

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

COLLABORATEURS

Section de l'Ingénieur

MM.	MM.	MM.
Alain-Abadie.	Gassaud.	Michel-Lévy.
Alheilig.	Gastine.	Minel (P.).
Ariès (Comm ^t).	Gautier (Henri).	Minet (Ad.).
Armengaud jeune.	Godard.	Miron.
Arnaud.	Gossot (Comm ^t).	Moëssard (C ^t).
Barillot.	Gouilly.	Moissan.
Bassot (C ^t).	Grouvelle (Jules).	Moissenet.
Baume-Pluvinel (de la)	Guenez.	Monnier.
Bérard (A.).	Guye (C. Eug.).	Moreau (Aug.).
Bergeron (J.).	Guye (Ph.-A.).	Müller (Ph. T.).
Berthelot.	Guillaume (Ch.-Ed.).	Niewenglowski (G. H.).
Ber ⁿ .	Guyou (Comm ^t).	Naudin (Laurent).
Bertrand (L.)	Haller (A.).	Ocagne (d').
Biglia.	Hatt.	Ouvrard.
Billy (Ed. de).	Hébert.	Paloque.
Bloch (Fr.).	Hennebert (C ^t).	Périsse (L.).
Blondel.	Henriet.	Perrin.
Boire (Em.).	Hérisson.	Perrotin.
Bordet.	Hospitalier (E.).	Picou (R.-V.).
Bornecque.	Hubert (H.).	Poulet (J.).
Boucheron (H.).	Hutin.	Prud'homme.
Bourlet.	Jacométy.	Rateau.
Boursault (H.)	Jacquet (Louis).	Resal (J.).
Boussac (A.)	Jaubert.	Ricaud.
Candlot.	Jean (Ferdinand).	Rocques (X.).
Caspari.	Launay (de).	Rocques-Desvallées.
Charpy (G.).	Laurent (H.).	Rouché.
Clugnet.	Laurent (P.).	Sarrau.
Croneau.	Laurent (Th.).	Sartiaux (E.).
Damour.	Lavergne (Gérard).	Sauvage.
Dariès.	Léauté (H.).	Seguela.
Defforges (L ^t -Col.).	Le Chatelier (H.).	Seyrig (T.).
Delafond.	Lecornu.	Sidersky.
Drzewiecki.	Lecomte.	Simart.
Dudebout.	Lefèvre (J.).	Sinigaglia.
Dufour (A.).	Leloutre.	Sorel (E.).
Dumont (G.).	Lenicque.	Trillat.
Duquesnay.	Le Verrier.	Urbain.
Durin.	Lindet (L.).	Vallier (Comm ^t).
Dwelshauvers-Dery.	Lippmann (G.).	Vermand.
Fabre (Ch.).	Loppé.	Viaris (de).
Fabry.	Lumière (A.).	Vigneron.
Foex.	Lumière (L.).	Vivet (L.).
Fourment.	Madamet (A.).	Wallon (E.).
Fribourg (C ^t).	Magnier de la So st .	Widmann.
Frouin.	Marchena (de).	Witz (Aimé).
Gages (C ^t).	Margerie.	
Garnier.	Meyer (Ernest).	

ENCYCLOPÉDIE- SCIENTIFIQUE

DES

AIDE-MÉMOIRE

PUBLIÉE

SOUS LA DIRECTION DE M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

*Ce volume est une publication de l'Encyclopédie
scientifique des Aide-Mémoire ; L. Isler, Secrétaire
général, 20, boulevard de Courcelles, Paris.*

N° 223 A.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

DE M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

STATIQUE GRAPHIQUE

DES

SYSTÈMES TRIANGULÉS

EXPOSÉS THÉORIQUES

PAR

T. SEYRIG

Ingénieur-Constructeur

PARIS

GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Quai des Grands-Augustins, 55

MASSON et C^{ie}, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
Boulevard Saint-Germain, 120

(Tous droits réservés)

*OUVRAGES DE L'AUTEUR PARUS
DANS LA COLLECTION DE L'ENCYCLOPÉDIE*

- I. — Statique graphique des systèmes triangulés. Exposés théoriques.**
- II. — Statique graphique des systèmes triangulés. Exemples d'applications.**

PREFACE

Ce volume de l'*Encyclopédie* que nous offrons au lecteur n'a pas la prétention d'être un traité complet de statique graphique. Née presque d'hier, cette science s'est imposée par des qualités nombreuses, et a pris sa place à côté de l'analyse dans les applications à la mécanique. Elle s'enseigne parallèlement et la solution de peu de problèmes lui est restée interdite.

Il n'a pas été possible de donner ici ce corps de doctrine au complet. Nous renvoyons à la bibliographie, fort écourtée aussi d'ailleurs ⁽¹⁾, pour voir qu'il faudrait pour cela bon nombre de volumes. Nous avons dû nous limiter, et n'examiner qu'une portion restreinte du champ des applications. Il était naturel que nous nous attachions à la branche la plus importante où

(1) Cette Bibliographie est placée à la fin du second volume.

531.2

P 201

68446

27134

la statique trouve son emploi : celle des constructions triangulées métalliques ou en bois. Nous avons négligé même la poussée des terres et la stabilité des murs et des voûtes, qui s'étudient pourtant si facilement à l'aide des procédés graphiques. Cela aurait entraîné trop loin.

Nous avons limité à dessein nos explications aux systèmes statiquement déterminés, et cela, non pas uniquement par manque de place. Nous avons évité de parler de tout système où les considérations de l'élasticité, de la flexion élastique, doivent intervenir pour le calcul des efforts intérieurs. Ces systèmes-là peuvent sans doute s'étudier à l'aide de la statique graphique, mais il faut faire usage de considérations et de théories analytiques. Or, pour nous, le grand, le principal mérite de cette science, c'est sa simplicité, son application directe, visible en quelque sorte, à la construction. Dès qu'elle n'est plus que l'interprétation d'une formule, elle dévie de son but. Nous préférerions, si cela se pouvait encore, qu'on lui donnât le nom de *statique géométrique*, plutôt que *graphique*. On comprendra maintenant pourquoi nous n'avons parlé ni de la poutre continue, ni de l'arc.

On comprendra de même pourquoi nous avons

eu recours, pour l'examen des déformations, à un procédé à peu près ignoré en France. Il en a été de lui comme de bien d'autres choses : inventé ici, il n'a jamais, à notre connaissance, été enseigné. Il était trop simple sans doute. Or, ce procédé fait aujourd'hui partie de l'enseignement de plusieurs professeurs les plus éminents à l'étranger, qui le placent au même rang, sinon avant les procédés qui se servent de la fibre élastique et d'autres plus savants encore.

Au moment où de récents règlements de l'État sur le calcul et les épreuves des ponts métalliques attribuent une importance plus grande que jamais à la déformation, nous avons cru bien faire en montrant tout ce qu'on peut tirer de ces considérations et de ces tracés si simples et si directs.

CHAPITRE PREMIER

STATIQUE GRAPHIQUE

1. Généralités. — La statique a pour objet l'étude de l'équilibre des forces agissant soit sur un élément matériel, soit sur des corps définis. Ces corps peuvent être au repos ou en mouvement, mais le mouvement considéré comme conséquence de l'effet des forces, reste en dehors de l'étude de la statique.

La principale application de la statique est la théorie de la résistance des matériaux. C'est celle à laquelle nous nous attacherons ici, au point de vue de la détermination des efforts intérieurs qui se produisent dans les constructions.

Les effets que produisent sur un corps des forces variées sont de deux sortes : les uns sont indépendants de la déformation que subira le corps sous leur action, les autres sont, au contraire, des conséquences directes de la manière

dont ces déformations se produisent. Elles exigent l'emploi de la théorie de l'élasticité de matière.

Dans le présent volume, nous ne parlerons pas de l'élasticité, en tant qu'elle produit des différences dans les efforts intérieurs des corps, mais seulement des effets directs des forces, au point de vue de la statique pure.

La statique a été longtemps étudiée au point de vue analytique, c'est-à-dire à l'aide de calculs et de formules. Son point de départ est cependant essentiellement géométrique. Tous ses problèmes peuvent se résoudre à l'aide de la règle et du compas, tant que l'élasticité n'entre pas en considération.

Aussi éviterons-nous, dans ce qui suit, autant que possible, tout calcul algébrique, et, n'employant que des tracés, nous montrerons que cette partie, tout au moins, mériterait le nom de statique géométrique, plutôt que celui habituellement employé, de statique graphique.

Cette étude suppose naturellement connus les principes élémentaires de mécanique, c'est-à-dire ceux de la composition et de la décomposition des forces, les définitions et généralités sur les centres de gravité, ainsi que la théorie des moments.

Nos explications se rapporteront exclusivement à des forces situées dans un même plan.

2. Représentation graphique des forces.

— Une force est représentée en position, en grandeur et en direction, par une ligne droite tracée sur le plan de représentation. Cela suppose qu'elle agit dans ce plan ou dans un plan parallèle.

Si la force se trouve hors du plan considéré, dans une direction oblique par rapport à lui, il faut avoir recours à plusieurs projections sur des plans divers. Dans ce cas, les procédés de la géométrie descriptive sont, en général, applicables, la force, comme la ligne qui en est la représentation, se trouvant déterminée par deux projections rectangulaires.

La définition d'une force représentée par une droite est complète à l'aide des conventions suivantes :

1° La longueur de la droite représente, à une échelle définie, la valeur de la force. Si le dessin est à l'échelle de 5 millimètres par tonne, une droite de 27 millimètres représentera une force de $\frac{27}{5} = 5^r,4$.

2° Le sens de la force est indiqué, soit par une flèche appliquée sur la ligne représentative,

soit par l'ordre dans lequel les lettres qui en marquent les extrémités sont énoncées.

Ainsi, *fig. 1* (pl. I), on trouvera représentée une force de 4^r , agissant de A vers B, et *fig. 2* (pl. I), une même force de 4^r agissant dans le sens de B vers A.

Dès maintenant, nous pouvons dire que le sens des forces est souvent interprété avec difficulté, quand il s'agit d'éléments de construction. Chaque pièce fixée, par exemple, à ses deux extrémités, reçoit de ces extrémités des forces égales et de sens contraire. A chacune de ses attaches, elle recevra un effort agissant sur elle dans un certain sens, sa réaction sur cette attache est égale et de sens contraire. Dans les tracés géométriques, les forces sont représentées par une ligne unique qui a par conséquent tantôt un sens, tantôt un autre, suivant qu'il s'agit d'action ou de réaction.

3. Conseils pratiques sur le tracé des épures. — L'enseignement de la statique graphique reste souvent sur le terrain trop purement théorique ; nous donnons ici un petit nombre de conseils sur la bonne exécution des épures, dont le tracé est, en somme, le but final de cette science.

Les tracés doivent se faire sur du papier fort,

aussi lisse et exempt de grain que possible. Il est bon, mais non indispensable, de le tendre, mais il faut éviter qu'il soit déformé par des bosses.

Il faut employer des crayons durs, taillés très fins, et tracer légèrement, pour pouvoir effacer et rectifier.

Éviter toute empreinte sur le papier, soit celle du crayon, soit surtout celle des pointes de compas.

Les lignes ne doivent pas avoir leurs extrémités définies en appuyant fortement la pointe du crayon, mais par un petit trait transversal.

Quand plusieurs lignes concourent au même point, leur croisement doit être unique, et il faut vérifier à chaque nouvelle ligne ajoutée, qu'elle répond à cette exigence.

Employer pour les tracés, exclusivement, une paire de bonnes équerres. Jamais le T des planches à dessin n'offrira l'exactitude voulue pour des lignes parallèles.

Éviter les tracés par lignes de peu de longueur, et rechercher ceux qui donnent des vérifications multiples, faites sur des lignes d'une aussi grande longueur que possible.

Quand il s'agira d'efforts qui se produisent dans les barres qui forment une construction,

on trouvera souvent avantage à différencier celles qui sont en tension et celles qui sont en compression. Il faut rejeter l'indication qui consiste à marquer par un double trait les barres comprimées. Il est de beaucoup préférable d'employer des encres de couleur bleue et rouge, pour ces différents genres d'efforts, réservant le noir pour les lignes d'épure proprement dites.

4. Composition de deux forces. — Deux forces non parallèles, mais concourant en un même point sont données. On peut toujours les remplacer dans leurs effets sur ce point par une résultante unique fournie par un tracé simple. Il suffit de porter, à partir du point d'application A (*fig. 3, pl. I*), une longueur AB, égale à l'une des forces F_1 , dans la direction de celle-ci ; à partir de l'extrémité B, une autre force BC égale et parallèle à F_2 . La ligne qui joint le point de départ A au point d'arrivée C, donnera en grandeur et en direction la résultante $AC = F_3$.

Le triangle ABC est ce qu'on appelle le *triangle des forces*.

On voit sans peine, et sans qu'il soit besoin de démonstration, que l'on aurait pu intervertir l'ordre du tracé et porter d'abord en AB_1 la force F_2 , puis en B_1C la force F_1 , pour aboutir au même point C et obtenir conséquemment la

même résultante AC. Le double tracé ABC, AB₁C constitue le *parallélogramme des forces*. Le théorème qui porte ce nom est fondamental pour toute la mécanique et en particulier pour la statique graphique. La plupart du temps cependant son emploi se réduit à celui du triangle des forces, dont nous ferons un usage à peu près exclusif.

Si, au point d'application réel des forces F_1 et F_2 , on ajoutait une troisième force R, qui fût égale et de sens contraire à la résultante des deux premières, il y aurait équilibre statique en ce point. En considérant le triangle ABC, on voit tout de suite que cette troisième force R est précisément celle représentée par AC, mais prise en sens contraire de la résultante obtenue. Les tracés que l'on ferait pour composer isolément les deux forces F_1 et F_2 , ou bien F_1 et R, ou enfin F_2 et R, seraient tous identiques et reproduiraient le triangle ABC. Le triangle ABC est donc, en somme, le tracé par lequel on composerait les trois forces qui se font équilibre, à condition toutefois que les côtés en soient mis bout à bout en suivant un même sens de parcours.

Le même raisonnement, le même tracé auraient été applicables si l'une des deux forces F_1 ou F_2 avait à son tour joué le rôle de résul-

tanté des deux autres, et l'on peut dire que : Si un triangle est formé de forces ajoutées bout à bout, dans le même sens, l'une quelconque d'elles peut être considérée comme la résultante des deux autres, à condition que son sens soit retourné. Quand le sens des trois forces est tel qu'il ramène au point de départ, elles sont en équilibre.

La décomposition d'une résultante F_3 en deux autres, dont la direction seule est donnée, découle directement de ce qui précède, et se fera par le tracé des deux côtés F_1 et F_2 du triangle.

