolo .*a*.*b*.*c*., che, come a suo luogo

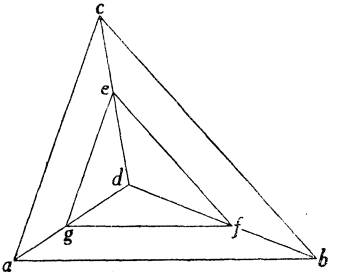


s'è dimostrato, sarà .*b*.*e*., che è aggiunta in lungo con la linea .*g*.*h*., facendo .*h*.*i*. pari a la .*b*.*e*.: Poi tirasi la .*i*.*p*., come si voglia: purchè faccia angolo con la linea .*h*.*i*. nella quale si segnano 3 linee pari a li lati del triangolo .*a*.*b*.*c*. cioè, che .*k*.*i*. sia pari a la .*a*.*b*., et .*i*.*l*. a la .*a*.*c*., et .*i*.*m*. a la .*b*.*c*.: Poi tirasi dal punto .*h*. le tre rette .*h*.*k*., .*h*.*l*., .*h*.*m*., et dal punto .*g*. se ne tirano tre equidistanti cioè la .*g*.*n*. ad .*h*.*k*., .*g*.*o*. ad .*h*.*l*., et .*g*.*p*. ad .*h*.*m*., dico che .*n*.*k*., .*l*.*o*., .*m*.*p*. essere li tre lati

del triangolo addimandato, che, fatto . *r* . *q* . pari ad . *n* . *k* ., . *r* . *s* . pari a la . *l* . *o* ., . *q* . *s* . pari a la . *m* . *p* ., che 'l triangolo . *s* . *r* . *q* . è il triangolo addimandato.

§ [138]. *Egli è il triangolo . b . a . c . drento del quale ne vorrei fare un minore ma che li fusse in proportione.*

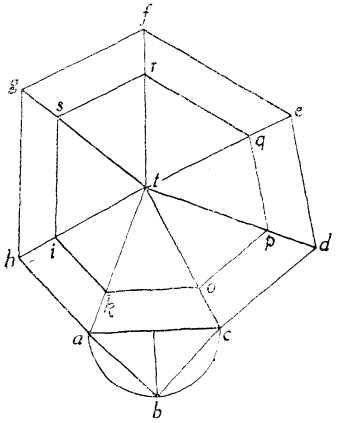
Per fare questo segnasi un punto dove si voglia drento del triangolo, et sia il punto . *d* ., et da detto punto . *d* . tiransi le tre rette . *d* . *a* ., . *d* . *b* ., et . *d* . *c* ., et dal punto . *f* . il quale sia signato sopra la linea . *b* . *d* ., perchè la dimanda non dice quanto lo voglia minore non importa dove sia signato; et dal punto . *f* . tirasi la . *f* . *e* ., et la . *f* . *g* ., una parallela a la . *b* . *c* ., et l'altra a la . *b* . *a* ., che taglieranno la . *a* . *d* ., et la . *d* . *c* . in punto . *g* . et . *e* ., et dal punto . *g* . al punto . *e* . tirasi la retta . *g* . *e* .. Dico il triangolo . *f* . *g* . *e* . essere simile al triangolo . *b* . *a* . *c* .: Perchè l'angolo . *f* . è pari a l'angolo . *b* ., et l'angolo . *e* . è pari a l'angolo . *c* ., et l'angolo . *g* . è pari a l'angolo . *a* ..



§ [139]. *Egli è la figura . a . c . d . e . f . g . h . dentro de la quale ne voglio formare una minore, che sia la metà di superficie de la maggiore, addimandasi il modo.* C 232.

Questa dimanda, è utilissima per sminuire una pianta, o aggrandirla, come proverà chi se ne saprà valere, et si fa in questo modo. Segnasi un punto dentro da la figura dove si voglia, ma quando è più nel mezzo sta meglio: Et sia il punto . *t* . dal quale si tira una retta a ciascuno de gl'angoli, come si vede le sette linee . *t* . *a* ., . *t* . *c* ., . *t* . *d* ., . *t* . *e* ., . *t* . *f* ., . *t* . *g* ., et . *t* . *h* ., et così sono formati sette triangoli . *a* . *t* . *c* .,

. c . t . d., . d . t . e.; . e . t . f., . f . t . g., . g . t . h., et . h . t . a.. Et perchè la dimanda dice, che ha da essere doppia la maggiore figura de la minore: però bisogna trovare una linea, che sia in potentia la metà di una de le faccie de la figura, et sia la . a . c . e per fare questo sopra essa se gli faccia il semicirculo . a . b . c . la circunferenza del quale si divida in due parti pari in punto . b . et dal punto . b . si tiri la . b . c . et la . b . a ., che ciascuna di loro sarà in potentia il mezzo della linea . a . c ., et sopra la . a . c . si tiri dal centro . t . la . t . l ., come si voglia, et dal punto . l . si tiri la . l . m . equidistante a la . a . b . la quale taglierà la . a . c . in punto . m ., et si faccia la . l . u . pari a la . b . m ., et sopra il punto . u . si tiri la perpendiculare . u . x . la quale taglierà la . a . t . in punto . k . (1), et dal punto . k . si tiri una retta equidistante a la . a . c ., la quale taglierà . t . c . in punto . o ., et dal punto . o . si tiri una retta equidistante a la . c . d . la quale taglierà . t . d . in punto . p .; et dal punto . p . si tirerà una equidistante, che taglierà . t . e . in punto . q ., et dal punto . q . tirasi la equidistante a la . e . f ., che taglierà . f . t . in punto . r . et dal punto . r . tirasi la equidistante a la . f . g . che taglierà . g . t . in punto . s ., et dal punto . s . si tirerà la equidistante

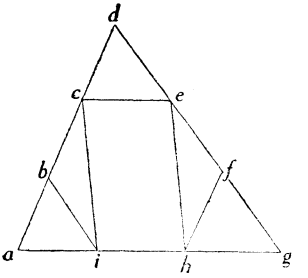


(1) La costruzione, che serve a dividere il segmento $\overline{ta}$ in due parti proporzionali ai segmenti $\overline{ac}$, $\overline{ab}$, non è abbastanza chiara nel testo; e, poichè questa (come del resto quasi tutte le figure del Libro V) non è disegnata nel manoscritto, si è completata la figura con la costruzione nota e consueta, di questo problema.

a la . *g* . *h* ., che taglierà . *h* . *t* . in punto . *i* ., et dal punto . *i* . tirasi la equidistante a la . *h* . *a* ., la quale si congiungerà con . *k* . *o* . in punto . *k* .; Et essendo tutte le linee di dentro parallele con quelle di fuora, così saranno eguali gl' angoli, come il . *c* . al . *o* ., il . *d* . al . *p* ., et così tutti gli altri cinque. *C. 232 v.* Et tal proportione ha la linea . *a* . *c* . a la . *k* . *o* . in potentia, come la superficie maggiore a la superficie minore; Et come s'è mostrato, la linea . *a* . *c* . in potentia è dupla a la . *k* . *o* . per essere . *k* . *o* . pari a la . *b* . *c* .; et la superficie . *k* . *o* . *p* . *q* . *r* . *s* . *i* . è la superficie addimandata.

§ [140]. *Egli è il triangolo . a . d . g ., che 'l lato . a . g . è 14, . a . d . 13, et . d . g . 15 dentro del quale è posto l' exagono equilatero, et il lato . c . e . è equidistante a la . i . h . addimandasi, quanto è il lato . c . e .:*

Pongasi . *c* . *e* . essere 14 ⊥ per fuggire li rotti: . *d* . *e* . sarà 15 ⊥, et . *c* . *d* . 13 ⊥: perchè tale proportione è da la *a* . *g* . a la . *c* . *e* . com'è da la . *a* . *d* . a la . *c* . *d* ., et così da . *g* . *d* . a . *e* . *d* . perchè . *a* . *g* . è equidistante a la . *c* . *e* . et . *e* . *f* . sarà 14 ⊥ perchè è pari a la . *c* . *e* .: Et per trovare, quanto è la . *f* . *g* . si sa . *f* . *h* . essere 14 ⊥, et tal proportione ha il lato . *f* . *h* . al lato . *a* . *d* ., come il lato . *g* . *h* . al lato . *a* . *g* . perchè la . *f* . *h* . è equidistante a la . *a* . *d* .; et si prova in questo modo, siano tirate . *c* . *i* ., et . *e* . *h* . le quali saranno pari per essere . *f* . *h* . pari a la . *b* . *i*, et . *e* . *f* . a la . *b* . *c* ., et così . *b* . *i* . a la . *f* . *e* ., et . *b* . *c* . a la . *h* . *f* . Et essendo pari . *i* . *c* ., et . *h* . *e* . ancora saranno parallele per essere . *i* . *h* ., et . *c* . *e* . parallele: Et così l'angolo . *i* . *c* . *e* . sarà pari a l'angolo . *i* . *h* . *e* ., et l'angolo . *e* . *h* . *f* . sarà pari a l'angolo . *b* . *c* . *i* . [per essere eguali i due triangoli



. *b* . *c* . *i* ., . *e* . *h* . *f* .], et l'angolo . *b* . *c* . *e* . sarà pari a l'angolo . *i* . *h* . *f* ., et essendo pari, la . *h* . *f* . sarà parallela a la . *b* . *c* ..