5. Composition d'un nombre quelconque de forces. — Soient à composer (*fig. 4, pl. I*) les forces F_1 , F_2 , F_3 et F_4 , agissant toutes au même point A. Nous pouvons appliquer aux deux premières le procédé employé ci-dessus, et les composer en traçant $AB = F_1$, puis à partir de B, la droite $BC = F_2$: La ligne AC sera la résultante des deux forces F_1 et F_2 . Mais il n'est pas besoin de tracer la ligne AC, on continuera à porter CD en grandeur, direction et sens, égale à F_3 et de même DE égale, parallèle et de même sens à F_4 . On obtiendra le point E lequel, joint à A, donnera la ligne AE pour résultante des quatre forces.

On se rendra compte, par un raisonnement

analogue au précédent, que si AE représentait une force R égale et de sens contraire à la résultante, son effet, ajouté à celui des quatre forces d'abord considérées, serait de produire l'équilibre en A.

Le tracé ABCDE s'appelle le *polygone des forces*.

On dira à propos de ce polygone ce qui a été dit au sujet du triangle des forces : Si un polygone fermé est constitué par des forces de telle façon que leur sens permette de le parcourir en entier sans interruption, ces forces sont en équilibre. Si l'une d'elles interrompt ce parcours, se trouvant disposée en sens contraire, elle est la résultante de toutes les autres.

La simple inspection du tracé permet aussi de se rendre compte que l'ordre dans lequel on dispose les forces dans le polygone ne change rien au résultat. La *fig. 5* (pl. I) donne une composition des mêmes forces dans un ordre différent, la résultante AE étant la même que dans la *fig. 4*.

6. Décomposition d'une force en plusieurs autres. — Nous avons indiqué, à propos du triangle des forces, que l'on pouvait toujours décomposer une force en deux autres, à condition que leur direction soit connue.

On peut de même décomposer une résultante quelconque, mais il ne suffit pas de connaître la direction des composantes cherchées. Il faut connaître aussi la grandeur de toutes celles qui dépassent le nombre de deux inconnues. Les épures de la statique graphique reproduisent fréquemment ce problème : décomposer une résultante R en trois forces dont les directions sont connues, l'une d'elles l'étant aussi en grandeur. La *fig.* 6 (pl. I) montre une décomposition semblable de la résultante R en trois forces, dont l'une F_1 , connue de grandeur aussi bien que de direction, et F_2 et F_3 dont la direction seule est connue au préalable.

7. Lemme sur la similitude. — Nous nous servirons plusieurs fois d'une propriété de figures qui n'est pas toujours démontrée en géométrie élémentaire. Nous la donnons ici pour n'y pas revenir.

Si quatre points d'un plan sont réunis deux à deux par les six droites qu'on peut ainsi tracer, on pourra toujours construire une autre figure elle qu'à chacun des côtés de la première correspondra un côté parallèle (ou perpendiculaire) de la seconde.

Considérons (*fig.* 7, pl. I) les quatre points A, B, C, D , réunis comme il vient d'être dit. Sur le milieu de chacun des côtés AB, BC , etc., élevons

une perpendiculaire. Ces perpendiculaires se couperont en quatre autres points, trois à trois. On sait, en effet, que les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point, et la figure dont nous nous occupons est formée de quatre triangles ABC , ABD , BCD , CAD . Les points a , b , c , d , déterminés comme nous venons de le dire, sont les centres des cercles circonscrits aux quatre premiers triangles, et la figure formée est celle qui est définie dans l'énoncé. On appelle ces deux figures réciproques l'une de l'autre.

La figure $abcd$ peut tourner tout entière d'un angle droit : ses côtés seront alors parallèles à ceux de $ABCD$, mais la réciprocité subsistera toujours.

On remarquera que, dans la nouvelle figure, chaque sommet correspond à un triangle de la première, et chaque triangle correspond à un des sommets de la première, en quoi consiste la réciprocité.

Le point D , placé à l'intérieur du triangle ABC dans la *fig. 7* (pl. I) peut être placé également en dehors, comme dans la *fig. 8* (pl. I), sans pour cela rien changer à ce qui vient d'être dit. Seulement la figure affecte alors la forme d'un quadrilatère avec ses deux diagonales. C'est sous

cette forme qu'elle se présentera le plus souvent dans les applications.

Si des six lignes possibles pour joindre quatre points d'un plan, cinq seulement sont tracées, la sixième n'en est pas moins déterminée. Si donc une figure formée de six lignes joignant quatre points, et une autre figure comprenant cinq lignes joignant aussi quatre points, ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires deux à deux, on sera certain que le sixième côté de la seconde figure est aussi parallèle ou perpendiculaire au sixième côté de la première figure.

8. Forces appliquées en des points différents. — Considérons d'abord deux forces, appliquées à un même corps, mais en des points différents. Soient F_1 et F_2 (*fig. 9, pl. I*) ces deux forces. Leur point de concours tombe, par exemple, en dehors du papier, en sorte que le tracé précédemment indiqué pour les composer n'est pas applicable. Nous aurons recours à deux forces auxiliaires que nous supposons agissantes dans la ligne *ab* arbitrairement choisie, mais d'une façon que nous indiquerons plus loin. Si nous supposons que ces deux forces soient égales et de sens contraire, nous n'avons rien changé à l'équilibre du système, mais nous

pourrons combiner l'une d'elles avec F_1 et l'autre avec F_2 , obtenant ainsi deux résultantes qui remplaceront dans leurs effets les forces F_1 et F_2 .

Représentons séparément F_1 dans la *fig. 9 a* (pl. I). Traçons en BO la force auxiliaire qui agit dans la direction *b. a.* La droite AO représentera alors la résultante de F_1 et de (*ba*). Traçons de même en BC une force égale, parallèle et de même sens à F_2 : la force auxiliaire OB se trouvera toute disposée pour être composée avec elle, et en se rappelant que celle-ci est de sens opposé à la première, on verra que OC représente leur résultante. En sommes nous avons quatre forces, disposées en polygone, AB, BO, OB, BC, auxquelles nous avons le droit de substituer deux autres, AO et OC. La résultante de l'un et l'autre groupe est la même, c'est AC, en grandeur et en direction.

Mais sa position n'est point encore déterminée : elle le sera en remarquant que nous pouvons tracer par *a* et *b* deux droites parallèles à OA et à OC, qui se couperont en *c*. Ayant remplacé F_1 et *ba* par leur résultante, et F_2 et *ab* par la leur, et la position de ces résultantes étant connue, leur résultante collective passera évidemment par le point de rencontre *c*, et sa valeur sera AC.

Le tracé ainsi opéré est celui d'un *polygone* dit *funiculaire mabn* qui dépend du polygone des forces ABC. Le point O s'appelle pôle, et les droites OA OB OC les rayons.

Il est aisé de démontrer que la résultante ainsi déterminée par le point *c* est la même que celle qui aurait été obtenue si l'on avait simplement prolongé F_1 et F_2 jusqu'à leur rencontre en *d*. Déterminons séparément les points *c* et *d* et joignons-les. On aura ainsi complété un quadrilatère complet de six lignes *abcd*. Ce quadrilatère aura, par construction, cinq de ses côtés parallèles à ceux du quadrilatère complet ABCO. Dans ce cas, le sixième côté est également parallèle dans les deux figures, *cd* est donc parallèle à la résultante AC, et, par conséquent, on peut la déterminer indifféremment par le point *c* ou le point *d*.

Nous allons étendre à un nombre quelconque de forces ce que nous venons de dire de deux seulement.

Soient (*fig. 10, pl. I*) F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , autant de forces dont les points d'application sont distincts. Pour les composer, réunissons-les en polygone des forces ABCDEF (*fig. 10 a*). Choisissons un pôle O, et traçons tous les rayons OA... OF. Le raisonnement qui précède s'appliquera aux

deux premières forces, à la résultante de celle-ci et à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, où l'on trouvera en AF la valeur de la résultante générale, et en C , intersection du premier et du dernier côté du polygone funiculaire, un point de sa position.

On comprend qu'il doit être indifférent dans quel ordre on dispose les forces dans le polygone (*fig. 10 a*, pl. I) mais il est bon de le prouver. Il suffira pour cela de montrer qu'on peut intervertir l'ordre de deux quelconques des forces d'un tracé semblable.

Supposons que, dans le polygone des forces, nous intervertissions l'ordre de F_2 et F_3 . Ce polygone deviendra $ABC'DEF$. Le funiculaire ne sera plus $abcd\dots$, mais $ab'c'd\dots$. Il faut faire voir que les côtés cd ou $c'd$ sont identiques dans les deux cas. Pour cela, considérons les quatre points b, c, b', c' . Les lignes qui les réunissent, et dont nous exceptons pour le moment $c'e$, sont toutes parallèles deux à deux à celles qui joignent les points B, C', D et O . La sixième ligne $c'e$ est donc, elle aussi, parallèle à la sixième ligne DO , et elle passe par le point c . Or, ce point est celui qui a été déterminé dans le premier tracé, qui emploie le point C ; $c'e$ est donc la même droite que cd et se confond avec elle.

9. Composition des forces parallèles. —

Les tracés qui précèdent sont particulièrement intéressants quand il s'agit de la composition de forces parallèles et fournissent les méthodes les plus simples pour la détermination des résultantes.

Soient F_1, F_2, F_3 , les lignes d'action de trois forces parallèles (*fig.* 11, pl. II). Nous les groupons (*fig.* 11 a) en polygone des forces, qui est une même ligne droite segmentée. Choisisant un pôle O, nous traçons les rayons, puis, en commençant par *ma* parallèle à OA, les côtés du polygone funiculaire parallèles à ces rayons, et nous trouvons au point C, rencontre des côtés extrêmes, un point de passage de la résultante. Celle-ci est nécessairement parallèle aux forces et égale à leur somme.

Si les sens des forces varient, le tracé est le même, le polygone des forces permettant la libre disposition dans un sens comme dans l'autre des éléments qui le constituent. Dans les *fig.* 12 et 12 a (pl. II) les lettres permettent de suivre un tracé semblable au précédent.

10. Décomposition d'une résultante en forces parallèles. —

De même que pour les forces concourantes, une résultante de forces parallèles, ne peut être décomposée d'une ma-

nière délinie qu'en deux autres, si la position de celles-ci est donnée. Soit R (*fig.* 13, pl. II), une résultante obtenue en composant un nombre quelconque n de forces parallèles. On veut la décomposer en deux autres Q_1 et Q_2 .

Traçons, en partant de a , deux droites am, an , que nous pouvons considérer comme appartenant à un polygone funiculaire. Nous le fermons par le troisième côté bc . Si, dans la *fig.* 13 a , nous prenons R égal à la résultante à décomposer, nous pouvons y tracer le polygone des forces qui correspondra au funiculaire que nous venons d'établir. AO étant mené parallèle à am , puis CO à an , nous aurons le pôle O . Nous y ferons OB parallèle à bc , et les segments AB, BC seront les composantes cherchées. On voit, en effet, que le tracé inverse, partant des forces AB, BC ne peut conduire qu'à la seule résultante R .

Cette épure se reproduit sans cesse dans le calcul des poutres droites.

11. Centres de gravité. — Un des emplois les plus fréquents de la composition des forces parallèles est son application à la recherche des centres de gravité. Pour déterminer ce point d'une surface quelconque, on suppose, en effet, que chacun de ses éléments possède un poids

propre, proportionnel à sa surface, Il suffit donc de partager la surface considérée en un certain nombre de portions dont l'évaluation est facile aussi bien que la détermination de leur centre de gravité particulier. Appliquant en chacun de ces points une force parallèle à une même direction quelconque, et évaluée par sa surface, on obtiendra, en les composant graphiquement, la position de leur résultante. Opérant ainsi pour une deuxième direction, on obtiendra une deuxième position de la résultante et le centre de gravité se trouvera à l'intersection de ces deux lignes.

La *fig. 14* (pl. III) représente la section d'un fer spécial, que nous choisissons non symétrique par rapport à aucun axe, pour considérer le cas le plus général. Nous négligeons aussi les petites surfaces accessoires des congés, dont il serait aisé de tenir compte dans une épure grandeur d'exécution. Nous la supposons réduite à 3 portions :

$$1 = 40 \times 30 = 1\ 200\text{mm}^2$$

$$2 = 190 \times 10 = 1\ 900$$

$$3 = 70 \times 10 = 700$$

Nous traçons un premier polygone des forces (*fig. 14 a*, pl. III) avec un pôle O_1 et le funiculaire correspondant. Les deux côtés extrêmes mn et pq

se coupent en R_1 par où passe la première résultante parallèle aux forces de la *fig. 14 a*. Nous répétons la même opération par la *fig. 14 b*, et nous trouvons une deuxième résultante R_2 . L'intersection G de R_1 et R_2 est le centre de gravité cherché.

On simplifiera cette opération en ne traçant qu'un seul polygone des forces, mais en supposant tracé le second, auquel on aurait donné une position tournée à l'angle droit avec le premier. Celui que donne la *fig. 14 b* est ainsi placé, et étant identique à la *fig. 14 a*, on voit que toutes ses lignes homologues sont perpendiculaires aux premières. En dessinant à l'aide d'une équerre à 90° , on pourra donc tracer tout d'abord les deux séries des forces à angle droit, puis les funiculaires, en menant à chaque fois la parallèle à un rayon de O_1 et sa perpendiculaire. On arrivera ainsi au but avec une grande rapidité et plus de précision que si l'on choisissait des directions arbitraires pour les forces.

On pourrait également se servir de deux directions quelconques autres que 90° , mais il y a toujours avantage à choisir des lignes se coupant aussi près de la normale que possible.

Quand la surface dont on s'occupe présente

un axe de symétrie, un seul polygone est nécessaire. On le choisira de préférence ayant ses forces perpendiculaires à l'axe de symétrie.

On peut procéder absolument de même pour la recherche du centre de gravité d'une ligne brisée. On appliquera au milieu de chaque élément linéaire une force proportionnelle à sa longueur, et on opérera par un tracé semblable au précédent.

12. Quelques propriétés particulières des polygones funiculaires. — Considérons un groupe de forces F_1, F_2, F_3 (*fig.* 15, pl. III), que nous pourrions étendre autant que nous le voudrions. Disposons-les en polygone des forces. Prenons deux pôles O et O_1 (*fig.* 15 *a*) et traçons les deux funiculaires correspondants, qui seront $ABCD, AB_1C_1D_1$. Prolongeons les côtés correspondants de ces funiculaires tels que AB, AB_1, BC, B_1C_1 , jusqu'à leurs rencontres deux à deux. Ces points de rencontre seront situés sur une même droite.

En effet, considérons d'abord la ligne Ab (*fig.* 15) qui joint les deux premiers de ces points. Elle fait partie d'un quadrilatère complet ABB_1b , dans lequel cinq des côtés sont, par construction, parallèles à cinq des côtés du quadrilatère $OO_1B'A'$. Le sixième côté devra

donc être également parallèle, et c'est le côté Ab qui devra ainsi être parallèle à OO_1 . Il en est de même des deux quadrilatères bCC_1c et $B'OO_1C'$, dans lesquels les sixièmes côtés OO_1 et bc doivent être parallèles, bc est donc dans le prolongement de Ab , et successivement tous les points A, b, c, d, \dots , seront en ligne droite.

Il est donc prouvé que, si à l'aide d'un même groupe de forces, on construit deux polygones funiculaires, les points de croisement des côtés correspondants sont situés sur une même droite, parallèle à la ligne qui joint les deux pôles.

On peut construire autant de ces funiculaires qu'on voudra. S'ils ont un point commun tel que A , et que les pôles O soient tous situés sur la droite OO_1 , leurs côtés se rencontreront toujours aux mêmes points sur la droite Ad .

Si un premier funiculaire coupe une seconde fois la droite Ad , il est clair que tous les autres le couperont au même point.

13. Applications des propriétés des polygones funiculaires qui précèdent. — On peut avoir besoin de faire passer par deux points donnés M et N le funiculaire d'une force ou d'un groupe de forces, la distance polaire h étant donnée.

S'il s'agit d'une force unique F (*fig. 16* et

16 *a*, pl. III), on tracera, à l'aide d'un pôle O quelconque, un polygone d'essai. On fera passer le premier côté par l'un des points donnés M , le second ne passera, en général, pas par N . Mais on remarquera qu'en déplaçant le pôle O le long d'une parallèle à F , on conservera la distance polaire donnée h , et on formera à volonté un groupe de funiculaires passant par M et dont les seconds côtés se couperont sur une droite parallèle à OO_1 en un même point α . La droite qui joindra αN sera donc le second côté cherché, et il suffira de joindre A , son point de rencontre avec F (*fig.* 16 *a*), à M pour avoir le premier côté. Le pôle O_1 , qu'il n'est même pas nécessaire de déterminer cette fois, est celui qui correspond au funiculaire MAN .

S'il s'agit d'un groupe de forces, on distinguera deux cas. Ou bien les points donnés sont situés en dehors de ce groupe, ou bien l'un d'eux, ou tous deux seront placés entre les différentes forces du groupe.

Si les points sont situés en dehors du groupe, on agira à l'aide de leur résultante, comme il vient d'être dit pour une force unique. En effet, les côtés extrêmes d'un polygone funiculaire, tracé à l'aide d'un même pôle et passant par un même point, ne peuvent pas varier, qu'il s'agisse

de plusieurs forces isolées ou de leur résultante. Celle-ci est, en effet, déterminée par les deux côtés extrêmes en question.

Si les points par où l'on veut faire passer le funiculaire sont situés entre les forces du groupe considéré, on agira comme il vient d'être dit, en ne considérant que les seules forces comprises entre les deux points : il est évident que le tracé, dans la partie située au-delà de l'un ou l'autre des points, peut être quelconque, et résulter simplement de la condition de passage par les points donnés.

Si la distance polaire n'était pas donnée, on tracerait évidemment autant de polygones funiculaires qu'on voudrait : à chaque paire de côtés passant par M, N, et se rencontrant au même point de la ligne F, correspondrait toujours un pôle O, obtenu en menant par A et B des parallèles aux côtés en question.

On peut de même *faire passer par trois points donnés le funiculaire correspondant à une ou plusieurs forces*. Dans ce cas, la condition de distance du pôle doit disparaître, c'est sa détermination qui constitue la solution du problème.

Soient (*fig.* 17, pl. III) deux forces parallèles ou non F_1 et F_2 . On veut faire passer par P, Q, R,

un funiculaire correspondant. Disposons-les en polygone des forces, et traçons un premier côté du funiculaire quelconque Pa_1 , puis joignons a_1Q . Ces deux côtés auront pour correspondants les rayons d'un polygone des forces tracés parallèlement par A et B, ce qui donne le pôle O_1 . Le troisième côté du funiculaire, tracé à l'aide de ce pôle, ne passera probablement pas par R.

Remarquons que quand on aura fait varier la position des côtés Pa_1 et a_1Q , ils devront toujours continuer à passer par P et Q. Ces points seront donc les points de rencontre des côtés de même rang des polygones funiculaires consécutifs qu'on pourrait tracer avec différents pôles, à condition que la ligne passant par ces pôles soit parallèle à PQ. Le nouveau pôle cherché sera donc sur cette parallèle O_1O_3 .

On pourra procéder de même en partant de R, traçant Rb_1 et b_1Q , puis leurs parallèles en BO_2 , CO_2 . Les pôles possibles des funiculaires passant par Q et R seront sur la ligne O_2O_3 parallèle à QR. Il s'ensuit que le pôle cherché sera O_3 , à l'intersection de O_1O_3 et O_2O_3 .

Le même procédé résout le problème quand les forces ne sont pas parallèles.

Un tracé un peu plus simple est le suivant :
Au lieu de tracer arbitrairement les premiers

côtés des funiculaires, prenons d'abord la droite PQ jusqu'à sa rencontre avec F_2 en b (*fig.* 18, pl. IV), puis la droite bR , pour déterminer le premier pôle O_1 . De même, la droite RQ jusqu'en a , et aP pour fixer le second pôle O_2 . Ces pôles devront se déplacer, le premier suivant la parallèle à QR, le second suivant la parallèle à Pb , pour se couper en O_3 qui est le pôle cherché.

S'il s'agit d'un groupe de forces, on reconnaît sans peine que la règle donnée plus haut pour une seule force et deux points a son analogue ici. Toutes les forces passant entre deux des points considérés peuvent être réunies en leur résultante. Les côtés extrêmes des polygones funiculaires, tracés sur les forces elles-mêmes, seront les mêmes que ceux tracés à l'aide de leur seule résultante. On pourra donc les faire passer par les points donnés en agissant sur ces résultantes.

Les forces placées en dehors des points donnés ne doivent pas être comprises dans la formation des résultantes sur lesquelles on opère. Si elles font partie du groupe dont le funiculaire est à étudier, il faut, une fois le pôle trouvé, continuer son tracé dans la portion relative à ces forces, au-delà des points extrêmes tels que P et R.

14. Cas particulier où le pôle est situé à l'origine du polygone des forces. — Tout ce qui a été dit jusqu'à présent sur l'emploi d'un pôle dans le tracé des polygones funiculaires était indépendant du choix de la position du pôle. De cette indépendance dans son choix résultent des facilités spéciales et la possibilité de donner aux épures des dispositions convenables et commodes.

Quand on choisit l'extrémité de la première des lignes représentatives des forces pour origine, les polygones se simplifient. On voit tout de suite que la série des rayons polaires est la série des résultantes successives de toutes les forces formant le polygone. Le funiculaire, tracé à l'aide de ces rayons, a ses côtés successifs parallèles à ces résultantes. Nous avons considéré plus haut (§ 8) les côtés de ce funiculaire comme étant les lignes d'action de forces auxiliaires représentées par les rayons du polygone des forces : ici ces forces auxiliaires seront les résultantes elles-mêmes. Ce sera donc un *polygone des résultantes* qui prend dans certains cas, le nom de *polygone des pressions*, et qui passe à la *courbe des pressions*, si les forces concentrées deviennent des forces réparties.

Très souvent les forces considérées ont des

directions trop rapprochées les unes des autres pour que le tracé du polygone des résultantes soit aisé à faire avec précision. Quand les forces sont parallèles il disparaît, et le tracé d'un polygone funiculaire deviendrait impossible. Aussi se sert-on presque toujours d'un pôle pris en dehors des forces. Il convient de le choisir dans une position telle que la direction des rayons soit nettement définie.

15. Cas particulier de forces de valeur égale et de sens opposé. Couples. — Considérons un ensemble de forces parallèles, que nous supposerons au nombre de trois, et dont l'une serait égale à la somme des deux autres. Elle pourrait être elle-même, d'ailleurs, la résultante de plusieurs autres. F_1 (*fig.* 19, pl. IV) étant égale à la somme $F_2 + F_3$, il est clair que le polygone des forces (*fig.* 19), se fermera, c'est-à-dire que les deux côtés extrêmes du funiculaire seront parallèles, et se couperont à l'infini. La résultante des trois forces sera, comme on le voit, infiniment petite, et située à l'infini : elle produit ce qu'on est convenu d'appeler *un couple*.

Le même effet se produirait si les deux forces F_2 et F_3 étaient remplacées par leur résultante. Le tracé en est facile ; il suffit de faire couper en

n les côtés extrêmes du funiculaire appartenant aux seules forces F_2 et F_3 . F_4 produira concurremment avec F_1 le même couple que les trois forces primitives; l'emploi qui a été fait du polygone des forces ABC avec le pôle O le fait voir immédiatement.

Il n'est pas moins clair que toute autre position du pôle O aurait conduit exactement au même résultat, que nous allons maintenant interpréter.

Dans le couple des forces F_1 et F_4 , le produit de l'une d'elles par la distance comprise entre elles est constant. Il est égal au produit de l'une des forces auxiliaires AO (celle à laquelle sont parallèles les rayons extrêmes du funiculaire), multiplié par la distance entre les deux côtés extrêmes du polygone funiculaire.

$$F_1 a = \overline{OA} \times b.$$

Il est facile de voir en effet que le triangle $mind$ nous donne $\overline{mn} \times a = \overline{md} \times b$. Mais $md = OA \frac{a}{h}$ et $mn = F_1 \frac{a}{h}$. D'où l'on déduit, en remplaçant et en divisant membre à membre $\overline{OA} \times b = F_1 a$. C'est ce qu'on appelle le *moment du couple*.

On pourra donc remplacer le couple des forces

F_1 et F_2 par une infinité d'autres, dont l'une OA étant choisie arbitrairement, en grandeur et en direction, l'autre en découlera immédiatement.

Un couple produit une tendance à la rotation du corps sur lequel il agit. Son sens n'est pas douteux, chaque force produisant une impulsion dans le sens de son action.

Nous appellerons sens positif celui qui correspondra au mouvement des aiguilles d'une montre : de gauche à droite en passant par le haut.

16. Forces quelconques dont la résultante est un couple. — Les forces agissant sur un corps donné paraissent souvent en équilibre, leur résultante étant nulle. Mais si, en même temps, le polygone funiculaire ne se ferme pas comme le polygone des forces, c'est qu'elles produisent, comme celles du paragraphe précédent, un couple. La *fig.* 20 (pl. IV) montre un groupe de quatre forces, qui donnent un polygone fermé, mais dont le funiculaire a ses côtés extrêmes parallèles et non superposés. Ces côtés sont mn et op , et les quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4 , ont pour résultante un couple représenté par deux forces égales à OA , situées à la distance b l'une de l'autre. Le produit $OA \times b$ est constant.

Pour le démontrer, prenons un autre pôle O_1 quelconque. Si nous traçons le funiculaire nou-

veau correspondant à ce pôle, les rencontres deux à deux des côtés de ce polygone seront situées sur une droite parallèle à OO_1 . Il suffit donc de choisir le premier côté, pour pouvoir connaître le dernier. Si le premier passe par p_1 le dernier passera par m_1, p_1m_1 ayant été fait parallèle à OO_1 .

On distinguera facilement dans les deux figures les triangles OAO , et $m_1m_2p_1$, qui sont semblables, leurs côtés étant parallèles deux à deux. Appelons h et h_1 , les hauteurs du triangle OAO_1 mesurées par rapport aux côtés AO et OO_1 . De même celles homologues du triangle $m_1m_2p_1$ seront b et b_1 , et nous remarquerons que ces hauteurs sont précisément les multiplicateurs des forces auxiliaires AO et AO_1 dans les couples considérés. Nous avons donc :

$$\frac{b}{b_1} = \frac{h}{h_1}.$$

Mais le triangle AOO_1 nous donne :

$$\overline{AO} \times h = \overline{AO_1} \times h_1,$$

d'où :

$$\frac{b}{b_1} = \frac{AO_1}{AO},$$

et enfin :

$$AO \times b = AO_1 \times b_1.$$

Le produit de la première force auxiliaire, par la distance entre les côtés extrêmes du funiculaire est donc encore constant ici, quel que soit le pôle adopté.

17. Décomposition d'une force donnée en trois autres forces non concourantes. — Nous résolvons d'abord ce problème dans sa plus grande généralité. La force F_4 est à décomposer dans les forces F_1F_2 et F_3 (*fig.* 21, pl. V).

Portons F_4 en AD (*fig.* 21 *a*, pl. V) et, supposant pour un instant le problème résolu, que les composantes soient $F_1 = AC$, $F_2 = CB$, $F_3 = BD$. Prenons un pôle quelconque O et traçons à son aide le polygone funiculaire *abcde*. Ce funiculaire aura la rencontre de ses côtés extrêmes *ab*, *de*, en *g*, sur la force F_4 .

Par la rencontre de F_1 et F_2 en *m*, menons une parallèle à F_3 . Prolongeons *cd* jusqu'en *n*, et joignons *bn*. Prolongeons de même dans le polygone des forces F_1 et F_3 jusqu'à leur rencontre en E et joignons OE. On aura ainsi constitué deux quadrilatères *bcnm* et OCED qui auront cinq côtés parallèles deux à deux, savoir *bm*, ou F_1 et AE; *mn* et F_3 ou DE; *bc* et OC, *cn* et OD, enfin *mc* et BC. Le sixième côté *bn* sera donc nécessairement parallèle au côté EO. De là nous déduisons la construction suivante :

Tracez F_4 et considérez cette ligne comme un polygone des forces. A l'aide d'un pôle arbitraire O , menez les rayons et les côtés correspondants du funiculaire ab et de . Par le point m intersection de deux des forces, F_1 et F_2 , menez une parallèle à la troisième F_3 . Par les extrémités A et D du polygone des forces, menez des parallèles à F_1 et à F_3 et joignez leur point de rencontre au pôle O . Menez bn parallèle à EO , puis joignez nd . Enfin joignez le point où nd coupe la force F_2 en c , au point b , les rayons polaires cherchés seront parallèles à nc et à cb . Il suffit de les mener dans le polygone des forces pour avoir les points C et B , en joignant lesquels on aura complété le polygone $ACBD$, qui peut remplacer la force unique F_4 .

Ce tracé, qui rentre dans les applications générales des polygones funiculaires, n'est pas le plus expéditif, ni souvent le plus exact, les lignes arrivant parfois à se couper sous des angles trop aigus, et difficiles à prévoir d'avance. Il faut lui préférer un procédé plus direct que voici.

Nous reprenons (*fig.* 22, pl. V) les mêmes forces que précédemment, et nous décomposons (*fig.* 22 *a*, pl. V) la force donnée F_4 en deux autres, dont l'une suivant la direction donnée F_3 ,

et l'autre suivant la ligne qui joint le point de rencontre de F_4 avec F_3 , au point de rencontre de F_1 et F_2 . On obtient ainsi une force auxiliaire f qui peut être aisément décomposée à son tour en F_1 et F_2 . La figure est très suffisamment claire sur cette décomposition pour qu'aucune autre explication ne soit nécessaire.