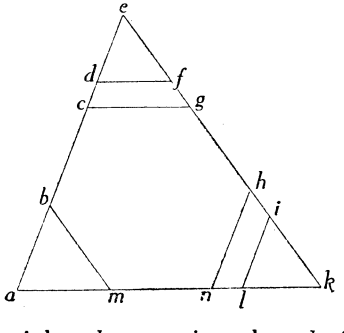
Hora per trovare detta . *f* . *g* . si dirà per la regola de la proportione se 13, che è . *a* . *d* . mi da 15 di lato, cioè . *d* . *g* ., che mi darà 14 ⊥, che è . *f* . *h* .; che darà $16\frac{2}{13}$ ⊥, et tanto è la . *f* . *g* ., che aggiunta con . *e* . *f* ., che è 14 ⊥, et . *d* . *e* ., 15 ⊥ fanno

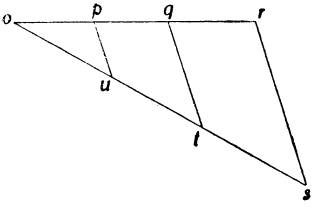
$$45\frac{2}{13} \perp \text{, et sono eguali a } 15$$

cioè al lato . *d* . *g* ., che agguagliato la cosa valerà $\frac{195}{587}$, et perchè la positione fu 14 ⊥ si moltiplicarà per 14 la valuta de la cosa, et ne viene $4\frac{382}{587}$, et tanto è la linea . *c* . *e* ..

§ [141]. *Egli è il triangolo . a . e . k . dentro del quale si ha da fare uno exagono equilatero, si addimanda il modo*:

Tirasi a beneplacito una linea, che tagli una punta del triangolo, che sia parallela a la . *a* . *k* . et sia la . *d* . *f* . poi

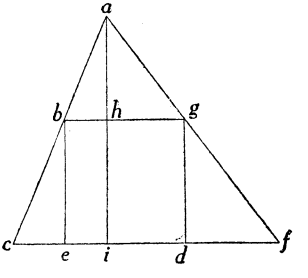




tirasi la . *l* . *i* . pari a la . *d* . *f* ., che sia equidistante a la
C. 233. . *a* . *e* ., et si aggiungano in lungo queste tre linee . *e* . *f* ., . *d* . *f* ., et . *i* . *k* ., che sia . *o* . *p* . pari a la . *e* . *f* ., et . *p* . *q* . a la . *d* . *f* ., et la . *q* . *r* . a la . *i* . *k* .; et dal punto . *o* . si

tiri la . *o* . *s* . pari a la . *e* . *k* ., la quale si divida proportionalmente secondo la . *o* . *p* ., et la . *p* . *q* ., et . *q* . *r* . tirando la . *s* . *r* ., . *q* . *t* ., et . *p* . *u* . fra di loro parallele, dico la . *t* . *u* . essere il lato de lo exagono, che tirata la . *c* . *g* . parallela a la . *a* . *k* ., che sia pari a la . *u* . *t* ., et medesimamente . *n* . *h* . pari a la . *u* . *t* ., et . *b* . *m* . pari a la . *u* . *t* . parallela a la . *e* . *k* .; et la figura . *c* . *g* . *h* . *n* . *m* . *b* . essere l'exagono addimandato: et parendomi che ne la dimanda passata sia stato detto a sufficientia de la prova, non dirò altro.

§ [142]. *Egli è il triangolo . a . c . f . che 'l lato . a . c . è 13, . c . f . 14, et . f . a . 15, dentro del quale è il quadrato . b . g . e . d . addimandasi, quanto è la faccia del detto quadrato.*

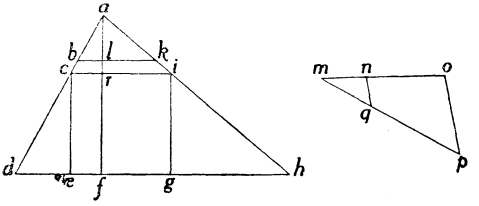


Pongasi la . *b* . *g* . essere 14 ⅟ il lato . *a* . *g* . sarà 15 ⅟, et . *a* . *b* . 13 ⅟ perchè tale proportione, è de la . *c* . *f* . a la . *b* . *g* ., come da la . *c* . *a* . a la . *b* . *a* ., et così da la . *f* . *a* . a la . *g* . *a* ., che trovata la perpendiculare . *a* . *h* . sarà 12 ⅟, che aggiuntole la . *h* . *i* ., che è 14 ⅟ per essere pari la . *h* . *i* . a la . *b* . *e* ., et la . *b* . *e* . a la . *b* . *g* ., che tutte insieme fanno 26 ⅟, che sono eguali a 12, che tanto è la perpendiculare . *a* . *i* ., che agguagliato la cosa vale $\frac{6}{13}$: et perchè fu posto 14 ⅟, le 14 valeranno 6 $\frac{6}{13}$, et tanto è la faccia del quadrato . *b* . *g* ..

§ [143]. *Egli è il triangolo . d . a . h . dentro del quale voglio fare un quadrato, addimandasi il modo.*

Tirasi la . *b* . *k* ., come si voglia, purchè sia dentro del triangolo . *d* . *a* . *h* ., et sia parallela a la . *d* . *h* ., et che toc-

chi ne le estremità la . *d* . *a* ., et . *a* . *h* .. Da poi si tiri la perpendiculare . *a* . *f* . la quale taglierà . *b* . *k* . in punto . *l* . poi si tiri la . *m* . *n* . pari a la . *a* . *l* ., et la . *n* . *o* . pari a la . *b* . *k* . et dal punto . *m* . si tiri la . *m* . *p* . pari a la . *a* . *f* ., et si divida

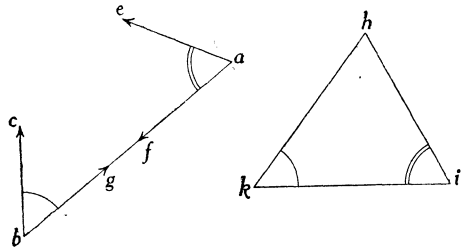


C. 233 v. detta . *m* . *p* . secondo la proportione, che è da . *m* . *n* . a la . *n* . *o* ., che sarà . *m* . *q* . et . *q* . *p* ., et dal punto . *a* . si segni . *a* . *r* . pari a la . *m* . *q* . et dal punto . *r* . si tiri la . *c* . *r* . *i* . la quale sia parallela a la . *d* . *h* ., et . *c* . *i* . sarà la faccia del quadrato addimandato, che tirata la perpendiculare . *i* . *g* . et la . *c* . *e* . sarà fatto il quadrato . *e* . *c* . *i* . *g* .; et tal proportione ha . *f* . *r* . a la . *r* . *a* . come a la . *b* . *k* . per essere . *r* . *f* . pari a la . *c* . *i* ..

§ [144]. Essendo stati da infiniti date *regole da misurare distantie*; et essendosi ciascuno assotigliato in mostrare sopra di ciò invention, nuove ma sempre con istrumenti di legno, o di metallo, con variare detti istrumenti per ridurre la cosa più facile; non solo ne le misure del piano ma dell'altezze, et profondità. Et havendo considerato per infiniti rispetti con quanta difficoltà assai volte si possano havere detti instrumenti; et quanto sia nell'arte della guerra necessario sapere pigliare tal misure non havendo comodità di simili instrumenti per misurare larghezze de' fiumi, altezza di muraglie, distantie dove si habbia da fare battere, pigliare piante de paesi, et infinite altre cose necessarie, ho pensato dimostrare un modo che solo con carta, riga, et compasso si possa misurare quale si voglia distanza, altezza, profondità; che è questo: Dato, che io sia

nel punto . *b* . et voglia misurare la distantia . *d* ., et tra . *b* . et . *d* . non si possa andare, bisogna trovare un altro luogo dove si possa andare, et presuposto, che sia il punto . *a* . pongo il mio foglio sopra una tavoletta di legno, et fo mettere C. 234.

d.

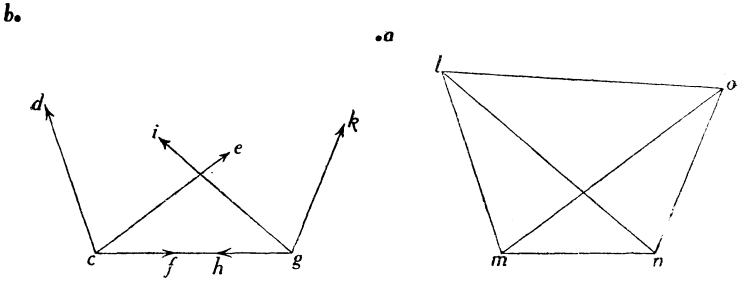


un segno nel punto . *a* ., et segno un punto sopra la carta nel punto . *b* .: et dal punto . *b* . tiro la . *b* . *c* ., et la . *b* . *c* . è posta a diritura della distantia . *d* . et la . *b* . *g* . a la distantia . *a* .. Poi mi levo dal punto . *b* . lasciandoci piantato il segno . *l* . poi passo dal punto . *a* ., et sopra un altro foglio tiro la . *f* . *a* . che da nel punto . *b* . et la . *a* . *e* . che da nel punto . *d* ., et poi misuro dal . *b* . a la . *a* ., che in questa figura pongo, che sia canne 10: poi sopra un altro foglio formo un triangolo che sia . *k* . *h* . *i* . facendo l'angolo . *h* . *k* . *i* . pari a l'angolo . *c* . *b* . *g* ., et l'angolo . *h* . *i* . *k* . pari a l'angolo . *f* . *a* . *e* ., et divido con detta misura . *h* . *k* ., che in questa figura ne viene 8: et tanto è dal . *b* . al . *d* .: Et volendo ancor sapere quanto è dal . *a* . al . *d* . misurasi con detta misura . *i* . *h* ., che ne viene $7\frac{1}{2}$ et tanto è da . *a* . al . *d* .. Et questo si prova, che 'l triangolo . *b* . *a* . *d* . havendo l'angolo . *a* . pari a l'angolo . *i* ., et l'angolo . *b* . a l'angolo . *k* . del triangolo . *h* . *k* . *i* ., che sono proportionati insieme, et tale proportione ha la base . *b* . *a* . a la base . *k* . *i* . come il lato . *b* . *d* . al lato . *h* . *k* ., et il lato . *a* . *d* . al lato . *h* . *i* .. Et

chi si saprà servire bene di tal modo potrà misurare, tutte le cose che ho detto. Et per chiarezza ne ponerò altri essempi.