On voit tout de suite, par ce dernier tracé, que le problème est indéterminé ou impossible dans deux cas. Le premier est celui où les trois forces concourent en un même point (dans ce cas leur résultante devra également y passer). Ou encore si deux des forces se coupent sur la résultante ; dans ce cas, elle se décompose suivant ces deux seules forces, la troisième est nulle.

On a souvent à faire équilibre à un groupe de forces par trois autres dirigées de façon quelconque. Il sera toujours aisé de déterminer la résultante du groupe, et de faire la décomposition comme nous venons de l'indiquer.

18. Moments des forces. — Le moment d'une force par rapport à un point donné est le produit de cette force par sa distance au point considéré, c'est-à-dire par la perpendiculaire abaissée du point sur la direction de la force.

L'évaluation d'un moment est chose très facile en statique graphique. Représentons en $AB = F$

la direction et la longueur d'une force quelconque (*fig. 23 a*, pl. V), et prenons un pôle O, dont la distance à F soit h . Soit encore F (*fig. 23*), la force dans sa position réelle. Nous traçons un quelconque des polygones funiculaires correspondant à la *fig. 23 a*. Ce polygone suffira pour relever immédiatement à l'échelle le moment de F par rapport à un point m quelconque.

Menons par m , une parallèle à la force F, les deux côtés du polygone funiculaire définiront sur cette parallèle un segment $\alpha\beta$. Le moment cherché aura pour valeur $\overline{\alpha\beta} \times h$.

On voit, en effet, que les triangles OAB et $\alpha\beta c$ sont semblables. On a donc :

$$\frac{\alpha\beta}{F} = \frac{mn}{OP},$$

d'où :

$$F \times \overline{mn} = \overline{\alpha\beta} \times \overline{OP} = \overline{\alpha\beta} \times h.$$

Quelle que soit la position de m , m' par exemple, le mode d'évaluation reste le même. Nous écrirons, en général :

$$\mathfrak{M}_m = \alpha\beta \times h.$$

Il faut apporter une grande attention au choix

des échelles dans l'emploi des tracés graphiques destinés à l'évaluation des moments. Comme on représente, en effet, par des lignes, soit des forces, soit des longueurs, il faut savoir à quelle échelle lire les résultats.

Supposons que l'on prenne pour échelle des longueurs $\frac{1}{1250}$ ou 0,0008 par mètre, et qu'on représente les forces à l'échelle de 5 millimètres par tonne, ou $0,005 = 1^T$, on peut alors représenter la force F , 6^T par exemple, par 30 millimètres. La distance polaire sera évaluée en mètres. On peut la faire égale à 12 millimètres, représentant 15 mètres. Dans ce cas, on mesurera la ligne $\alpha\beta$ à l'échelle des forces, et si elle a 25 millimètres, on reconnaîtra que le moment cherché est $M = 5^T \times 15^m = 75^{TM}$.

Mais on voit que rien ne s'opposerait à ce que l'on renversât l'ordre des facteurs, et à condition de déterminer h à l'échelle des forces, on pourrait mesurer $\alpha\beta$ à l'échelle des longueurs. La longueur $h = 12^{mm}$, représenterait aussi bien $2^T,4$, le segment $\alpha\beta$, qui a 25 millimètres, représente $31^m,25$, et on a le même résultat $M = 2^T,4 \times 31^m,25 = 75^{TM}$.

On pourra donc prendre, à l'échelle indifféremment des forces ou des longueurs, les lignes

à mesurer, à condition que les deux longueurs dont le produit est à faire soient prises sur des échelles différentes.

On peut, dans une épure où la valeur de h est constante, et dans toutes celles où elle est pareille, et où les mêmes échelles sont employées, mesurer directement à l'échelle la valeur des moments. En effet, chaque centimètre représente 2^T multipliées par la distance polaire, 15^m , soit 30 tonnes-mètres, et chaque tonne-mètre sera représentée par $\frac{1}{30}$ de centimètre ou $0^{mm},333$. Cette échelle est représentée dans la *fig.* 24 (pl. V), où se trouvent en regard les divisions en centimètres et en tonnes-mètres.

Si l'on demande, par exemple, le moment de F par rapport au point m' , on n'aura qu'à tracer $\alpha'\beta'$ parallèle à F et à mesurer ce segment à l'échelle : on le trouve égal à $28^{mm},5$ correspondant à $85^{TM},5$.

19. Moment d'un groupe de forces. — On sait que le moment, par rapport à un point donné, d'un système quelconque de forces, est égal au moment de leur résultante par rapport à ce même point. De là un tracé très commode, qui se rattache à celui du précédent paragraphe, pour déterminer ce moment.

Soient F_1, F_2, F_3, F_4 , un groupe de forces

(*fig. 25*, pl. VI) dont on demande le moment par rapport à M. Formons, pour ce groupe, un polygone des forces : leur résultante sera en grandeur et en direction R (*fig. 25 a*, pl. VI). Choisissons un pôle quelconque O et construisons le polygone funiculaire correspondant *abcdef*. Le point *m*, rencontre de *ab* et de *ef*, sera un point de la résultante, qui est parallèle à AE. Le moment des forces F_1, \dots, F_n est le même que celui de R. Menons par M, $\alpha\beta$ parallèle à R. Le segment $\alpha\beta$ multiplié par la distance polaire OP sera égal au moment cherché. En effet, le triangle OAE est semblable au triangle $m\alpha\beta$, et l'on a :

$$\alpha\beta \times \overline{OP} = \overline{mn} \times R$$

mn étant la perpendiculaire abaissée de *m* sur $\alpha\beta$, ce qui est la même chose que celle abaissée de M sur R. La ligne $\alpha\beta$ mesure donc ici, comme dans la *fig. 23* (pl. V), à une échelle convenablement déterminée, le moment de R par rapport à M.

Ce mode d'évaluation acquiert une très grande importance pour les forces parallèles. Représentons (*fig. 26*, pl. VI), un groupe de ces forces, \mathfrak{R}, F_1, F_2 , avec le polygone des forces correspondant. Leur résultante est R et elle est déterminée par le tracé du funiculaire connu. Le

moment de R , par rapport à un point quelconque M , est évalué par l'ordonnée $\alpha\beta$, mesurée entre les côtés extrêmes du polygone funiculaire.

Ce groupement de forces se retrouve constamment dans l'étude de la poutre reposant sur deux appuis, dont les réactions sont verticales. La *fig. 27* (pl. VI) représente une de ces poutres soumise aux charges F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 . Les deux réactions, également verticales, se trouvent en R_1 et R_2 , et, suivant ce qui a été expliqué au § 10, nous en déterminons la valeur au moyen du polygone des forces, du funiculaire correspondant, et de la ligne de fermeture. On voit que cette ligne de fermeture est l'un des côtés extrêmes du funiculaire partiel que l'on obtient en ne considérant qu'une partie de la poutre, coupée comme on voudra, d'ailleurs. Si nous faisons une section en S et que nous considérons les forces qui agissent à gauche de ce point, nous reconnaitrons, par une complète analogie avec la figure précédente, que la valeur du moment, par rapport à ce point, est $\alpha\beta \times h$. Si nous considérons de même le groupe de forces situé à droite du même point, nous sommes conduits exactement au même résultat, ce à quoi il fallait s'attendre, ainsi que l'on sait, par

suite de l'état d'équilibre dans lequel se trouve la pièce.

En chaque point de la poutre, on obtiendra donc la valeur du moment des forces situées soit à droite, soit à gauche, au moyen de l'ordonnée verticale de ce point, comprise entre le polygone funiculaire et sa ligne de fermeture.

La surface ainsi délimitée est souvent appelée la *surface des moments* pour la poutre sous les charges considérées. Elle varie naturellement pour chaque cas différent de surcharge.

20. Moments dans le cas de charges réparties. — Nous nous sommes occupés jusqu'à présent exclusivement de forces isolées (ou concentrées), mais l'étude des poutres oblige tout aussi souvent à considérer l'ensemble de forces infiniment petites qu'on appelle des forces ou charges réparties. Il arrive alors que les polygones funiculaires se transforment en courbes, dont les propriétés générales sont les mêmes que ceux des polygones.

Soit, par exemple (*fig. 28, pl. VI*), une poutre AB chargée d'un poids réparti, variable d'un point à un autre, mais tel qu'il est représenté par les ordonnées de la courbe A_1B_1 et qu'il soit en chaque point égal à p par unité de longueur, ou $p \cdot dx$ par élément de longueur de la

poutre. La surface AA_1B_1B est évidemment représentative, à l'échelle, de la charge totale. Nous pouvons la subdiviser par des verticales en un certain nombre de tranches, et prendre celles-ci assez petites pour que la portion de courbe qui les limite vers le haut puisse être considérée comme une droite. Ces tranches seront alors assimilables à des trapèzes dont la surface et le centre de gravité pourront être déterminés par des procédés connus.

Supposons que les quatre tranches $A_1, 1_2, 2_3, 3B$, répondent à ces conditions. Évaluons-les, et portons, en polygone des forces, les valeurs des poids qu'elles représentent (*fig. 28 a*, pl. VI). Traçons à l'aide d'un pôle quelconque le funiculaire correspondant. Ce sera la ligne brisée *abcdef*. Descendons les verticales des points de séparation des tranches, qui couperont ce funiculaire en $1'2'3'$. Il sera facile de faire passer, par les points $1'2'3' f$, une courbe tangente aux côtés du funiculaire en ces points. Cette courbe sera la courbe funiculaire correspondante à la charge répartie non subdivisée.

Il est aisé de se rendre compte, en effet, que la subdivision à l'infini de chaque portion considérée — 23 par exemple —, donnerait la portion de courbe comprise entre les ordonnées qui

la limitent, $2'3'$ dans ce cas. Les côtés $2'd$ et $d3'$ sont les côtés du funiculaire correspondants à $2''3''$ qui représente le poids total de la portion 23 . Quelle que soit la subdivision que l'on ferait encore de cette tranche, ces côtés ne changeraient pas, et les subdivisions donneraient une série de côtés aussi nombreuse que l'on voudrait, qui, à l'infini, deviendraient la courbe en question, $2'd$ et $d3'$ sont d'ailleurs en même temps côtés extrêmes des funiculaires appartenant aux portions voisines, et par conséquent des tangentes aux courbes limites de ces polygones. Il en est de même pour chaque portion, jusqu'aux extrémités, où les côtés ab et ef sont les côtés extrêmes ou les tangentes extrêmes du funiculaire de l'ensemble. Elles déterminent le centre de gravité de l'ensemble des charges, en fixant la position de la résultante.

Si la courbe représentant les charges est une droite, la charge est uniformément répartie. La courbe funiculaire est alors une parabole à axe vertical. On remarque, en effet, que le centre de gravité de chaque portion de charge est au milieu de sa longueur, et la verticale qui passe par ce point coupe par conséquent en son milieu la corde de la courbe, tout en passant au point de rencontre des deux tangentes. Cette propriété n'appartient qu'à la parabole.

CHAPITRE II

—

TYPES LES PLUS USUELS DES POUTRES ET DES FERMES

21. Généralités sur les poutres et les fermes. — Avant de commencer l'étude des poutres et fermes reposant sur des appuis et chargés de façon diverse, nous résumons ici quelques définitions, hypothèses et observations qui limiteront notre programme.

Nous appelons *poutre*, et plus généralement *ferme* tout corps susceptible de recevoir des poids ou des efforts verticaux ou inclinés, et de les transmettre à des points fixes appelés appuis.

Nous ne considérons que des poutres qui ont un plan vertical de symétrie, dans lequel agissent les charges et dans lequel se trouvent conséquemment aussi les appuis.

Nous écartons de notre étude toutes les consi-

dérations qui exigent la connaissance de la théorie de l'élasticité.

Il ne sera donc question ni des arcs élastiques, ni de la poutre continue reposant sur plusieurs appuis. Nous n'entrerons pas davantage dans l'étude de la flexion des poutres à âme pleine.

Nous nous bornerons en somme à l'étude des systèmes où il se développe uniquement des efforts de compression et de tension dans les éléments qui les composent, et qui, de plus, sont *statiquement déterminés*. Nous entendons par là ceux dont les réactions sur leurs appuis peuvent être déterminées sans faire intervenir la théorie de l'élasticité.

22. Charges. — Nous avons déjà parlé (§ 20) de la distinction à établir entre les forces ou les charges *isolées* et celles qui sont *réparties*. Ces dernières sont le plus souvent *uniformément réparties*, c'est-à-dire que, dans toute leur étendue, leur valeur par unité de longueur est constante. C'est ce que nous supposerons toujours, à moins de spécifier particulièrement le contraire.

Les constructions sont, en général, destinées à supporter une *charge morte* ou *permanente*, que nous appellerons p , par unité de longueur ou P , quand il s'agira d'un poids unique. Puis elles

auront à recevoir accidentellement une surcharge que nous désignerons par p' ou par P' , suivant sa nature, répartie ou isolée.

Nous désignerons par R_1, R_2, R_3 , etc., les réactions dues à la charge morte ; par R'_1, R'_2, R'_3 , etc., celles dues aux surcharges.

M_1 , désignera les moments des forces agissant sur les poutres ou fermes en un point donné, provenant de la charge permanente.

M_2 , ceux provenant des surcharges.

M , désignera le moment résistant de la pièce considérée ; nous aurons peu à en faire usage ici.

Les poutres peuvent recevoir *directement* la série des charges qu'elles transmettent aux appuis. D'autres fois elles reçoivent ces charges par l'intermédiaire de pièces secondaires, comme dans le cas de pannes agissant sur des fermes, d'entretoises porteuses sur des poutres de pont. Nous appellerons ce mode de charge celui des *charges indirectes*.

23. Constitution des fermes. — Les poutres ou fermes d'une certaine importance sont le plus souvent constituées aujourd'hui par des systèmes triangulés. C'est de ces systèmes que nous nous occupons exclusivement, Parfois l'articulation des barres formant les triangles se fait au moyen d'axes qui permettent de considérer

les efforts des barres qui se joignent en un même *nœud* comme passant par un point unique.

La transmission des charges aux appuis se fait hypothétiquement de même, c'est-à-dire par un seul point, et nous supposerons toujours qu'elle se fait par une rotule, ce qui définit nettement la position de la réaction.

La dilatation des constructions métalliques exige l'emploi de rouleaux pour la transmission des réactions. Nous supposerons toujours qu'une rotule unique est superposée aux rouleaux, ce qui équivaldrait à supposer l'existence d'un seul rouleau, s'il suffisait à cet effet.

Une poutre triangulée se compose toujours d'un certain nombre de subdivisions appelées *panneaux*. Les parties longitudinales, supérieures et inférieures, sont désignées par le nom de *membrures*. Les barres qui relient ces membrures sont ou des *montants*, verticaux ou non, ou des barres de *treillis*. Les dispositions de ces éléments peuvent varier à l'infini.

24. Modes d'appui d'une ferme. — Une poutre ou ferme peut reposer sur ses appuis de maintes façons.

Nous ne voulons considérer ici que celles qui nous permettent de déterminer, par la statique seule, les réactions de leurs appuis. Il faut, pour

cela, que, l'ensemble des forces étant connu, leur résultante par conséquent déterminée, celle-ci puisse être décomposée d'une façon définie en efforts sur les appuis, susceptibles d'être tenus en équilibre par les réactions de ceux-ci.

Des cas différents se produisent suivant que les appuis sont à rouleau, c'est-à-dire mobiles, ou non. Si un appui est fixe, sa réaction peut, en effet, prendre toutes les directions imaginables. Si, au contraire, il est à rouleau, et qu'on néglige le frottement de celui-ci, ainsi qu'on le suppose toujours, la réaction ne peut être que normale au plan de roulement. De là, une variété de cas que nous allons énumérer.

Deux appuis fixes ne permettent pas de déterminer statiquement les réactions d'une ferme (*fig. 29, pl. VII*). On peut, en effet, faire passer par eux une infinité de réactions, qui ne deviendront définies que si l'on fait intervenir l'état d'élasticité de la construction.

PREMIER CAS. *La ferme a un appui fixe et un appui à rouleaux (fig. 30, pl. VII).* — La réaction de l'appui à rouleau est normale à celui-ci. On peut la tracer; et joignant son point de rencontre avec la résultante générale des forces agissant sur la ferme, à l'appui fixe, on a immédiatement la direction de la réaction sur celui-ci.

La décomposition de la résultante en ces deux directions se fait par un polygone. $R = AB$ (*fig. 30 a*, pl. VII), étant la résultante, le tracé complet du triangle ABC nous donne $\mathcal{R}_2 = BC$ et $\mathcal{R}_1 = CA$.

DEUXIÈME CAS. *La ferme a deux appuis à rouleaux, dont un avec rotule.* — Ce dernier a seul un point de passage déterminé pour sa réaction. On peut tracer \mathcal{R}_2 (*fig. 31*, pl. VII) normale à la surface de roulement. Par sa rencontre m avec la résultante R , on abaisse une perpendiculaire sur la direction du deuxième appui, ce sera celle de la réaction, qui donnera son point de passage. Si elle tombe dans l'espace occupé par l'appui, la pièce sera stable ; si elle tombe en dehors, la ferme se déplacerait, et les conditions du problème changeraient. Il n'y a donc de solution adéquate que si la réaction \mathcal{R}_1 passe dans la surface d'appui.

TROISIÈME CAS. — Si l'exception prévue par le cas précédent se réalise, on peut, en ajoutant *un troisième appui*, rendre la ferme stable. La *fig. 32* (pl. VII), représente un semblable cas (qui n'existe cependant guère dans la pratique). Il faudrait, à cause du mouvement que peut prendre la ferme pour arriver à la position de stabilité, munir chaque appui de rotules, et

alors, en admettant que les trois réactions sont normales, on peut reconnaître l'équilibre entre les quatre forces agissantes. La solution est analogue à celle du § 17 (*fig.* 21, pl. V). Deux des réactions concourent en un point m . L'autre réaction coupe la résultante en n . On décomposera R en \mathcal{R}_3 et une force auxiliaire suivant nm . Celle-ci se décomposera à son tour en \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sans ambiguïté aucune.

Le cas le plus ordinaire de la pratique est le premier ci-dessus, avec la condition particulière que les charges sont verticales, les appuis horizontaux et de niveau. C'est celui de la plupart des ponts, et les fermes reçoivent alors plus particulièrement le nom de *poutres*. Nous avons vu (§ 10) comment, dans ce cas, on déterminait la valeur des réactions, les charges étant verticales. Le tracé est facile si la résultante des forces agissantes est inclinée : nous n'y insisterons pas, sinon pour dire, que sous des forces inclinées, un des appuis est obligatoirement fixe, sans quoi la poutre se déplacerait.

25. Poutres ou fermes composées de plusieurs parties. — Certains types de fermes ne sont pas constitués d'une seule pièce, reposant sur deux appuis, mais d'une réunion de plusieurs parties qui exercent, en outre de leurs charges

ou réactions sur les appuis, des réactions réciproques. Nous allons en indiquer quelques types qui sont, malgré cela, déterminés statiquement.

Une ferme peut se composer de deux parties, réunies par une articulation ou charnière (*fig. 33, pl. VII*). Chacune d'elles repose sur un appui fixe (il n'y aurait pas de stabilité sans cela) et elles réagissent l'une sur l'autre au point d'articulation M. Si les résultantes des forces agissant sur chaque partie de la ferme sont connues, les réactions le sont également. Il est clair, en effet, que la résultante R qui agit sur la portion de gauche produit en M un effort dont la direction est MB. La portion de droite ne recevant aucun autre effort que celle des réactions de l'appui fixe, d'une part, de la portion de gauche, d'autre part, ces deux réactions ont pour direction la même ligne qui joint leurs points de passage MB. Dès lors, il suffira de joindre le point où MB prolongé rencontre R, à l'appui A, pour avoir la direction de \mathcal{R}_1 , et pour former le polygone des forces (*fig. 33 a, pl. VII*) qui donnera la valeur de \mathcal{R}_1 et de \mathcal{R}_2 .

La résultante des forces agissant sur la partie de droite sera traitée de même, donnant deux autres valeurs de \mathcal{R}'_1 et \mathcal{R}'_2 , qu'on composera

avec les premières pour obtenir la valeur totale des réactions.

Nous avons vu (§ 13) comment on peut déterminer directement ces réactions totales. Chacun des polygones AMB n'est, en effet, autre chose que le funiculaire des polygones des forces de la *fig. 18 a* (pl. IV) et au lieu d'en superposer deux, on pourrait ici trouver directement les réactions totales.

La ferme considérée est donc statiquement définie. C'est ce qu'on appelle l'*arc à trois rotules*.

Une poutre reposant sur un aussi grand nombre d'appuis que l'on voudra pourra être de même statiquement définie, à la condition qu'elle soit subdivisée en portions qui ne comprennent pas plus de deux points d'appui, et que les points de division soient munis d'une articulation. Les portions à deux points d'appui ne doivent pas être immédiatement contiguës. Afin qu'il y ait stabilité, il faut que d'autres conditions encore soient remplies : qu'entre deux points d'appui il n'y ait jamais plus de deux articulations, que l'une des portions au moins repose sur deux appuis sans articulation intermédiaire, que les travées d'extrémité ne comportent qu'une seule articulation au plus. Ce qui nous intéresse

ici, c'est de montrer qu'une semblable poutre est statiquement définie.

Celle représentée par la *fig.* 34 (pl. VII), est formée de quatre travées AB, BC, CD, et DE. La première, la seconde et la quatrième ont chacune une articulation. La résultante \mathcal{R}_1 de toutes les forces agissant sur Aa peut se décomposer en réactions passant par A et a. Celle en a sera à considérer comme force agissant sur la deuxième portion ab, et, composée avec la résultante \mathcal{R}_2 , se décomposera en réactions passant en B et en b. La portion bc pourrait-être considérée ensuite de la même manière, mais il y aurait lieu de tenir compte, en surplus, de l'action venant de la portion CE. Celle-ci donne, exactement comme AB une action c, et les réactions de C et de D sur la portion bc comprendront les charges résumées par la résultante \mathcal{R}_3 , plus celles agissant en b et c, provenant des portions voisines.

On reconnaîtra toujours avec facilité, dans les poutres articulées répondant aux conditions ci-dessus, comment il y a lieu de procéder à l'évaluation des réactions réciproques pour déterminer les réactions des appuis fixes.

26. Charges fixes et variables. — Nous allons passer en revue les types les plus fréquemment employés des poutres ou fermes, sou-

mises à des charges verticales ou obliques. Nous considérerons d'abord ces charges comme agissant à la fois dans toute l'étendue des fermes. Telles sont les charges permanentes des ponts, charpentes, etc.

Tel est encore l'effet du vent sur des toitures ; au moins admet-on très généralement que celui-ci s'exerce à la fois sur tout un versant de toit et non sur une portion plus ou moins grande de celui-ci. Plus loin, nous examinerons les effets de charges uniques, multiples ou continues qui se déplacent, comme les trains de chemin de fer ou des files de voitures.

27. Poutre armée. — La construction triangulée la plus simple est la poutre armée avec poinçon et tirants ABD (*fig. 35, pl. VIII*). Elle peut être chargée d'un poids unique en C ou bien d'une charge répartie tout le long de AB. Dans ce dernier cas, les tronçons AC et CB étant, bien entendu, supposés non continus, on déterminera aisément la portion de chaque charge qui se transmet aux points A, C et B. L'épure se rapporte à l'hypothèse où chacune des portions AC, CB aurait une charge représentée par les surfaces hachurées. La surface ACC'A' a été subdivisée en trois parties 1, 2, 3. Leurs valeurs sont portées en polygone des forces (*fig. 35 a*,

pl. VIII). Le pôle O_1 a servi à former un polygone funiculaire, dont la ligne de fermeture étant tracée, sa parallèle par O_1 a donné am , la valeur de la réaction en C. Nous portons en mn , la longueur représentant la charge isolée P. A l'aide du pôle O_2 , nous opérons comme précédemment, déterminant en mp la valeur de la réaction en C, due à cette force P. En pq , nous portons la longueur représentative de la charge CBB'C'. Elle est uniformément répartie, et elle donnera, par conséquent, en C, la moitié de son poids et, en B, l'autre moitié. pr représentera cette moitié ; ar sera donc la charge totale que reçoit le poinçon CD et qu'il transmettra à BD et DA. Des parallèles à ces lignes en aO_3 et rO_3 donneront, par ces lignes, les valeurs des efforts dans les tirants.

Il sera toujours important de se rendre compte si les efforts trouvés sont des tensions ou des compressions. La charge $C = ar$ qui pèse sur le poinçon, comprime évidemment celui-ci, et on n'aura pas de peine à reconnaître qu'il donne sur AD et BD des tensions. Mais il convient de formuler une règle pour le reconnaître. Elle se déduira facilement du sens de parcours des différents côtés du polygone des forces qui constituent l'équilibre du point considéré, et qui est le correspondant des lignes se réunissant en ce

point. Ainsi la charge C s'exerce de C vers D , en compression. Son homologue est ar , que nous parcourons dans le sens de son action. Poursuivant le chemin nous marcherons de r vers O_3 et le chemin correspondant sera de D vers B , ce qui constitue une tension. Nous compléterons le parcours du triangle en allant de O_3 vers a , et le chemin homologue sur la *fig. 35*, sera celui de D vers A , c'est-à-dire encore une tension.

Le sens des forces agissant dans un système triangulé se déterminera toujours de la manière qui précède. Il faut et il suffit pour cela, le polygone correspondant à un nœud étant connu, que le sens de parcours d'une seule des forces du polygone soit également connu.

28. Poutre triangulée. — La poutre armée a été le point de départ de toute une série de combinaisons imaginées pour constituer des poutres plus importantes que celles qui comportent un seul poinçon et deux tirants. L'exemple que nous avons donné plus haut (*fig. 35*, pl. VIII) admet que les charges portent d'abord sur les portions AC et CB , qui sont soumises à une certaine flexion, avant de faire entrer en jeu la triangulation, et les efforts sur les barres de celle-ci. Ces efforts sont d'extension ou de compression seulement, sans flexion autre

que celle due à leur propre poids, et l'on s'est appliqué depuis fort longtemps à créer des types où les charges s'exerçant aux nœuds seulement, ne produisent en aucune partie des barres autre chose que des forces longitudinales. C'est ce que dorénavant nous supposons toujours.

Une des formes simples de poutre triangulée est celle que montre la *fig. 36* (pl. VIII) qui s'emploie dans certaines formes de comble. L'arbalétrier AB est soulagé par les trois poinçons CF, DG et EH. En chacun des points E, D, C, s'exercent des poids verticaux 1, 2 et 3. Des tiges articulées réunissent les points A, F, G, H, B, et, en outre, C, G et E, G. On obtient ainsi un système formé de triangles juxtaposés, qui, conséquemment, est indéformable. Nous supposons qu'il repose en A et en B sur des appuis qui permettent la dilatation, mais ne produisent que des réactions verticales. On demande à déterminer les efforts dans chacune des tiges constituant le système.

Portons en polygone des forces (*fig. 36 a*, pl. VIII), les efforts 1, 2 et 3. Par le procédé déjà mentionné (§ 10), si ces forces ne sont pas égales et équidistantes, nous pouvons déterminer la position de la résultante et la répartition des charges sur les appuis A et B. Si elles sont

égales et que les divisions AC, CD, DE, EB le soient aussi, les réactions \mathcal{R}_A , \mathcal{R}_B sont égales.

La réaction B produit son effet sur les barres BE et BH. Menons par a une parallèle à BE, et par M une autre à BH. Le triangle aeM donne la décomposition de la réaction B dans les deux directions des barres, et conséquemment la valeur des forces qui agissent en elles. Quant à leur sens, on le reconnaîtra comme suit : la réaction \mathcal{R}_B agit de bas en haut, vers le point B. Contournons le polygone des forces aeM dans ce sens, nous marcherons de a vers e , ce qui correspond à une marche de E vers B, c'est-à-dire à une compression, puis de e vers M, ou de B vers H, ce qui indique une tension.

Poursuivant notre tracé, nous considérons le point H. Trois barres y aboutissent, la valeur de l'effort en l'une d'elles étant connue : c'est eM . Menons par e une parallèle à EH, par M une parallèle à GH. Nous obtiendrons un point f et un triangle Mef . Il nous donne par ses côtés la valeur des forces qui sont en équilibre au point H. Le sens de BH ou Me est connu, c'est une tension. Partons donc du point M, nous suivrons Me , puis ef , ce qui correspond à la direction E vers H : une compression ; puis nous suivrons fM , ce qui correspond au sens de H vers G : une tension.

Considérons maintenant le nœud E. En ce point, quatre barres se réunissent, y exerçant autant d'efforts, dont deux sont déjà déterminés. Il y agit encore l'effort 1 qui est une charge extérieure, mais qui contribue à produire l'équilibre en E. Il reste donc deux forces inconnues en DE et GE. Dans le polygone des forces, nous avons fe , ea , ab qui se trouvent bout à bout, et que nous pouvons parcourir dans le sens des efforts agissant sur le point E. Menons donc par b , une parallèle à ED, et par f , une parallèle à EG, nous fermerons notre polygone, ainsi qu'il doit être, le point E étant en équilibre. Les côtés bg , gf , parcourus en suivant, indiquent que DE est en compression et GE en tension.