§ [145]. *Io mi trovo nel punto . c . et voglio misurare quanto è dal . c . al punto . b .; et dal . c . all' . a ., et dall' . a . al . b ..*

Metto la mia carta come è stato detto nel punto . c ., et mi elleggo il punto . g . per il secondo termine dove io possa



andare, et misurare, quanto è dal . g . al . c . poi nella detta carta segno il punto . c . et tiro la . c . d ., la quale va al punto . b ., et, per non pigliare una linea per l' altra, il punto . b . chiamerò *arboro di qua*: (però chiamo la . c . arbore di qua): poi tiro la . c . e . al termine . a ., et la *chiamo arboro di la*: poi tiro la . c . f ., che va al termine . g ., et la chiamo il *termine*: poi me ne vado al punto . g . havendo lasciato al punto . c . un segnale, et segnato nel foglio il punto . g . tiro la . g . h . al termine . c ., et li scrivo pure il termine poi tiro la . g . i . la quale va al . b ., et li dico *arboro* di qua, et tiro la . g . k . la quale va al termine . a ., et la chiamo l' *arboro di la*: poi misuro la distantia dal . c . al . g ., et vi sono canne 15: poi sopra un altro foglio tiro la . m . n . et
C. 234 v. la . n . o ., et la . n . l . ponendo nome a la . m . n . il termine, et la . n . l . a l' arboro di qua, et la . n . o . a l' arboro di la, facendo che l' angolo . m . n . l . sia pari a l' angolo . h . g . i .,

et che l'angolo . *m* . *n* . *o* . sia pari a l'angolo . *h* . *g* . *k* . poi dal punto . *m* . tiro la . *m* . *o* . in tal modo che l'angolo . *n* . *m* . *o* . sia pari a l'angolo . *f* . *c* . *e* . ; et havendo nome la linea . *c* . *e* . a l'arboro di la, così si nominerà . *m* . *o* . arboro di la. Poi si tiri la . *m* . *l* . in tal modo, che l'angolo . *n* . *m* . *l* . sia pari a l'angolo . *f* . *c* . *d* . : Et si come la . *c* . *d* . ha nome arboro di qua, così . *l* . *m* . si chiamerà arboro di qua. Hora vedasi dove si tagliano le due arbore di qua, che si tagliano in punto . *l* . , ed il punto . *l* . viene ad essere l'arboro di qua cioè il termine . *b* . , et così le due, che dicano arbori di la si tagliano in punto . *o* . , et il punto . *o* . sarà il termine . *a* . ; Et perchè sono dal punto . *g* . al punto . *c* . canne 15, si dividerà la . *n* . *m* . in 15 parti col compasso, et con la medesima misura del compasso si misurerà la . *m* . *l* . , et la . *l* . *o* . , che l'una sarà $13\frac{1}{2}$ l'altra $8\frac{1}{2}$ et a' rotti bisogna havere consideratione a occhio, et così come dal punto . *m* . al punto . *l* . sono misure $13\frac{1}{2}$ così dal termine . *b* . al termine . *c* . sono canne $13\frac{1}{2}$ et dal punto . *l* . al punto . *o* . sono misure $8\frac{1}{2}$ così dal punto . *b* . al punto . *a* . sono canne $8\frac{1}{2}$.

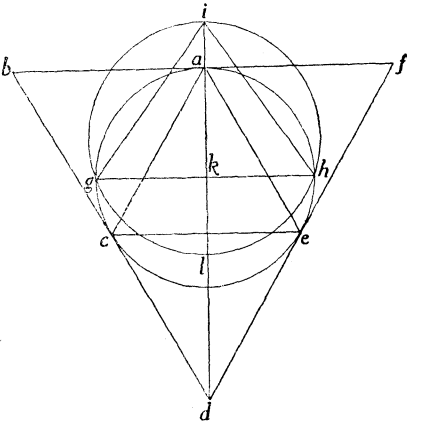
§ [146]. *Egli è la distanza . a . c . a . , et mi trovo nel punto . c . , et dal punto . a . , et solo detto punto . a . posso vedere dal punto . c . , et punto . b . ma dal punto*

Il manoscritto qui offre una evidente lacuna: furono strappate pagine in numero indeterminato.

[Cap. II.]

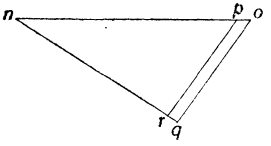
[POLIEDRI REGOLARI E SEMIREGOLARI]

§ [147]. *La* **piramide** *è un corpo, che ha quattro superficie, di Triangoli equilateri, et ha quattro angoli solidi, che ciascuno è contenuto da tre angoli de triangoli equilateri,* et la sua superficie è un triangolo equilatero, che ciascuno suo lato è il doppio de l'uno de lati de quattro triangoli, che compongono la piramide; et *la mia intentione è di mostrare il modo a trovare il diametro della sfera, che circonda ciascuno de corpi, essendo noto uno de lati tanto in numero, quanto in linea, et le lor superficie, et corpo in numero come è stato detto.* C. 235.



Però: dato, che il lato della piramide sia la . *c* . *e* . si farà sopra esso lato il triangolo equilatero . *c* . *e* . *a* . et sopra ciascuno de suoi lati si faccia un triangolo equilatero, che sarà sopra la . *a* . *c* . il triangolo . *c* . *a* . *b* ., sopra la . *c* . *e* . il trian-

golo . *c* . *e* . *d* ., et sopra la . *a* . *e* . il triangolo . *a* . *e* . *f* ., et questi quattro triangoli faranno la piramide congiungendo insieme li tre angoli cioè . *b* ., . *f* ., et . *d* .; et per trovare il diametro della sfera la quale tocchi tutti quattro gli angoli della piramide; si farà un circulo che circondi il triangolo . *c* . *e* . *a* . il quale circulo sarà quello che li starà sopra, perpendicularmente al suo centro . *k* ., l'angolo sollido . *b* . *d* . *f* .; che tirato il diametro . *g* . *h* . sopra il quale fatto il triangolo . *g* . *h* . *i* ., facendo che li lati . *g* . *i* ., et . *i* . *h* . siano pari alla . *c* . *e* ., che fatto un circulo, che tocchi li tre punti . *g* . *i* . *h* ., et tirato il diametro . *i* . *l* .; dico, che detta . *i* . *l* . sarà il diametro della sfera, et la . *i* . *k* . sarà l'asse della piramide; Et tale dimostratione nasce, che essendo l'angolo solido . *i* . sopra il centro . *k* . tutte le linee, che si tiraranno da tal punto alla circonferentia del circulo . *c* . *a* . *e* ., et l'asse . *i* . *k* . della piramide nella . *k* . *l* . resto dell'asse della sfera possono tanto quanto la . *k* . *h* . in se et tutti quattro li punti . *i* . *g* . *l* . *h* . toccano il maggiore circulo della sfera.



Et se sarà dato uno diametro di sfera, et che si addimandi il lato della piramide che sia circondato da essa sfera, come sarebbe il diametro . *m* .; si troverà per la via della
C. 235 v. proportione in questo modo. Tirasi la . *n* . *o* . pari al diametro . *i* . *l* ., et la . *n* . *p* . pari al diametro *m* .. Et la . *n* . *q* . pari a il lato . *c* . *e* ., et dal punto . *p* . et . *o* . si tiri la . *p* . *r* . et la . *o* . *q* . parallele fra di loro, la . *n* . *r* . sarà il lato della piramide addimandata perchè tale proportione haverà il diametro . *n* . *o* . al suo lato . *n* . *q* ., come il diametro . *n* . *p* . al suo lato . *n* . *r* .:

Hora volendo fare per numero tutto quello, che si è fatto in linee; si formarà la sottoscritta dimanda.

§ [148]. *Egli è una piramide di angoli eguali, che il suo lato è 4: si addimanda quanto è di superficie, et quanto è il diametro della sfera, che la circonda, et quanto è il suo corpo.*

Prima si trovarà quanto è di superficie il triangolo . *a* . *c* . *e* . aggiungendo tutti tre li suoi lati insieme, et partito per mezzo, che sarà 6, che trattone il lato resta 2, che cubato fa 8, et moltiplicato via detto 6, fa 48, che il suo creatore è *R* 48, et tanto è il triangolo . *a* . *c* . *e* ., che, moltiplicato per 4, fa *R* 768, et tanto è la superficie . *b* . *f* . *d* . cioè di tutta la piramide computandosi la base.

Hora per trovare il diametro della sfera prima trovasi il diametro . *g* . *h* . in questo modo: quadrasi la . *c* . *e* ., fa 16 et per regola aggiungasi il terzo, che è $5\frac{1}{3}$, fa $21\frac{1}{3}$, che 'l suo creatore è *R* $21\frac{1}{3}$, et tanto è il diametro . *g* . *h* . ; la . *g* . *i* . è 4 per essere pari alla . *c* . *e* ., la . *g* . *k* . è *R* $5\frac{1}{3}$ per essere il mezzo della . *g* . *h* ., che, tratto il suo quadrato del quadrato della . *g* . *i* ., resta $10\frac{2}{3}$, che il suo creatore è *R* $10\frac{2}{3}$, et tanto è la . *i* . *k* .: per trovare la . *k* . *l* . quadrasi la . *g* . *k* ., fa $5\frac{1}{3}$. et questo si parti per *R* $10\frac{2}{3}$ cioè per la . *i* . *k* . ne verrà *R* $2\frac{2}{3}$, et tanto è la . *k* . *l* ., che aggiunto con la . *i* . *k* . fa *R* 24, et tanto è il diametro della sfera: per trovare quanto è il corpo moltiplicasi *R* 48, che è la superficie . *a* . *c* . *e* ., via *R* $1\frac{5}{27}$, terzo della asse . *i* . *k* ., fa *R* $56\frac{8}{9}$, et tanto è il corpo di detta piramide; et ne nasce le infrascritte proportioni. La . *i* . *l* . in potentia è una volta et mezzo, quanto la potentia della . *c* . *e* ., la potentia della . *i* . *k* . è il mezzo della potentia . *g* . *h* ., et la

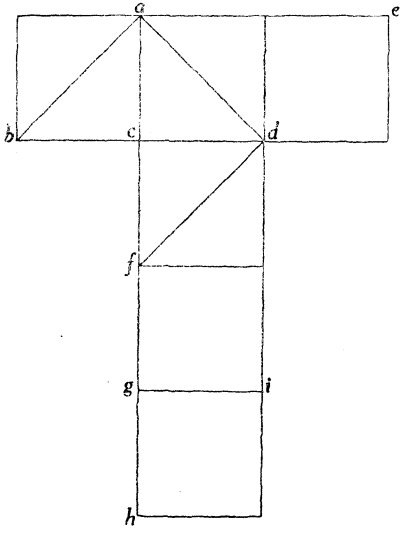
potentia della . *i* . *k* . è li due terzi della potentia della . *c* . *e* .; la potentia della . *c* . *e* . è li tre quarti della . *g* . *h* ., la potentia del diametro . *g* . *h* . è gli otto noni della potentia del diametro . *i* . *l* ..

Et essendo dato il lato di una piramide, si potrà trovare, per
C. 236. la via della proportione, il diametro della sfera; come, se il lato della piramide fusse 6 et si cercasse il diametro della sfera: Quadrasi il lato, fa 36, che aggiuntoli il mezzo fa 54, et *R* 54 è il diametro della sfera, et così si trovaranno con la proportione tutte le altre linee sopra dette; ma volendosi la superficie quadrasi l'uno, et l'altro de lati cioè 4, et 6 fanno 16, et 36: poi per la regola della proportione si dirà se 16 mi da di superficie *R* 768, che mi darà 36, che darà *R* 388, et tanto sarà la superficie della piramide, che sarà 6 per lato; et volendo sapere il corpo si cuberà l'uno, et l'altro lato, che uno sarà 64, et l'altro 216: poi per la regola della proportione si dirà se 64 mi da di corpo *R* $56\frac{8}{9}$, che mi darà 216; darà *R* $670\frac{25}{32}$; et con queste regole di questa sola piramide si potrà trovare tutte le soprascritte misure pure che siano de lati eguali.

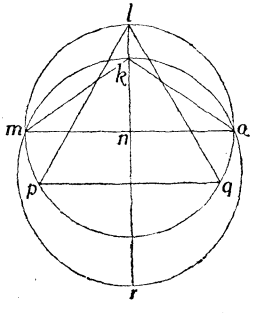
§ [149]. *Il* **Cubo** *è un corpo composto di sei quadrati, et di otto angoli, che ciascuno è contenuto da tre angoli retti.* La sua superficie è come si è detto sei quadrati, come si può vedere nella figura, et il suo angolo solido è l'angolo . *c* . perchè l'angolo . *b* . et . *f* . si vanno a congiungere insieme; et se si taglierà detto angolo con una superficie piana, che tocchi li tre punti . *f* . *d* . *a* . tale superficie sarà un triangolo equilatero che ciascuno suo lato è pari alla . *f* . *d* . diametro di una delle superficie.

Però volendosi trovare il diametro, che circonda detto cubo, si farà il triangolo . *l* . *p* . *q* . che li suoi lati siano pari alla . *f* . *d* . intorno al quale si formarà il circulo . *l* . *p* . *q* .

nel quale si tirarà il diametro . *m* . *n* . *o* ., et sopra detto diametro si farà il triangolo . *m* . *k* . *o* . facendo . *m* . *k* . et . *k* . *o* . ciascuna di loro pari a uno de lati del cubo: poi C. 236 v.



facciasi il circulo . *m* . *k* . *o* . *r* ., che tocchi li tre punti . *m* . *k* . *o* ., et detto circulo sarà il maggiore circulo della sfera, et la . *k* . *r* . sarà il diametro. Et questa dimostratione nasce da questa raggione: Dato che sia tagliato l'angolo solido come fu detto, il circulo . *l* . *p* . *q* . starà in piano, et l'angolo . *c* . li starà perpendiculare sopra il centro . *n* . et tutte le linee, che si tiraranno da l'angolo . *c* . alla circunferentia di detto circolo saranno pari al lato del cubo; et la linea, che si tirarà dal angolo . *c* . al centro . *n* . passerà ancora



per il centro della sfera, et tanto potrà la detta linea in tutto il diametro della sfera, quanto uno de lati del cubo in se, et nella figura l'angolo . *k* . viene ad essere l'angolo . *c* ..

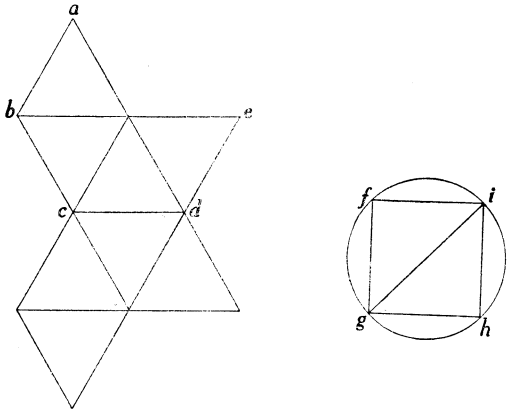
Et essendo dato un diametro di una sfera, et che si voglia sapere il lato del cubo, che sia circondato da detta sfera; si potrà trovare tale lato per la regola della proportione, come si è fatto nella piramide, et il medesimo se sarà dato il lato del cubo si potrà trovare il diametro della sfera; Et volendosi fare per numero tutto quello, che si è fatto in linee si formarà la infrascrita domanda.

§ [150]. *Egli è uno Cubo, che ciascuno suo lato è 4; addimandasi quanto è la sua superficie, quanto è 'l diametro della sfera, che lo contiene, et quanto è di corpo.*

Per sapere la superficie vedasi quanto è la superficie di uno delli suoi quadrati, che, essendo 4 uno de suoi lati, la sua superficie sarà 16, che moltiplicato per 6 numero de quadrati che compongono il cubo, fa 96, et tanto è la superficie. Hora per trovare il diametro della sfera vedasi quanto è il diametro . *a* . *b* . che essendo il lato 4 detto diametro sarà $R\,32$, et tanto è ciascuno de lati del triangolo . *l* . *p* . *q* ; et per trovare il diametro . *m* . *o* . aggiungasi al quadrato della . *p* . *q* . il suo terzo, che è $10\frac{2}{3}$, fa $42\frac{2}{3}$, che il suo creatore è $R\,42\frac{2}{3}$, et tanto è il diametro . *m* . *o* ., che pigliatone il mezzo sarà $R\,10\frac{2}{3}$, et tanto sarà la . *m* . *n* ., et la . *m* . *k* . sarà 4, che cavato il quadrato della . *m* . *n* . del quadrato della . *m* . *k* . resta $5\frac{1}{3}$, che il suo creatore è $R\,5\frac{1}{3}$, et tanto è la . *k* . *n* ., et per trovare quanto è la . *k* . *r* . quadrasi la . *m* . *k*, fa 16, che partito per la . *k* . *n* . cioè $R\,5\frac{1}{3}$ ne verrà $R\,48$, et tanto è 'l diametro della sfera. Et per trovare quanto è il corpo
C. 237. basta a cubare uno de lati, et il produtto sarà il corpo cioè 64. Et ne nasce le infrascritte proportioni: il quadrato della . *k* . *r* . è triplo del quadrato della . *m* . *k* . ; il quadrato della . *m* . *k* .

è triplo al quadrato della . *k* . *n* .; la . *n* . *r* . è doppio alla . *n* . *k* .; il quadrato della . *m* . *o* . è doppio al quadrato della . *m* . *r* .; et il quadrato della . *m* . *o* . è due volte et due terzi del quadrato della . *m* . *k* .; si che se sarà dato uno cubo, che uno de lati sia 3, et che si addimandassi il diametro della sfera si quadrerà il detto lato, et farà 9, che moltiplicato per tre, per le proportioni dette sarà 27, et tanto è il quadrato del diametro della sfera; et se sarà noto il diametro della sfera, et si voglia il lato del cubo si quadrerà detto diametro, et del produtto se ne piglierà il terzo, et il suo creatore sarà il lato del cubo.

§ [151]. *Il corpo dell'* **Ottaedro** *è composto di otto triangoli equilateri, et di sei angoli solidi, che ciascuno è contenuto da quattro angoli de detti triangoli,* come si può vedere nella figura



della sua superficie, et l'angolo . *a* . va congiunto col angolo . *e* . et se sarà una superficie piana, che tagli uno delli suoi angoli solidi trovando la . *a* . *b* . *c* . *d* . tale superficie sarà quadrato, et taglierà il corpo in due parti pari; et volendo sapere quanto è il diametro della sfera che lo contiene, facciasi il quadrato . *f* . *g* . *h* . *i* ., et il circulo . *f* . *g* . *h* . *i* . che tocchi ciascuno de

suoi angoli, et perchè detto quadrato taglia il corpo in due parti pari così taglierà la sfera in due parti pari, et toccando ciascuno de suoi angoli la sfera verrà ancora a toccare il maggiore circulo della sfera, però il circulo .*f*.*g*.*h*.*i*. sarà il circulo della sfera, et la .*g*.*i*. sarà il suo diametro. Et volendo fare per numero quello che si è fatto per linee si formarà la infrascritta domanda.