Ces explications détaillées suffisent pour nous permettre d'indiquer sommairement les autres tracés qui sont du même genre. Après le point E, on considérera le point D où trois barres seulement aboutissent. Le polygone correspondant sera $gbch$, où hg indiquera une compression. Vient ensuite le point G avec son polygone déjà préparé $Mfgh$, qui sera complété par les droites hi et Mi , parallèles à CG et à GF : tensions toutes les deux.

On peut maintenant passer indifféremment au

point C ou au point F. Le premier a pour polygone correspondant $ihcd$, à compléter par dj et ji , parallèles à AC et à CF. Le second a pour polygone correspondant Mi , à compléter par ij et Mj , parallèles à CF et à AF. Ces deux tracés ont une ligne commune ij , et doivent se contrôler en ce sens que le point j , déterminé soit par la droite Mj , soit par dj , doit être le même. C'est là la vérification de tout le tracé, et si elle se produit bien exactement, on dit que ce tracé *se ferme*.

29. Règles générales concernant les polygones Cremona. — Nous nous sommes longuement étendus sur le tracé qui précède parce qu'il est le premier exemple que nous donnions de la méthode de M. Cremona, méthode qui trouve de nombreuses applications. Elle est basée sur ce que, lorsqu'on connaît les forces extérieures qui agissent sur un système triangulé, on peut toujours construire successivement, en juxtaposant les uns aux autres, les polygones des forces correspondants aux différents nœuds de la triangulation. On obtient ainsi des figures qui sont réciproques les unes des autres, comme celles dont il a été question au § 7. Ces tracés sont soumis à certaines règles que nous résumons ici.

Il faut choisir pour point de départ, un des sommets où deux barres seulement viennent concourir. On ne peut, en effet, compléter un polygone par des forces inconnues, dont la direction est donnée, que si celles-ci sont au nombre de deux seulement.

En faisant les tracés, il faut avoir soin de disposer les côtés des polygones dans l'ordre où on rencontre les barres en faisant le tour du nœud considéré. Sans cela, on court le risque de ne pas pouvoir compléter la figure réciproque.

Dans ce même but, on remarquera que :

1° Dans une figure réciproque d'une autre, la droite qui est commune entre deux polygones continus, est homologue de celle qui, dans la première figure, joint les nœuds correspondants à ces polygones.

2° Les barres qui, dans l'une des figures, constituent les triangles successifs de l'ensemble, ont pour homologues, dans l'autre figure, des droites qui passent par le même point et forment un nœud.

L'espace nous manque ici pour donner avec détail l'exposé de la théorie des figures réciproques. Nous renvoyons pour cela aux ouvrages didactiques plus étendus. Nous n'en faisons pas ici d'autre usage que dans ce qui

précède, et nous pensons que les règles pratiques indiquées pour les tracés Cremona suffiront à la plupart de nos lecteurs.

30. — La poutre représentée par la *fig.* 36 (pl. VIII) est plus souvent posée horizontalement, et sa construction est presque toujours symétrique. Le tracé Cremona, qui, alors, y est relatif, devient fort simple, et se trouve résumé dans les *fig.* 37 et 37 *a* (pl. VIII). Il suffit bien entendu de faire le calcul pour l'une des moitiés de la poutre.

Cette poutre a 6 panneaux égaux, et porte 5 charges égales P appliquées aux nœuds supérieurs. Chaque appui donne donc une réaction égale à $\frac{5}{2} P$. Cette réaction donne immédiatement les valeurs 1, 2 des efforts sur les barres portant même numéro. Les tracés se suivent ensuite dans l'ordre suivant : 2-**6-3**, 1-3-**5-4-P**, 6-5-**7-10**, 7-4-**P-8-9**, et enfin 8-**P-8'-11**. (Nous avons, dans chaque groupe souligné la ou les lignes nouvelles déterminées par le tracé de ce polygone). On remarquera que le tracé de $8' = 8$ est, en réalité, inutile, la symétrie de la figure par rapport à une horizontale passant par M étant évidente. On pouvait donc se borner à tracer $\frac{1}{2}$ 11, l'effort sur 11 est, du reste, non moins

évidemment, égal à P , la charge agissant sur cette pièce 11, au milieu de la poutre. Les barres 8 et 8' lui étant perpendiculaires ne peuvent, en effet, donner aucun effort sur elles, mais le poids P se transmet en entier à la verticale 11.

La disposition que présente le tracé Cremona de cette figure se reproduira fréquemment. Nous pouvons y remarquer les particularités suivantes :

Les lignes 2, 6, 10, qui correspondent aux membrures inférieures, où les charges ne sont pas appliquées, émanent toutes d'un même point M .

Les lignes 1, 4, 8 sont parallèles et équidistantes de la quantité P , qui est la différence de charge d'un nœud supérieur au suivant.

Les lignes correspondantes aux montants et aux diagonales forment un tracé continu, où il est aisé de reconnaître, en le parcourant, les sens des efforts qui agissent dans les barres. Partant de l'extrémité inférieure de 3, et cette première barre étant reconnue comprimée, on revient vers le bas, sur 5 : cette barre est tendue. On remonte dans 7, ce qui indique une compression, comme dans 3 ; 9 est de même tendue ; 11, comprimée ; et la suite du tracé montrerait la même alternance d'efforts.

A titre de comparaison, nous donnons, dans les *fig.* 38 et 38 *a* (pl. VIII), le tracé relatif à une poutre semblable, où les nœuds inférieurs sont supposés chargés. On verra que les efforts dans les membrures se trouvent sur une même horizontale passant par le point M, et que les barres inférieures sont espacées comme plus haut, de quantités égales à P, mesurées cette fois sur le polygone des forces seul. Le montant central 11, n'a, comme on pouvait s'y attendre, aucun effort à supporter. Les efforts dans les membrures sont les mêmes dans les deux cas, ceux dans les montants et les diagonales différent.

31. — Les poutres les plus fréquemment employées ont leurs membrures supérieures et inférieures parallèles. Les types en sont très variés. Nous donnerons ici les tracés Cremona relatifs aux plus usuels d'entre eux, en variant les conditions de charge auxquelles nous les supposons soumises.

Poutre Warren ou à triangles isocèles (*fig.* 39, pl. IX). — Ce type, plus employé aux États-Unis que chez nous, sert en général aux ponts. Nous y reviendrons à propos des charges roulantes. Si la poutre est uniformément surchargée, la voie étant soit en haut, soit en bas, la charge de l'une des membrures est beaucoup

plus grande que celle de l'autre. C'est ce dont tient compte le polygone des forces (*fig. 39 a*).

Les charges sont symétriques par rapport au milieu, la poutre elle-même l'étant; il suffira donc de construire le tracé Cremona pour une moitié seulement. Voici les particularités qu'on peut remarquer sur cette épure en vue de son emploi répété.

Les charges supérieures doivent se trouver portées l'une à la suite de l'autre et les charges inférieures également. Si l'on voulait faire le tracé se rapportant à la poutre entière, les polygones des forces se recouvriraient partiellement et seraient symétriques au dessus et au dessous du point M. Toutes les lignes du polygone de décomposition seraient également symétriques par rapport à l'horizontale passant par M.

32. Poutre à treillis en N (*Poutre Whipple des Américains*). — Nous donnons dans les *fig. 40* et *41* (pl. IX) les tracés pour une même poutre chargée de deux façons différentes. Nous supposons dans les *fig. 40* et *40 a* que les charges sont concentrées uniquement aux nœuds inférieurs de la poutre. Le tracé Cremona est des plus simples, et l'on voit que les efforts des barres 2, 6, 10... se trouvent sur une même droite qui serait l'axe de symé-

trie de la figure, si on étendait le tracé à la deuxième moitié de la poutre.

Les *fig.* 41 et 41 *a* supposent, au contraire, que les charges sont réparties entre les nœuds supérieurs et inférieurs. Comme dans la *fig.* 39 (pl. IX) et pour la poutre Warren, les polygones des forces des deux moitiés de la poutre doivent se recouvrir ici. Si les charges sont uniformément réparties ou symétriques, le tracé est également symétrique par rapport à la ligne MN, qui correspond à la moitié de la charge appliquée au nœud supérieur occupant le milieu de la poutre.

Les deux types que nous venons d'indiquer sont ceux qui servent à former la presque totalité des poutres à treillis composé. Leurs combinaisons multiples donnent par superposition les treillis plus compliqués, et ces combinaisons doivent, pour pouvoir être soumises au calcul, se décomposer en formes élémentaires. Il ne rentre pas dans notre cadre de discuter ici avec quelle mesure d'exaclitude les efforts sont appréciés dans ces superpositions ou décompositions. On admet généralement qu'il n'en résulte aucune différence dans les efforts réels.

Remarquons seulement que souvent la décomposition ne donne pas des systèmes symétriques.

Il faut alors étendre les tracés à la poutre entière.

33. Ferme de comble triangulée (*fig. 42*, pl. X). — La ferme que représente cette figure est très fréquemment employée et donne une épure de décomposition très simple (*fig. 42 a*). Les charges de pannes aux nœuds M, N, P, Q.... sont portées sous ces lettres dans le polygone des forces. La réaction de gauche comprend $M + N + P + Q + \frac{1}{2} S$, et c'est cette somme qu'on décompose tout d'abord en 1 et 6. Passant au nœud M, on obtient les efforts dans les deux barres 2 et 10, la barre verticale en M ne subissant aucun effort, ainsi que le prouve sa direction perpendiculaire à 6, qui a, par conséquent aussi, un effort égal dans toute sa longueur AN'. Le nœud inférieur N' donne la valeur des efforts 7 et 14, puis les nœuds N, P', P, Q', Q et S' donnent les efforts dans le reste des barres. Toutes les barres ont leurs symétriques dans la deuxième moitié de la ferme, et on voit dans la *fig. 42 a* par l'amorce de 5' que l'épure est, en effet, symétrique par rapport à l'horizontale passant par le milieu de la charge S.

La barre 17 n'est obtenue que si on trace les lignes représentant les valeurs des deux barres 5 et 5'.

34. Efforts du vent. — On considère avant tout, dans le calcul des fermes de comble, l'effet des charges verticales. Mais elles ont forcément à subir aussi des efforts obliques, provenant du vent. On en tient souvent compte en leur donnant pour équivalent des charges verticales que l'on suppose réparties sur toute la longueur de la ferme, c'est-à-dire sur ses deux versants. Cela n'est pas exact, et ce procédé ne trouvait autrefois sa raison d'être que dans la difficulté qu'il y avait à déterminer par le calcul algébrique les efforts produits dans les différentes barres.

Le calcul graphique permet de résoudre le problème d'une façon précise.

On admet encore souvent que le vent frappe les divers objets qui sont près de la surface du sol sous un angle de 10° avec l'horizontale. Il ne paraît pas qu'il y ait de bonnes raisons pour conserver cette hypothèse très ancienne. Des observations récentes semblent plutôt prouver que le vent aurait une composante ascendante, c'est-à-dire inverse de l'ancienne hypothèse. De toute façon, il semble plus simple et plus logique d'admettre l'hypothèse d'un vent horizontal, tant qu'il s'agit de surfaces ou de bâtiments peu éloignés du sol. Agissant sur une surface inclinée comme celle d'un toit, qui fait avec l'horizon un

angle α , il fera avec cette surface ce même angle. Il produira sur elle un effort décomposable en deux forces, l'une normale, l'autre parallèle à la surface. On ne sait pas évaluer cette dernière qui dépend du frottement du vent, et, quant à la normale, son évaluation est faite diversement par les auteurs. Nous y reviendrons plus loin, et nous nous bornons ici à montrer comment il est aisé d'en tenir compte.

Pour cela, une hypothèse est nécessaire, à savoir que la ferme doit être simplement posée sur l'un de ses appuis et fixée à l'autre, sans quoi, si les deux appuis étaient fixes, la variabilité de la longueur du tirant exigerait qu'on fit intervenir l'élasticité de la matière, ce qui sortirait des considérations de statique pure. On pourrait encore, il est vrai, admettre qu'il se produit deux réactions obliques, parallèles à la normale au toit, mais il n'est pas certain que tel est bien l'effet de répartition qui se produit, et il est préférable d'admettre que l'un des deux appuis est absolument fixe et que l'autre ne supporte qu'une réaction verticale, ce que l'on peut d'ailleurs assurer par le mode de construction. La valeur et la direction des réactions sont alors immédiatement déterminables par un polygone funiculaire, et, par suite, tous les efforts extérieurs sur la ferme

étant connus, on peut calculer les efforts dans toutes les barres.

Pour l'action même du vent, on peut admettre qu'il exerce suivant sa direction, sur une surface oblique d'une étendue S , un effort égal à sa pression par unité de surface multipliée par la projection de S sur la perpendiculaire à sa direction.

Ou encore on peut évaluer la composante du vent, perpendiculaire à la surface considérée, et multiplier cette composante par S . Dans les deux cas, on négligera la composante parallèle à S , quelle qu'elle soit d'ailleurs, et l'évaluation sera la même.

La pression sur une surface normale au vent est égale à

$$P = \frac{k\delta S}{2g} v^2$$

où k est un coefficient d'expérience variable de 1,86 à 3, et qui augmente avec la surface.

δ , est le poids du mètre cube d'air ;

S , la surface frappée ;

v , la vitesse du vent, en mètres par seconde.

La *fig. 43* (pl. X) représente la même ferme que précédemment, soumise à des efforts de vent venant de la droite. Les valeurs de ces efforts, applicables à chaque panne et évalués suivant le premier mode indiqué ci-dessus, ont été portées en polygone des forces dans la *fig. 43 a* et

décomposées en la verticale \mathcal{R} et l'oblique \mathcal{R}' , l'appui de gauche étant supposé fixe, et celui de droite sur rouleaux, c'est-à-dire susceptible seulement d'une réaction verticale. Cette même figure montre également la décomposition des forces dans chacune des barres de la ferme.

L'effort en B n'a pas été compris dans l'épure. Il s'exerce dans la direction même de l'entrait AB, et se transmet par lui directement à A. Sa valeur s'ajoute aux efforts calculés.

Il faut remarquer que le côté gauche de la ferme subissant l'effet d'une seule force extérieure qui est la réaction, les membrures seules en reçoivent un effort, le treillis n'en subit aucun.

La *fig. 43 b* est le calcul analogue fait, en supposant que c'est, au contraire, l'appui de gauche qui est mobile, et l'appui de droite, fixe. On voit ainsi quelles différences en résultent dans les différentes barres de la ferme, et on remarquera qu'ici encore la moitié de ferme qui ne subit pas l'effort du vent, ne reçoit d'efforts que dans ses membrures et non dans le treillis. En réalité, les deux hypothèses ne conduisent à des différences que dans l'entrait.