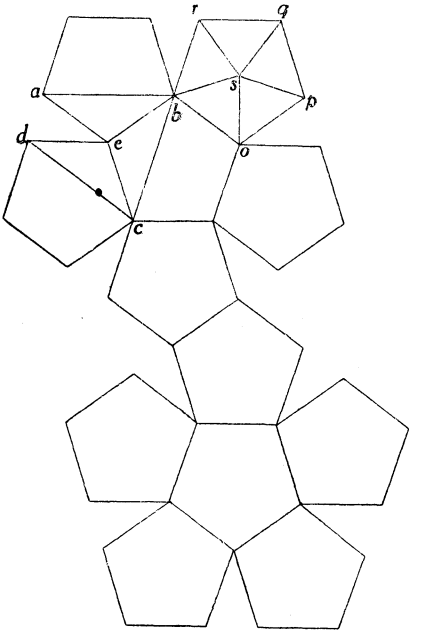
C.237 v. § [152]. *Egli è un ottaedro che ciascuno suo lato è 4; addimandasi la superficie, il diametro della sfera, che lo contiene, et il suo corpo*

Per avere la superficie trovasi la superficie d'uno de detti triangoli; che, essendo 4 per faccia, la sua superficie sarà *R* 48, che moltiplicato via 8, numero delli triangoli che compongono il corpo, fa *R* 3072 et tanto è la superficie di detto corpo. Et volendo il diametro della sfera trovasi quanto è il diametro sarà *R* 32, et tanto è il diametro della sfera, et volendo il corpo pigliasi il terzo del diametro che è *R* $3\frac{5}{9}$ et moltiplicasi via il quadrato de uno de lati, cioè 16, fa *R* $910\frac{2}{9}$, et tanto è il corpo; la proportione del diametro della sfera, è in potentia il doppio della potentia de uno de lati.

§ [153]. *Il corpo* **Dodecaedro**, *è un corpo composto di dodeci pentagoni equilateri, et ha angoli vinti solidi, che ciascuno è composto di tre angoli di pentagono*; et se una superficie piana taglierà uno de suoi angoli, come è l'angolo .*e*. perchè l'angolo .*a*. et .*d*. si congiungono insieme, et fan l'angolo .*e*. solido, et toccando detta superficie li tre angoli
C. 238 .*c*.*b*. et .*a*.*d*. però tal superficie sarà un triangolo equilatero, che ciascuno suo lato sarà la linea che giace sotto a l'angolo del pentagono, cioè le tre linee .*d*.*c*., .*c*.*b*., et .*b*.*a*.;

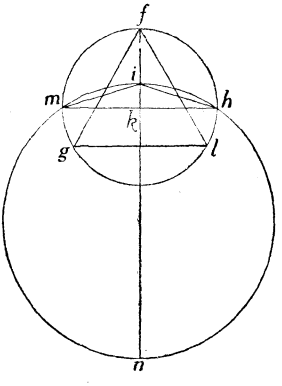
Et volendo trovare il diametro della sfera, che tocca

ciascuno de gl'angoli di tal corpo si farà il triangolo equilatero . *f* . *g* . *l* . che ciascuno suo lato sia pari alla . *c* . *b* .: poi



facciasi il circulo . *f* . *g* . *l* . che la circunferentia tocchi ciascuno de gl'angoli del triangolo . *f* . *g* . *l* ., et tirasi il diametro . *m* . *h* .; et sopra al centro . *a* . sarà l'angolo . *e* . et tutte le linee, che saranno tirate da detto angolo alla circunferentia del circulo . *f* . *g* . *l* . saranno pari a uno de lati delli duodeci pentagoni; però sopra a detto diametro facciasi il triangolo . *m* . *i* . *h* ., che la . *m* . *i* ., et . *i* . *h* . ciascuna di loro sia pari alla . *c* . *e* ., et facciasi il circulo . *m* . *i* . *h* . *n* ., che tocchi li tre punti . *m* ., . *i* ., et . *h* ., et tirato il diametro . *i* . *n* . il quale sarà il diametro della sfera, che contiene detto corpo; che, dato che fusse tagliato di detta sfera la parte che è sopra la linea . *m* . *h* ., la superficie che taglieria tal parte saria una

superficie di un circulo, che saria pari al circulo .*f*.*g*.*l*., et tutte le linee, che si tirasero dal punto .*i*. alla circunferentia di tal circulo sariano pari alli lati de pentagoni, che formano il corpo; Et volendo fare per numero tutto quello che si è fatto in linee, si farà la infrascritta dimanda:



§ [154]. *Egli è un Dodecaedro, che ciascuno suo lato è 4; addimandasi quanto è la sua superficie, quanto è il diametro della sfera, che lo contiene, et quanto è il suo corpo.*

Per trovare la sua superficie prima trovasi il diametro del circulo, che contiene uno dei pentagoni, et sia il pentagono .*b*.*o*.*p*.*q*.*r*., che essendosi mostrato, che il pentagono descritto dentro d'un circulo il suo diametro si è 8, il lato del pentagono sarà $R\,\underline{|40 \text{ m. } R\,320|}$ (1), però si dirà per la regola de la proportione: se $R\,\underline{|40 \text{ m. } R\,320|}$ di lato mi da 8 di diametro, che mi darà 4 de lato; che darà $R\,\underline{\left|32 \text{ p. } R\,204\frac{4}{5}\right|}$, et tanto sarà il diametro del circulo .*b*.*o*.*p*.*q*.*r*., che, tirato da gl'angoli del pentagono cinque linee al centro del circulo segnato .*s*., et si formarà cinque triangoli pari fra di loro; et volendo la superficie di tutto il pentagono si troverà la superficie de uno de triangoli; et sia il triangolo .*s*.*o*.*p*. che li duoi lati .*s*.*o*., et .*s*.*p*. saranno ciascuno di loro
C.238v. $R\,\underline{\left|8 \text{ p. } R\,12\frac{4}{5}\right|}$ et la .*o*.*p*. è 4; per trovare la perpendiculare .*s*.*t*. quadrasi la .*t*.*o*. che è 2, fa 4, et cavasi di

(1) Cfr. il n. 136.

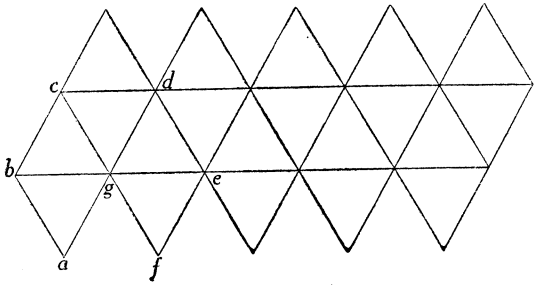
8 p. $R\,12\frac{4}{5}$ quadrato della . *s* . *o* . resta 4 più $R\,12\frac{4}{5}$, il suo creatore è $R\,\boxed{4 \text{ p. } R\,12\frac{4}{5}}$, et tanto è la . *s* . *t* ., che moltiplicato via 2, mezzo della basa . *o* . *p* ., fa 16 più $R\,204\frac{4}{5}$; che pigliatone il creatore, farà $R\,\boxed{16 \text{ p. } R\,204\frac{4}{5}}$, et tanto è la superficie del triangolo . *o* . *s* . *p* ., che moltiplicato per . 5 ., fa $R\,\boxed{400 \text{ p. } R\,128000}$ et tanto è la superficie del pentagono . *b* . *o* . *p* . *q* . *r* ., che moltiplicato per 12 fa $R\,\boxed{57600 \text{ più } R\,2654208000}$, et tanto è la superficie di tutto il corpo, cioè delli duodeci pentagoni, che si veggono nella figura.

Et volendo il diametro della sfera prima trovasi quanto è la linea che sta sotto l'angolo del pentagono, cioè la . *d* . *c* . la quale si trova in questo modo: pigliasi una quantità, come si voglia, et sia 6, la quale si divida secondo la proportione che ha il mezzo, et gli estremi, che la parte maggiore sarà $R\,45$ meno 3, et perchè la II^a^ del XIII dice che se la linea, che giace sotto l'angolo del pentagono sarà divisa secondo la proportione, che ha il mezzo, et gli estremi, la maggior parte sarà il lato del pentagono, però se tale linea sarà 6 il lato del pentagono sarà $R\,45$ meno 3, però per la regola della proportione si dirà: se $R\,45$ meno 3, lato del pentagono, ha 6, che haverà 4 di pentagono? che haverà $R\,20$ più 2, però li lati del triangolo . *f* . *g* . *l* . saranno ciascuno di loro $R\,20$ più 2, et per sapere il diametro . *m* . *h* . quadrasi $R\,20$ più 2, fa 24 più $R\,320$, che aggiuntoli il terzo, che è 8 più $R\,35\frac{5}{9}$, fa 32 più $R\,568\frac{8}{9}$, che il suo creatore è $R\,\boxed{32 \text{ p. } R\,568\frac{8}{9}}$, et tanto è il diametro . *m* . *h* ., la . *m* . *k* . sarà $R\,\boxed{8 \text{ p. } R\,35\frac{5}{9}}$