Le même procédé est applicable aux fermes courbes, qui offrent au vent des surfaces d'incli-

raison variable. Il est suffisant, pour les besoins de la pratique, d'évaluer comme ci-dessus l'effort du vent sur la surface correspondante à chaque panne, en donnant, à l'inclinaison de cette portion de surface, la valeur moyenne correspondante à la portion de toiture supportée par elle.

Quand il s'agira de toitures coniques ou sphériques, on n'aura à considérer que la ferme située dans un méridien parallèle à la direction du vent. Toutes les autres seront moins frappées.

35. Poutres ou fermes reposant sur deux appuis. Charges variables. — Le calcul des efforts dans une ferme ou poutre en treillis est, ainsi que nous l'avons vu, fort simple, quand les charges sont invariables ou permanentes, ou bien encore quand elles restent toutes proportionnelles entre elles. Les polygones Cremona résolvent toujours alors le problème de la distribution de ces efforts.

Il n'en est plus de même quand on a affaire à des charges variables ou mobiles, celles résultant du déplacement d'un train par exemple. Il se produit alors dans chaque barre des maxima et des minima, dont la connaissance peut être utile, et devient même indispensable si on applique les règles les plus récemment établies

pour la détermination des sections (1). Il faudrait donc tracer un polygone Cremona pour tous les cas qu'il y aurait lieu d'examiner, et on ne pourrait pas déduire de ces tracés eux-mêmes des règles ni des preuves permettant d'affirmer qu'on a bien déterminé les maxima. Il convient, dans ce but, d'avoir recours à d'autres méthodes et de faire intervenir les considérations du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Nous nous bornons à rappeler ici la définition de ces termes :

Étant considéré un point déterminé d'une poutre soumise à la flexion, le *moment fléchissant* est le moment de toutes les forces agissant à droite ou à gauche de ce point, par rapport à lui. Il est égal au moment de la résultante de l'un ou l'autre de ces groupes de forces. La pièce étant en équilibre, les moments des deux groupes sont égaux entre eux et de sens contraire.

(1) La circulaire ministérielle française, avec règlement du 29 août 1891, consacre le principe du calcul des sections en ayant égard aux limites maxima et minima des efforts que les pièces auront à supporter. Il est probable que cette règle deviendra de plus en plus usuelle. La même circulaire fixe aussi la composition de trains-types pour le calcul. Ce sont ceux que nous emploierons dans les applications que nous aurons occasion de faire plus loin.

En ce même point, l'effort tranchant est égal à la résultante de toutes les forces agissant, soit à gauche, soit à droite du point considéré. Il est de sens contraire suivant le côté que l'on considère. Quand il s'agit de forces verticales, l'effort tranchant est nécessairement vertical. Quand les forces sont obliques ou de directions diverses, l'effort tranchant a encore la direction de la résultante, mais on peut toujours décomposer l'effort tranchant en deux directions, dont l'une est normale à la pièce au point considéré et l'autre longitudinale. Cette dernière composante devient alors, suivant le cas, une compression ou une tension longitudinale.

Nous étudierons surtout l'effet des charges verticales sur les poutres posées sur deux appuis.

Nous avons déjà montré (§ 19, *fig.* 27, pl. VI) comment on évaluait, au moyen d'une épure, le moment fléchissant en un point quelconque d'une poutre droite. Il convient d'en étendre l'emploi, en considérant tout point d'une structure triangulée comme pouvant être un centre de moments. Ainsi, la ferme de la *fig.* 44 (pl. XI) n'a pas de ligne moyenne prononcée, mais les charges étant verticales aussi bien que les réactions, on peut considérer les moments par rapport aux points C. D. E, comme on ferait pour ceux

relatifs aux points C' , D' , E' , d'une poutre rectiligne, et si la *fig. 44 b* (pl. XI) est la surface des moments correspondants aux poids, les moments fléchissants pour les points C, D, E , seront mesurés en c, d, e , comme dans le cas de la poutre droite idéale $A I$, réduite à sa fibre neutre, qu'étudie la théorie générale de la flexion.

On voit immédiatement qu'il en est de même à l'égard de l'effort tranchant. En D , il est la résultante des réactions ou forces qui s'exercent en A, B, C et D , tout comme s'il s'agissait du point D' . Peut-être le mot d'effort tranchant est-il quelque peu impropre quand il n'y a plus d'âme verticale pour y résister et le transmettre par cisaillement. On le conserve, comme exprimant bien la nature de la résultante dont il s'agit.

36. Méthode des moments. — Les efforts de chaque barre, dans un système triangulé simple, peuvent se déterminer très facilement à l'aide des moments fléchissants.

Considérons une barre CE du système triangulé de la *fig. 44* (pl. XI), et faisons passer par elle une section transversale quelconque, qui pourra passer à droite ou à gauche du point D , lequel est, dans le triangle CDE , le nœud opposé à CE . Cette section détachera donc de la poutre entière une portion Ann' . L'équilibre, qui existe

pour cette portion aussi bien que pour l'ensemble de la poutre, est produit par l'ensemble des forces agissant sur elle, aux nœuds A, B, C, et par les forces qui lui sont transmises par les barres coupées, BD, CD, CE. Cet équilibre veut que le moment résultant de toutes ces forces, par rapport à un point quelconque, soit nul.

Or, par la façon dont la section a été faite, il se trouvera toujours, parmi les forces que nous venons d'énumérer, trois inconnues, qui sont les forces dans les trois barres coupées. Quelle que soit la section, deux de ces forces sur trois concourront toujours en un même point, et si l'on choisit ce point pour centre des moments, les moments de ces deux forces inconnues seront nulles. Il ne restera que la troisième, qui, se trouvant être la seule inconnue, pourra être immédiatement calculée.

Ainsi, dans le cas de la poutre AI, la section faite permet de calculer l'une ou l'autre des trois barres BD, CD, CE.

Pour la première, on prendra pour centre des moments le point C, ce qui fera disparaître de l'équation les forces suivant CD et CE, et on aura :

$$R_1 x - P_B a_1 + Sh = 0$$

où R_1 , est la réaction de gauche et x la distance du point C à cette réaction ;

P_B , la charge verticale en B et a_1 , la distance de cette charge au point C ;

S, l'effort dans la barre BD, qui est ici un tronçon de membrure supérieure ;

h , la longueur de la perpendiculaire abaissée de C sur BD.

De cette équation, on tire immédiatement :

$$S = \frac{P_B a_1 - R_1 x}{h}.$$

Pour calculer de même l'effort suivant CE, on prendrait les moments par rapport à D, et pour l'effort suivant CD, on choisirait, pour centre des moments, le point de rencontre de BD et de CE. Il tomberait dans le cas actuel très loin et en dehors du dessin. Quand les membrures supérieures et inférieures d'une poutre sont parallèles, il tombe même à l'infini. C'est cet éloignement qui rend souvent le procédé d'une application difficile, car il faut alors trouver, par le calcul, la distance du point de rencontre. Dans le cas de membrures parallèles, la projection de la résultante sur la direction de la barre fournit le résultat.

Si le polygone des moments (*fig. 44 b*, pl. XI) a été tracé, le calcul indiqué ci-dessus se sim-

plifiée, car le moment des forces extérieures agissant à droite ou à gauche de chaque point s'y trouve tout indiqué. Pour le point C que nous avons considéré plus haut, c'est $cc' = \mathfrak{M}_c$ et on peut écrire simplement :

$$S_{BD} = \frac{\mathfrak{M}_c}{h}.$$

L'effort dans CE serait :

$$I_{CE} = \frac{\mathfrak{M}_D}{h_1},$$

\mathfrak{M}_D étant donné par dd' .

Il peut arriver que le point de rencontre des deux barres considérées se trouve précisément sur la résultante des forces considérées. Le moment de cette résultante se trouvant ainsi nul, on en conclut que la barre, qu'on cherche à déterminer, subit un effort nul. La position de la résultante se déduit comme nous l'avons dit (§ 19) de la *fig. 27* (pl. VI). Ainsi, pour le point C, la résultante aura sa position déterminée par la rencontre des côtés cA' et $d'c'$. Il tombe en dehors du dessin.

Le procédé que nous venons d'indiquer n'est plus purement graphique. Comme il rend cependant de très grands services, et qu'il est très

simple, nous ne pouvions nous dispenser de l'indiquer ici. Comme il serait d'ailleurs absurde de vouloir, parce qu'on emploie les procédés graphiques, exclure tout calcul, nous lui donnons sa place parmi les procédés pratiques que nous nous efforçons d'exposer.

En Allemagne, cette méthode porte le nom de *Ritter*, qui l'a, sinon inventée, du moins beaucoup étendue dans ses emplois.

37. Méthode de Culmann. — Pour éviter les difficultés qui résultent de l'éloignement des points de rencontre des barres, on peut se servir d'autres procédés. Le premier consiste dans l'application du procédé exposé au § 17 de la décomposition d'une force en trois autres de directions et de positions connues. Les polygones (*fig. 44 a et 44 b*, pl. XI) font connaître pour chaque point de la poutre la valeur et la position de la résultante des forces agissant sur l'une des portions détachées par une section mn' . On peut dès lors appliquer immédiatement la décomposition de la résultante dans ses trois composantes. A cet effet, on joint le point de rencontre de l'une des barres avec la résultante au point de rencontre des deux autres. Par exemple, pour la section ss' , la résultante sera déterminée par la rencontre de $e'f'$ avec ef , qui se fait en t . Elle est

verticale, et elle coupe en T le prolongement de EG. Joignant ce point à la rencontre des deux autres barres EF et DF, que rencontre la section ss' , nous aurons les éléments de la décomposition à faire.

En effet, nous trouvons sur le polygone des forces, en ll' , la valeur résultante relative à cette section. Nous la décomposons d'abord suivant les directions TF et TG. Ayant ainsi obtenu la valeur de la résultante auxiliaire ll'' , il ne reste plus qu'à la décomposer suivant les directions DF et EF, ce qui se trouve fait sur la *fig. 44 a* (pl. XI).

Ce procédé est souvent très commode quand on n'a besoin de connaître qu'une seule des trois forces. C'est elle dont il faut alors chercher d'abord l'intersection avec la résultante.

Par contre, il offre le même inconvénient que le procédé précédent, de ne pas pouvoir toujours être appliqué en raison de l'éloignement des points d'intersection. On peut alors se servir d'une décomposition auxiliaire qui conduira toujours au but.

Soit (*fig. 45*, pl. XI) nn' , la ligne de coupure d'une poutre en treillis dont les membrures supérieures et inférieures ont un point d'intersection trop éloigné pour être utile. Prenons sur la

résultante R un point quelconque M, joignons-le aux points D et E. Nous pouvons remplacer R par ses deux composantes suivant ces droites MD et ME, ce qui se trouve fait dans la *fig. 45 a* (pl. XI) en R' et R". Décomposons R' suivant les deux directions EC et ED, ce qui est fait en *ab* et *bc*. Puis décomposons R" parallèlement à ED et FD, ce qui est fait en *cd* et *de*. On aura ainsi les valeurs de $S = de$ et de $I = ab$. L'effort D suivant la diagonale DE sera $bc - cd = bd$, et on reconnaîtra que le tracé polygonal *abde* est bien celui qui peut remplacer la résultante $R = ae$. Un peu d'attention fera aisément superposer les deux lignes relatives à la barre DE qui, seule, participe à la décomposition à la fois de R' et de R". Leur somme algébrique se lit alors immédiatement sur le tracé.

38. Méthode de Zimmermann. — Cette méthode assez particulière présente des facilités remarquables dans un grand nombre de cas.

Considérons une poutre en treillis AB...N (*fig. 46*, pl. XI) sur laquelle agissent des charges, Une coupe *nn'* est destinée à nous permettre le calcul des efforts dans les trois barres S, D et I, et la résultante des forces agissant sur la portion de gauche est située en R. Nous allons la remplacer par deux forces parallèles à R, passant par

les points D et E. Ces forces F_D et F_E se calculeront aisément en remarquant que :

$$F_D = - \frac{R(a + \lambda_E)}{\lambda_E} \quad \text{et} \quad F_E = \frac{Ra}{\lambda_E}.$$

Les numérateurs de ces expressions expriment les moments fléchissants \mathfrak{M}_D et \mathfrak{M}_E qui se produisent aux points D et E, lesquels se mesureront directement sur le polygone représentatif de ces moments. Agissons maintenant comme au § précédent, en cherchant ce que produisent sur les barres qui aboutissent en D et en E, les forces F_D et F_E . Dans la *fig. 46 a* (pl. XI), nous faisons $ab = F_D$, et nous traçons le triangle des forces autour du nœud D, pour obtenir bc et ca , les efforts S et D_1 dans ces barres. Faisant $da = F_E$, nous agissons de même pour le nœud E, et nous obtenons ed et ae pour valeurs de I et de D_2 . Les valeurs S et I sont celles qui agissent dans les membrures. Le sens de F_D et de F_E indique celui du parcours des triangles. Pour la diagonale, nous aurons $D = D_1 - D_2 = ce$. On remarquera d'ailleurs que l'on a $R = F_D - F_E = db$ et cette remarque conduit à indiquer un tracé très simple du quadrilatère $bced$.

Sur la *fig. 46* (pl. XI) qui est la représentation

de la poutre elle-même, nous prenons (en faisant un choix convenable d'échelle) :

$$EE_1 = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\lambda_E}^E \quad \text{puis} \quad EE_2 = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\lambda_E}^D.$$

Menant par E_1 une parallèle à DF , et par E_2 un eparallèle à CE , nous aurons, en $E_1D_1D_2E_2$, le quadrilatère cherché, et par conséquent les valeurs de S , D et I .

Cette méthode rend des services quand la longueur λ est constante d'un bout à l'autre de la poutre, ce qui est le cas le plus fréquent. Elle donne alors très rapidement les maxima dans les poutres à membrures courbes ou polygonales, qui sont longues à calculer par les autres procédés. Pour cela, on trace le polygone des moments fléchissants en prenant une distance polaire exactement multiple de λ . Si y_E est l'ordonnée de ce polygone correspondant à E , on a $\partial \mathfrak{K} = y_E \times n\lambda$ et, par conséquent, $F_E = ny_E$, valeur qui, prise à l'échelle, doit être représentée par E_2E_1 .

Dans les recherches que nous allons exposer, sur la détermination maxima ou minima des efforts qui se produisent dans les divers types de construction, nous nous servirons tantôt de l'une, tantôt de l'autre des trois méthodes que nous venons de résumer.

39. Charges les plus défavorables. — On appelle charge défavorable, la charge d'une ferme ou poutre qui produit dans une barre donnée un maximum ou un minimum d'effort. En général, à chaque barre entrant dans une structure, correspond une certaine charge défavorable, mais souvent aussi une certaine répartition des charges donne, pour toute une série de barres, les efforts limites. La charge permanente d'une poutre étant la plus faible de celles qu'elle est appelée à supporter, il semblerait que l'effort de chaque barre, dans cette condition, doit être un minimum. Mais sous une surcharge d'importance et de disposition variable, les limites des efforts peuvent être de sens contraire, et telle barre peut avoir un minimum inférieur au premier et même de sens contraire.