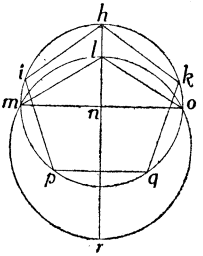
la . *m* . *i* . sarà 4, che cavato il quadrato de l'uno del quadrato dell'altro restarà 8 m. $R\,35\frac{5}{9}$, che il suo creatore è $R\,\underline{|\,8\text{ m. }R\,35\frac{5}{9}\,|}$, et tanto è la . *i* . *k* ., che quadrato la . *m* . *i* . fa 16, et partito per la . *i* . *k* . cioè per $R\,\underline{|\,8\text{ meno }R\,35\frac{5}{9}\,|}$ ne viene $R\,\underline{|\,72\text{ più }R\,2880\,|}$ et tanto è il diametro . *i* . *n* .. Et volendo il corpo, si farà una piramide che la sua base, sarà un pentagono, che ciascuno suo lato è 4, et li lati, che formano l'altezza, saranno ciascuno di loro $R\,\underline{|\,18\text{ p. }R\,180\,|}$, et per trovare l'asse di tale piramide cavasi il quadrato della . *s* . *o* . del quadrato de uno de detti lati cioè di $R\,\underline{|\,18\text{ p. }R\,180\,|}$
C. 239. restarà 10 p. $R\,96\frac{4}{5}$ che il suo creatore sarà $R\left[10\text{ p. }R\,96\frac{4}{5}\right]$, et tanto è la asse; la quale essa asse è una linea, che si parte dal centro della sfera et va al centro di ciascuno pentagono: si che detto corpo haverà 12 piramide tutte eguali, et ciascuna a base è un pentagono che ciascuno suo lato è 4, et l'altezza di ciascuna è $R\left[10\text{ p. }R\,96\frac{4}{5}\right]$, che, moltiplicato il terzo di detta altezza via $R\,[400\text{ p. }R\,128000]$, fa $R\left[R\,2360\frac{4040}{6561}\right.$ p. $R\,1890\frac{110}{6561}$ p. $R\,1950\frac{6050}{6561}$ p. $\left.\frac{31}{4981}\right]$, et tanto è il corpo di una piramide, che moltiplicato per 12, fa $R\,[R\,3964928000$ p. $R\,3171942400$ p. $R\,3276800000$ p. $64000]$, et tanto è il corpo.

§ [155]. *Il corpo* **Icosaedro** *è composto di vinti triangoli equilateri, et ha dodeci angoli solidi, che ciascuno è composto da cinque angoli di triangoli equilateri*; come si può vedere nella figura l'angolo . *g* ., che è composto da cinque angoli

perchè l'angolo . *a* . si congiunge con l'angolo . *f* . et se una superficie piana taglierà l'angolo solido . *g* ., et che tra le superficie tocchi li cinque angoli solidi . *a* . *b* . *c* . *d* . *e* . tale superficie sarà un pentagono equilatero, che ciascuno suo lato sarà pari a uno de lati de triangoli, che compongono il corpo;



et se si vorrà il diametro della sfera di tale corpo facciasi il pentagono . *h* . *i* . *p* . *q* . *k* ., che ciascuno suo lato sia pari a uno de lati de triangoli, come si è detto: poi facciasi il circulo . *h* . *i* . *p* . *q* . *k* ., che tocchi ciascuno de gl'angoli del pentagono, et tirasi la . *m* . *o* ., diametro del circulo sopra la quale si faccia il triangolo . *m* . *l* . *o* . che le linee . *m* . *l* ., ed . *l* . *o* . ciascuna di loro sia pari a uno de lati de triangoli che compongono il corpo: poi facciasi il circulo . *m* . *l* . *o* . *r* ., che tocchi li tre angoli . *m* . *l* . *o* .; tal circulo sarà il circulo maggiore della sfera, et se con una superficie piana si taglierà della detta sfera la parte . *l* . *n* . del suo diametro tale superficie sarà un circulo, che sarà pari al circulo . *h* . *i* . *p* . *q* . *k* ., et tutte le linee, che saranno tirate dal punto . *l* . saranno pari a uno de lati de triangoli, che compongono il corpo; Et volendo fare in numero, tutto quello che si è fatto in linee, si farà la infrascritta dimanda: *C. 239 v.*



§ [156]. *Egli è un icosaedro, che ciascuno suo lato è 4: addimandasi quanto è la sua superficie, et quanto è il diametro della sfera che lo contiene, et quanto è la sua quadratura.*

Per trovare la superficie prima trovasi la superficie de uno de triangoli, che sarà R 48, che moltiplicato via 20, numero de triangoli, fa R 19200, et tanto è la superficie. Per trovare il diametro della sfera trovasi il diametro . *m* . *o* . dentro del quale è il pentagono . *h* . *i* . *p* . *q* . *k* ., che ciascuno de suoi lati è 4, perchè sono pari alli lati de triangoli, che, come è stato detto nella dimanda passata, detto diametro sarà $R\left[32 \text{ p. } R\, 204\frac{4}{5}\right]$, per trovare la . *n* . *l* . quadrasi . *m* . *n* ., mezzo del diametro; fa 8 più $R\, 12\frac{4}{5}$, che cavato del quadrato . *m* . *l* ., che è 16, resta 8 meno $R\, 12\frac{4}{5}$, che 'l suo creatore è $R\left[8 \text{ m. } R\, 12\frac{4}{5}\right]$, che partito il quadrato della . *m* . *l* . per $R\left[8 \text{ m. } R\, 12\frac{4}{5}\right]$ ne viene R [40 p, R 320], et tanto è il diametro . *l* . *r* . diametro della sfera.

Et se dal centro della sfera saranno tirate dodici linee a ciascuno de gli angoli del corpo formarà 20 piramide, che saranno tutte pari fra di loro, et ciascuna delle lor base sarà uno de triangoli, che compongono il corpo; et i lati, che formano l'altezza di detta piramide, saranno pari al mezzo del diametro della sfera; et per trovare l'asse di tale piramide cavasi il quadrato del mezzo del diametro che contiene uno de triangoli, che come fu detto sarà $5\frac{1}{3}$ del quadrato del mezzo del diametro della sfera, che è 10 più R 20, resta
C. 240. $4\frac{2}{3}$ p. R 20 che 'l suo creatore è R 3 più $R\, 1\frac{2}{3}$, et tanto è l'asse di una di dette piramide, che, moltiplicato via la base cioè R 48, fa 12 più R 80, che il terzo è 4 più $R\, 8\frac{8}{9}$, et

tanto è la quadratura di una di dette piramide, che moltiplicato via 20, fa 80 più $R\ 3555\frac{5}{9}$, et tanto è la quadratura di tutto il corpo.

§ [157]. Delli soprascritti cinque corpi ne nascano infiniti de lati eguali, et d'angoli solidi pari, ma non di superficii simile, perchè come si è detto (1) quelli che hanno le superficii simili non possono essere se non cinque; de quali cinque, tagliando li lor angoli in due modi, ne nasceranno altri corpi de lati eguali, et la maggior parte di superficii dissimili, perchè della piramide ne verrà l'ottaedro, tagliando ciascuno de gl'angoli solidi con una superficie piana, che tagli per mezzo ciascuna de l'asse che soprasta al centro della basa. Ma se si taglierà detti angoli con una superficie piana che ciascuno de suoi lati sia la terza parte de lati della piramide ne verrà un corpo composto di quattro essagoni equilateri equiangoli, et quattro triangoli equilateri, et di lati pari alli essagoni, come si può vedere nella infrascritta figura la sua superficie, del quale mostrarò il modo di trovare il diametro della sfera che lo contiene, la quadratura di esso corpo in numero, et il diametro della sfera, et la sua superficie.

§ [158]. *Egli è un corpo* [**Tetraedro tronco**] *composto di quattro essagoni, et quattro triangoli de lati pari, et la sua superficie è quella che si vede disegnata, et ciascuno suo angolo*

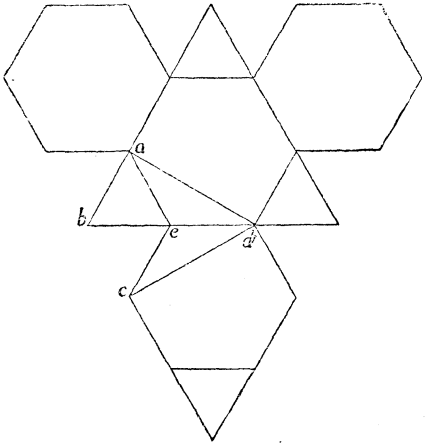
---

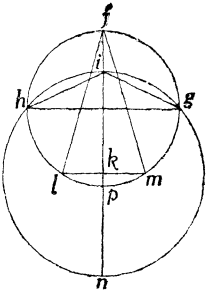
(1) Questo richiamo si riferisce a materia contenuta nelle carte che andarono perdute, fra quelle che portano i numeri 234, 235.

La indeterminazione nel numero dei poliedri semiregolari, il fatto di non averne trattati che tre, fa credere che il BOMBELLI non conoscesse il passo di PAPPO ove sono numerati e descritti i poliedri archimedei. (Coll. *Math.* Libr. V. Introd. alla prop. XVIII).

è composto da due angoli di essagono, et uno de triangoli; addimandasi il diametro della sfera che lo contiene.

Il suo angolo . e . è come si vede contenuto da l'angolo
C. 240 v. . a . e . d . et da l'angolo . d . e . c . et . a . e . b ., perchè l'angolo . b . si congiunge, con l'angolo . c ., et se una superficie piana tagliarà detto angolo in tal modo, che detta superficie tocchi li tre angoli, cioè . a . d ., et . c . b . detta superficie sarà un triangolo, che li due suoi lati saranno pari a la . c . d .; però, volendosi trovare il diametro della sfera che contiene detto corpo, si farà il triangolo . l . f . m ., che li due lati . l . f ., et . f . m . siano pari a la . c . d ., et la . l . m . sia pari a la . b . a ., et facciasi il circulo . f . l . m . che tocchi ciascuno de suoi angoli, nel quale circulo si tiri il diametro . h . g . sopra il quale si faccia il triangolo . h . i . g ., in tal modo, che la . h . i ., et la . i . g ., ciascuna di loro sia pari a la . b . a ., per la raggione detta nel tagliare de gl'angoli di cinque corpi regolari; et per non essere lungo non replicarò più nè in questo nè negli altri simili cose; et facciasi il circulo . h . i . g . n ., che tocchi li tre angoli, . h ., . i . et . g ., et tirasi il diametro . i . n . il quale sarà il diametro della sfera addimandato. Et volendo fare in numero quello che si è fatto in linee si farà la sottoscritta dimanda:





§ [159]. *Egli è un Ottobase, cioè quattro triangolari, et quattro essagoni che ciascuno suo lato è 4; addimandasi il diametro della sfera che lo contiene, et quanto è di superficie, et quanto è la quadratura del corpo.*

Prima, per trovare il diametro della sfera, vedasi quanto è la . *c* . *d* . che come fu detto a suo luogo è in potentia triplo a la . *b* . *a* . : però detta . *c* . *d* . sarà R 48 essendo la . *b* . *a* . 4, la . *f* . *l* ., et la . *f* . *m* . saranno ciascuna di loro *R* 48 per essere pari a la . *c* . *d* .; et la . *m* . *l* . sarà 4; la perpendiculare . *f* . *k* . sarà *R* 44 perchè tanto può la . *f* . *k* ., et la . *k* . *l* ., quanto la . *f* . *l* . in se; et la . *f* . *p* . sarà *R* 52 $\frac{4}{11}$, perchè tanto può la . *f* . *p* . in la . *f* . *k* . quanto la . *f* . *l* . in se; la . *h* . *g* . sarà *R* 52 $\frac{4}{11}$, per essere ancora lei diametro; la . *h* . *k* . sarà *R* 13 $\frac{1}{11}$, la . *h* . *i* . sarà 4, per essere pari a la . *b* . *e* .; et, per trovare la . *i* . *k* . si cavarà il quadrato de la . *h* . *k* . del quadrato della . *h* . *i* . et del resto se ne pigliarà il creatore, che sarà *R* 2 $\frac{10}{11}$, et tanto è la . *i* . *k* .; per trovare la . *i* . *n* . quadrasi la . *i* . *h* ., fa 16, et si parte per la . *i* . *k* ., che è *R* 2 $\frac{10}{11}$, ne viene *R* 88, et tanto è il diametro della sfera.

Et volendosi la sua superficie, vedasi quanto è di superficie uno de triangoli che compongono il corpo, cioè il triangolo . *b* . *a* . *e* ., che essendo 4 di lato, sarà *R* 48 di superficie, che moltiplicato per 28, fa *R* 37632, et moltiplicasi per 28, perchè li quattro essagoni sono 24 triangoli; Et per havere *C. 241.* la quadratura del corpo, trovasi quanto è la quadratura di una piramide che sia 12 per lato, cioè il triplo de uno de lati del corpo preposto, per la via della proportione, che come fu detto a suo luogo la piramide, che è 4 per lato, è di corpo *R* 56 $\frac{8}{9}$, però quella di 12 sarà *R* 41472, che trattone *R* 910 $\frac{2}{9}$,

quadratura delle quattro piramide che mancano a compire il corpo acciochè fusse una piramide sola, che ciascuna è 4 per lato, restarà $R\,35094\frac{2}{9}$, et tanto è la quadratura di detto corpo.

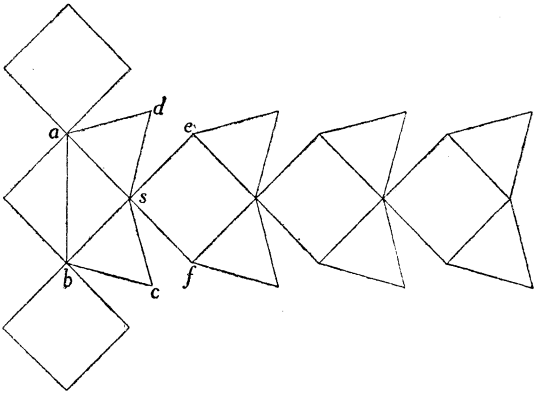
§ [160]. Il cubo essendogli tagliato gli angoli in tal modo, che tagli tutti li suoi lati in due parti pari, la superficie piana che taglierà tali angoli, sarà un triangolo, che haverà li lati che in potentia saranno il mezzo della potentia del lato del cubo, et formarà *un corpo, che haverà quatordice base, otto triangolare, et sei quadrate* [**Cubottaedro**].

Et se delle superficie di detto cubo sarà fatto uno otto angoli equilatero, il maggiore che vi cape, et che poi siano tagliati gli angoli di detto cubo sino alli lati di detti otto angoli, la superficie che taglierà detti angoli sarà un triangolo equilatero, che li suoi lati saranno pari a li lati di detti otto angoli, et faranno *un corpo di sei ottoangoli, et otto triangoli,* [**Cubo tronco**] et di l'uno et l'altro metterò le loro superficie et misure come ho fatto del passato, et prima di sei quadrati et otto triangoli.

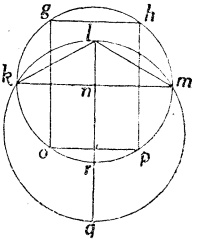
§ [161]. *Egli è un corpo di quatordice base, cioè sei quadrate ed otto triangulare, di lati eguali, come si vede la sua superficie in piano; addimandasi il diametro della sfera, che 'l contiene.*

C. 241 v. Si vede nella sua superficie, che congiungendo l'angolo . *c* . con l'angolo . *f* ., et l'angolo . *d* . con l'angolo . *e* ., et elevandosi per tale congiungimento l'angolo solido . *s* ., la superficie piana, che taglierà detto angolo toccando li quattro angoli . *b* ., . *a* ., . *d* ., . *e* ., et . *f* ., . *c* . sarà un parallelogrammo, che la sua lunghezza sarà pari a la . *f* . *e* ., et la larghezza a la . *a* . *d* .; et volendo il diametro della sfera, che 'l contiene; facciasi il parallelogrammo . *g* . *h* . *o* . *p* ., che la . *g* . *o* ., et la . *h* . *p* . siano pari a la . *f* . *e* .; et la . *g* . *h* . et la . *o* . *p* . siano pari

a la . *a* . *d* . intorno al quale si faccia il circulo . *g* . *h* . *o* . *p* . che tocchi li angoli di detto parallelogrammo; et tirasi il dia-



metro . *k* . *m* ., et sopra esso diametro . *k* . *m* . si facci il triangolo . *k* . *l* . *m* ., che li due lati . *k* . *l* ., et . *l* . *m* . ciascuno di loro sia pari a la . *a* . *d* ., cioè a uno de lati del corpo; et poi facciasi il circulo . *k* . *l* . *m* . *q* . che tocchi li tre angoli . *k* . *l* . *m* ., et dal punto . *l* . si tiri il diametro . *l* . *q* ., il quale sarà il diametro della sfera addimandato: et volendo fare in numero quello che si è fatto in linee si farà la sottoscritta dimanda:



§ [162]. *Egli è un corpo di quatordice base, cioè sei quadrate et otto triangolari tutte equilatere, che ciascuno suo lato è 4; addimandasi il diametro della sfera che 'l contiene, et la sua superficie, et la quadratura del corpo.*

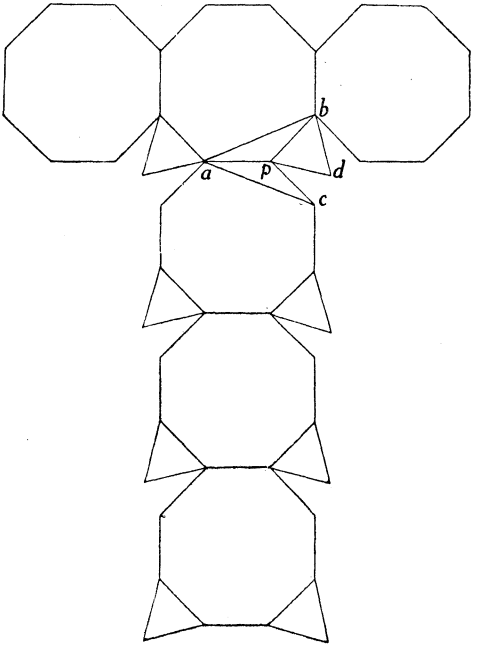
Per trovare il diametro della sfera bisogna trovare quanto sono li lati del parallelogrammo . *g* . *h* . *o* . *p* ., che, essendo pari la . *g* . *o* . a la . *f* . *e* . la quale è il diametro del quadrato . *e* . *s* . *f* ., et essendo la . *e* . *s* . 4 ., et la . *s* . *f* . 4 ., la

. *e* . *f* . sarà *R* 32 perchè soggiace a l'angolo retto . *s* ., et la . *g* . *o* . sarà *R* 32 per essergli pari; la . *g* . *h* . sarà 4 per essere pari a la . *a* . *d* .; la . *o* . *h* . sarà *R* 48 perchè tanto può, la . *h* . *o* ., quanto la . *h* . *g* ., et la . *g* . *o* .; la . *k* . *m* . sarà *R* 48 perchè la . *h* . *o* ., et la . *k* . *m* . ciascuna di loro è diametro del circulo . *g* . *r* . *h* .; la . *k* . *l* ., et la . *l* . *m* . ciascuna di loro sarà 4 per essere pari a la . *a* . *d* .; la . *k* . *n* . sarà *R* 12 per essere il mezzo della . *k* . *m* .; che, tratto il quadrato della . *k* . *n* . del quadrato della . *k* . *l* ., resta 4, che 'l suo creatore è 2, et tanto è la . *l* . *n* .; per trovare la . *l* . *q* . quadrasi la . *k* . *l* ., che è 4, et partasi per la . *n* . *l* . che è 2, ne viene 8, che è il diametro . *l* . *q* ., et fra dette linee ci è le sottoscritte proportioni: *il diametro della sfera è il doppio del lato . a . d .; la perpendiculare . l . n . è il mezzo del lato . a . d .; la potentia della . k . m . è tripla a la potentia della . a . d ., et la potentia della . k . m . è li tre quarti*
C. 242. *della potentia . n . g ..*

Et volendo la superficie di detto corpo trovasi la quadratura de uno de suoi quadrati, che sarà 16, che moltiplicato per 6, numero de quadrati, fa 96: poi trovasi la superficie d'uno de triangoli, che sarà *R* 48, che moltiplicato per 8, numero de triangoli, fa *R* 3072, che aggiunto a 96, fa 96 più *R* 3072, et tanto è la superficie; et volendo la quadratura del corpo è noto che, se dal centro della sfera si tirarà una linea a ciascuno de gl'angoli, tal linea sarà il mezzo del diametro della sfera, et formarà quatordice piramide delle quali otto haveranno la basa triangolare, che ciascuno suo lato sarà 4, et sei che haveranno la basa quadrata, et ciascuno suo lato sarà pure 4, et li lati che formano dette piramide ciascuno di loro sarà 4 per essere pari al mezzo del diametro della sfera; si che volendo la quadratura di detto corpo si trovarà l'asse a tutte due le sorte di dette piramide, che l'asse della quaquadrata sarà *R* 8, et l'asse della triangolare sarà *R* $10\frac{2}{3}$, che

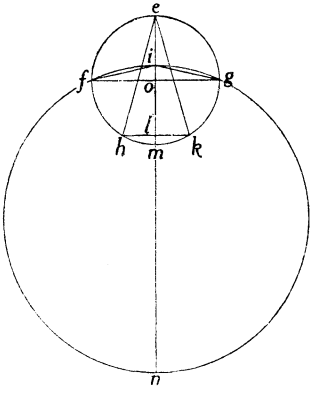
preso il terzo di ciascuna, et moltiplicato via la sua base; la quadrata sarà $R\,227\frac{8}{9}$, et la triangolare $R\,56\frac{8}{9}$, che moltiplicato la quadrata per 6 perchè sono sei piramide; et la triangolare per 8 perchè sono otto piramide le triangolare faranno $R\,8192$, et $R\,3640\frac{8}{9}$, che aggiunte insieme fanno $R\,55523\frac{8}{9}$, et tanto è la quadratura di detto corpo.

§ [163]. *Egli è un corpo di quatordice base, cioè sei ottoangoli, ed otto triangoli tutti de lati eguali come si può vedere*



la sua superficie in piano; addimandasi il diametro della sfera, che 'l contiene.

Come si vede nella sua superficie, l'angolo solido . *p* ., se sarà tagliato, la superficie, che lo tagliarà sarà triangolare, et li suoi lati saranno la . *a* . *c* ., et la . *a* . *b* .; et la . *b* . *d* .; et volendo il diametro della sfera facciasi il triangolo . *h* . *e* . *k* ., che li due lati . *e* . *h* ., et . *e* . *k* . siano pari alla . *a* . *b* ., et la . *h* . *k* . sia pari a la . *b* . *d* ., et facciasi il circulo . *e* . *h* .. *k* . che tocchi li tre angoli . *e* . *b* ., et . *k* . nel quale si tiri il diametro . *f* . *g* ., et sopra esso si faccia il triangolo . *f* . *i* . *g* ., che la . *f* . *i* ., et la . *i* . *g* . ciascuna di loro sia pari a la . *b* . *d* ., et facciasi il circulo . *f* . *i* . *g* ., che tocchi li tre punti . *f* . *i* . *g* . et tirasi il diametro . *i* . *n* ., et sarà il diametro addimandato.



§ [164]. *Egli è un corpo di quatordice base cioè sei otto angoli, ed otto triangoli, che ciascuno suo lato è* 4: *addimandasi il diametro della sfera che 'l contiene, et la sua superficie, et la quadratura del suo corpo.* Per trovare il diametro della sfera vedasi quanto è la linea . *a* . *c* ., che come si è mostrato a suo luogo sarà $R\,|\,\underline{32 \text{ più } R\,512}\,|$, et tanto sarà la . *e* . *k* . et la . *e* . *h* ., perchè ciascuna di loro è pari a la . *a* . *c* .; la . *h* . *k* . è 4 per essere pari a la . *b* . *d* .; et per trovare la perpendiculare . *e* . *l* . cavasi il quadrato della . *l* . *h* . del quadrato della . *e* . *h* . resta il quadrato della . *e* . *l* ., che pigliatone il creatore sarà $R\,|\,\underline{28 \text{ p. } R\,512}\,|$; et per trovare il diametro . *e* . *m* . partasi il quadrato della . *e* . *h* ., che è 32 più $R\,512$, per la . *e* . *l* ., ne viene $R\,37\,\frac{11}{17}$ p. $R\,453\,\frac{155}{289}$, et tanto è la . *e* . *m* ., et il me-

C. 242 v.

desimo la .*f*.*g*., perchè l'una, et l'altra è diametro del circulo; la .*f*.*i*. et la .*i*.*g*. ciascuna di loro sarà 4, per essere pari a la .*a*.*p*.; et per trovare la .*i*.*o*. cavasi il quadrato della .*f*.*o*., che è $9\frac{7}{17}$ più $R\,28\frac{100}{289}$, perchè è mezzo del diametro .*f*.*g*., di 16 quadrato della .*f*.*i*., resta $6\frac{10}{13}$ m. $R\,28\frac{100}{289}$ che il suo creatore è $R\,\left|\underline{6\frac{10}{17}\text{ m. }R\,28\frac{100}{289}}\right|$, et tanto è la .*i*.*o*.; per trovare la .*i*.*m*. partasi il quadrato della .*f*.*i*., che è 16, per la .*i*.*o*., che è $R\,\left|\underline{6\frac{10}{17}\text{ m. }R\,28\frac{100}{289}}\right|$, ne viene $R\,\left|\underline{112 \text{ più } R\,8192}\right|$, et tanto è il diametro .*i*.*n*., cioè il diametro della sfera.

Et per trovare la superficie, vedasi quanto è di superficie uno degli sei ottangoli, che come si è mostrato sarà 32 più *R* 2048, che moltiplicato per 6 numero de gli ottangoli, fa 192 più *R* 73728: poi trovasi la superficie di uno de triangoli, che sarà *R* 48, che moltiplicato per 8 numero de triangoli, fa *R* 3072, che aggiunto con la superficie de li sei ottangoli, fa *R* 7372 più *R* 3072 più 192, et tanto è la superficie di *C. 243.* tutto il corpo; per sapere la quadratura trovasi il diametro del circulo, che contiene uno de gli ottangoli, che come si è mostrato sarà *R* [64 p. *R* 2048]; et il quadrato del mezzo di detto diametro che è 16 più *R* 128, et questo si cava dal quadrato di mezzo il diametro della sfera, che è 28 più *R* 128 resta 12, che 'l suo creatore è *R* 12, et tanto è l'asse della piramide che ha per base uno de li ottangoli et la sua altezza è sino al centro della sfera, che moltiplicato il terzo de l'asse via la superficie di detti ottangoli, fa $R\,1365\frac{1}{3}$ più $R\,2730\frac{2}{3}$, che moltiplicato via 6, fa *R* 98304 più *R* 49152; et la superficie di una delle base de triangoli è *R* 48; il diametro del circulo che 'l contiene è $R\,21\frac{1}{3}$, che tratto il quadrato del

mezzo di detto diametro, che è $5\frac{1}{3}$, di 28 più R 128, quadrato del mezzo del diametro della sfera, resta $22\frac{2}{3}$ più R 128, et $R\left[22\frac{2}{3}\text{ più } R\,128\right]$ è l'asse delle piramide triangolare, che pigliatone il terzo, et moltiplicato la sua base, che è R 48, fa $R\left[218\frac{2}{3}\text{ p. } R\,3640\frac{8}{9}\right]$, et tanto è una delle piramide triangolare, che moltiplicato per 8, fa $R\left[17994\frac{2}{3}\text{ p. } R\,14913080\frac{8}{9}\right]$, che aggiunto con la quadratura de l'altre sei, fa R 49152 più R 98304 più $R\left[13994\frac{2}{3}\text{ p. } R\,14913080\frac{8}{9}\right]$, et tanto è la quadratura di tutto il corpo come fu addimandato.

Qui finisce il manoscritto senza alcuna indicazione che accenni al termine dell'opera. Non si può sapere se a queste facessero seguito altre carte, andate perdute, nè se il BOMBELLI *avesse, con analogo procedimento, trattato dei rimanenti poliedri Archimedei.*

INDICE

PREFAZIONE . . . . . Pag. 1

Analisi dell'" Algebra „ di Rafael Bombelli . . . . . » 25

L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica di Rafael Bombelli, libro terzo. » 47

Introduzione . . . . . » 49

L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica di Rafael Bombelli, libro quarto » 53

Cap. I. Algebra linearia . . . . . » 55

Cap. II. Rappresentazione geometrica degli irrazionali . . . . » 125

Cap. III. Costruzione geometrica di problemi algebrici . . . . » 149

L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica di Rafael Bombelli, libro quinto » 237

Cap. I. Problemi di geometria piana . . . . . » 239

Cap. II. Poliedri regolari e semiregolari . . . . . » 279