La méthode des moments (§ 36) permet de formuler une première règle simple pour la détermination du maximum des efforts dans une barre donnée.

Considérons (*fig. 47*, pl. XII) une coupe *ss* faite dans une ferme *AB*. Les efforts *S*, *D* et *I* dans les trois barres coupées sont déterminés par la position et la valeur de la résultante sur l'une des parties de la ferme, *A* *ss* par exemple et par le bras de levier de la barre par rapport à

l'un des points C_1 , C_2 , C . Ces derniers sont constants, quelle que soit la charge de la ferme.

Si nous plaçons un poids P_1 à gauche de la section ss , elle produira une réaction \mathcal{R}_1 en A et une autre \mathcal{R}_2 en B . On aura toujours $P_1 > \mathcal{R}_1$ et le moment de ces deux forces sera toujours positif. De même, un poids placé à droite de ss produira une réaction \mathcal{R}_1 qui sera la seule force extérieure agissant sur la portion considérée Ass et son moment par rapport à un point C ou C_1 quelconque situé entre A et B sera encore positif. On pourra donc dire que toute charge appliquée en un point quelconque de la ferme donnera un effort de même sens sur les barres dont le centre des moments se trouve compris entre A et B . Par conséquent, les maxima des efforts S et I se produiront quand la ferme supportera à la fois toutes les charges éventuelles qu'elle peut être appelée à recevoir.

Il n'en est pas de même pour les barres dont le centre des moments est situé au-delà des points A et B . Toute charge située entre A et ss donne, nous l'avons dit, un moment positif. Au contraire, toute charge placée à droite de ss , c'est-à-dire à partir du point C_1 ne donnera plus, sur la portion Ass , que la réaction \mathcal{R}_1 dont le moment par rapport à C_2 est un moment négatif. Les

efforts D seront de sens contraire suivant que le poids P est appliqué de A en C ou de C_1 en B , et, pour avoir un maximum ou un minimum de D , il faut surcharger, soit toute la portion comprise entre A et C , soit celle de C_1 en B . Nous allons avoir à déterminer le point limite de ces charges.

On voit du reste que les moments de P_1 et de \mathcal{R}_1 ensemble, quand P_1 est à gauche de ss , ou le moment de \mathcal{R}_1 seul, quand P_1 est à droite de ss , augmentent de valeur à mesure que P_1 s'approche de ss . Si, par conséquent, une charge mobile passe sur la poutre, et qu'elle se compose de plusieurs parties, les unes plus fortes que les autres, on obtiendra toujours le maximum en la plaçant de telle façon que les plus grosses charges soient les plus voisines de ss .

Le cas particulier où le centre des moments se trouve à l'un des points d'appui ou sur la verticale de ce point est intéressant. Dans ce cas, le moment de \mathcal{R}_1 et de P_1 réunis, se réduit à celui de P_1 seul. Si cette charge est située entre A et ss , elle donne un moment d'autant plus grand qu'elle est plus voisine de ss . Si elle se trouve au-delà de cette section, elle ne donne plus aucun moment. Donc, dans les fermes telles que les fermes de comble à membrures droites, se

rencontrant au point d'appui, toute charge qui se trouve en dehors de la portion comprise entre l'appui et la barre diagonale considérée, ne produit aucun effort dans cette barre.

40. Maxima dans les membrures. — Nous venons de voir ci-dessus que les membrures subissent un effort de même sens par suite de l'addition de toute charge qui produit son effet sur la poutre simplement posée sur deux appuis; cet effort est une compression dans la membrure supérieure, et une tension dans la membrure inférieure. Le maximum de l'une et de l'autre sera donc atteint quand la poutre est entièrement surchargée.

Si la charge est uniformément répartie, la courbe représentative des moments est une parabole, à axe vertical. D'après ce que nous avons dit au § 26, les poids équivalents, représentant cette charge uniformément répartie, étant concentrés aux nœuds de la poutre, le polygone des moments aura ses sommets sur la parabole, correspondant aux dits nœuds.

Si la surcharge est formée de poids isolés, tels que les roues d'un train, ou les chevaux et les roues d'un véhicule attelé, le maximum n'est pas évident dès l'abord, la valeur respective des charges n'étant pas identique. Mais il est

facile de le déterminer à l'aide d'un tracé fort simple.

Remarquons d'abord que quand une charge isolée passe sur une poutre, le maximum du moment dans chaque section est atteint quand la charge se trouve en ce point. En effet, en considérant (*fig. 48*, pl. XII) le point M et une charge P qui parcourt la poutre AB, on voit que la réaction \mathcal{R}' diminue constamment pendant ce trajet, tandis que \mathcal{R}'' augmente. Tant que P est à gauche de M, le moment fléchissant en M est proportionnel à \mathcal{R}'' , et sera par conséquent le plus grand, quand la charge atteint le point M; quand elle l'aura dépassé, le moment en M peut s'évaluer à l'aide de la seule réaction \mathcal{R}' et il lui est proportionnel. Or, \mathcal{R}' diminue à mesure que P progresse de M en B, et on en conclut que le moment est maximum quand la charge est au point M considéré.

Plusieurs poids, cheminant ensemble sur la poutre, ne changeraient rien à cette loi, mais l'addition des moments partiels que chacun d'eux produit donnera toujours un maximum au moment où l'une des charges se trouve dans la section considérée. Le polygone des moments aura alors un de ses sommets dans la section. Il ne s'agit plus que de déterminer laquelle des

charges produira ce maximum. L'observation qui précède conduit au tracé suivant.

Étant donnée la succession des charges qui doit passer sur la poutre, traçons, à l'aide d'un pôle quelconque, convenablement choisi, le polygone funiculaire de toutes les forces qui la composent (*fig. 49 et 49 a*, pl. XII). Une portion de ce polygone, dont la projection horizontale sera égale à la portée de la poutre, correspondra toujours à la présence, sur la poutre, des poids compris entre ses extrémités. On pourra donc déplacer progressivement cette projection le long du funiculaire et faire ainsi parcourir la poutre successivement par toutes les charges. Si l'on cherche le moment maximum en un certain point, on placera successivement la poutre dans toutes les positions où une des charges viendra occuper ce point, et on trouvera sur le funiculaire la valeur des moments correspondants dont le maximum sera aisément reconnu. Ainsi, étant donnée une poutre AB, et un point M situé sur elle, on placera successivement ce point en M_1, M_2, M_3, M_4 , là où se trouvent les charges susceptibles de fournir le maximum cherché. On projettera les points A_1, A_2, A_3, A_4 , en a_1, a_2, a_3, a_4 , et on fera de même des points $B_1 \dots B_4$. Les droites $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4$, seront

les lignes de fermeture du polygone correspondant à chacune des positions, et on aura en m_1, m_2, m_3, m_4 , les ordonnées exprimant la valeur des moments à comparer.

Nous avons, sans hésiter, choisi tout de suite les charges 9, 10, 11, 12 pour y placer successivement le point M, en vue d'obtenir le maximum. Il suffit, en effet, d'avoir tracé un petit nombre de ces épures pour reconnaître que le maximum en un point donné se produit toujours quand on place dans le voisinage de ce point les charges les plus lourdes et les plus rapprochées. La proportion entre ces charges et leur écartement variant à l'infini, on ne peut donner de règle absolue. Celle que nous venons d'indiquer permet, à l'aide d'un très petit nombre de tâtonnements, de déterminer le maximum avec une entière certitude.

La répartition indiquée dans la *fig. 49* (pl. XII) est celle d'un train de locomotives. On trouvera presque invariablement pour ce genre de surcharges que l'une des roues du milieu d'une des locomotives fournit le maximum.

Quand il s'agit de véhicules sur routes, l'une des roues doit se trouver au point pour lequel on cherche le maximum.

41. Charges indirectes. — Il est rare que,

dans les poutres à treillis les charges agissent directement sur elles. Presque toujours elles leur sont transmises par des pièces secondaires, longerons et entretoises porteuses, souvent appelées pièces de pont. Les valeurs des moments fléchissants dans la poutre sont alors légèrement différentes de celles dues aux charges directes.

Soit une poutre AB (*fig.* 50, pl. XII) soumise en M et N à des charges P_1 et P_2 , dont l'effet lui est transmis à l'aide de longerons D, E et F, G. Décomposons chacune de ces charges en deux composantes, suivant leurs distances des nœuds voisins. Nous remplacerons ainsi P_1 par deux forces agissant en D et E. Si nous traçons le funiculaire des forces P_1 et P_2 , cette décomposition se fera sur le polygone des forces : il suffira de joindre *de*, et de mener Oc_1 parallèle à *de*. Nous obtiendrons ainsi (§ 19, *fig.* 27, pl. VI) les composantes cherchées de P_1 et P_2 . De même, nous joindrons *fg* et nous tracerons Og_1 parallèle à *fg*.

Il est clair que, substituant ces composantes aux forces P_1 et P_2 , nous n'aurons changé en aucune façon les réactions \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 . Par conséquent aussi, les moments entre A et D, entre E et F et entre G et B n'auront pas davantage changé.

D'autre part, la poutre elle-même ne reçoit aucune charge entre les points D et E, ni entre F et G, les charges P_1 et P_2 lui étant transmises en D, E, F et G, par le moyen des longerons et entretoises. A ces régions correspondent donc des portions de ligne droite, pour représenter les moments, et ces droites sont forcément *de* et *fg*, qui compléteront le polygone total des moments fléchissants.

De là une règle fort simple pour tracer le funiculaire des moments quand les forces sont indirectement appliquées à une poutre. On trace ce funiculaire comme si les charges étaient directes, et on réunit par une ligne brisée continue les points de rencontre de ce polygone avec les verticales des nœuds.

Quand la charge est uniformément répartie, on agira de même : la démonstration en est superflue ici.

42. Maxima dans les diagonales. Efforts tranchants. — Nous avons déjà vu que la règle qui donne les maxima dans les membrures par les moments n'est pas applicable aux diagonales. Les moments fléchissants sont, en effet, toujours de même sens dans une poutre posée sur deux appuis : les efforts tranchants varient de sens suivant qu'une charge est appliquée à droite ou à

gauche du point considéré. De plus, la forme de la poutre influe considérablement sur les efforts dans les diagonales.

Voyons d'abord les variations de l'effort tranchant.

Dans la poutre AB (*fig.* 51, pl. XII) un poids P placé en M donne un effort tranchant négatif en C, si l'on considère l'effet produit par la portion de gauche sur celle de droite. En effet, la réaction en A est négative, et elle est la seule force agissant sur la portion AC.

Mais une autre force P' agissant en M' donnera en ce même point C un effort tranchant positif, c'est-à-dire inverse au premier. Il sera en effet égal à $P' - R'_1$ et comme forcément $P' > R'_1$, ce sera une valeur positive. Elle pourra être plus ou moins grande que la première valeur R_1 et l'effort tranchant total sera conséquemment positif ou négatif selon le cas.

Il en résulte qu'une charge qui se déplace sur la poutre fera varier, de sens aussi bien que d'intensité, l'effort tranchant en un point donné. Si, avançant de l'appui B, elle marche vers C, elle donne un effort tranchant négatif qui va en augmentant jusqu'à ce que C soit atteint. En le dépassant, il change brusquement de sens, puis diminue jusqu'à disparaître quand l'appui A est atteint.

Considérons un groupe de forces qui, liées les unes aux autres, comme les roues d'un train, progressent le long d'une poutre, marchant de B vers A.

Quand la première de ces charges sera parvenue en M, la seule force agissant sur la portion de poutre située à gauche de ce point, sera la réaction \mathcal{R}_1 qui donnera conséquemment la valeur de l'effort tranchant. Dès que la première roue P_1 a dépassé ce point, l'effort tranchant diminuera, et un maximum de cet effort aura été atteint. En général, ce maximum est absolu. Si toutefois la deuxième charge de roue est très considérablement supérieure à la première, il peut arriver, et il arrive souvent, que, lorsqu'elle parvient à son tour au point M, on obtient un maximum supérieur au précédent, ce qu'il est d'ailleurs facile de déterminer.

Soit (*fig.* 52, pl. XIII) une poutre AB, de longueur l , parcourue par un train de roues 1, 2, ..., 6 dont la première est parvenue en M. Il se produira alors en ce point le maximum de l'effort tranchant, sauf l'exception déjà indiquée que nous considérons plus loin. Cet effort sera égal à la réaction \mathcal{R}_A . Nous pouvons l'évaluer en fonction des distances x_1, x_2, x_3, \dots parcourues déjà sur la poutre par chacune des charges

P_1, P_2, P_3, \dots , qui sont celles des roues 1, 2, 3,

On aura évidemment :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\Sigma Px}{l}.$$

Un procédé particulier permet de connaître rapidement, pour chaque point de la poutre, ce maximum de \mathcal{R}_1 .

Reprenons (*fig.* 53, pl. XIII) la poutre A_1B_1 , et, au lieu de placer le train dans sa position réelle, retournons-le, de manière que sa première roue se trouve au droit de l'appui B_1 . Portons en A_1 C, les charges successives des roues pour former un polygone des forces, puis prenons B_1 pour pôle, c'est-à-dire l pour distance polaire, traçons le funiculaire des charges ainsi placées. *L'ordonnée de ce funiculaire MM' sera pour le point M la valeur de l'effort tranchant maximum.*

En effet, si l'on considère le funiculaire ainsi tracé, on remarquera que l'ordonnée MM' mesure (d'après ce qui a été dit au § 19) le moment de toutes les forces comprises entre M et B_1 par rapport au point M, car elle est comprise entre les deux côtés extrêmes du funiculaire. Or, le groupe des forces P_1 à P_6 se trouve, par suite du retournement opéré par rapport au point M, exac-

tement dans la même position où il se trouvait dans la *fig.* 52 (pl. XIII), par rapport au point B. La ligne MM' représente donc $\Sigma P x$ et on a :

$$MM' \times l = \Sigma P x$$

D'où

$$MM' = \frac{\Sigma P x}{l} = \mathfrak{R}_1.$$

Ce procédé est des plus simples, car il donne par une seule figure le maximum, en chaque point, de l'effort tranchant dû au train considéré.

Le polygone ainsi obtenu est d'un emploi constant. Suivant ce qui se fait presque toujours maintenant par les auteurs allemands, nous l'appellerons tout court le polygone A.

Comme un des usages les plus fréquents que l'on en fera consiste dans son application aux trains d'épreuve pour lesquels on calcule les ponts métalliques, nous donnons (*fig.* 54, pl. XIII) le tracé complet de la courbe appliqué au train prescrit par la circulaire ministérielle du 29 août 1891, pour les lignes principales. Nous l'appliquons à un pont de 30 mètres d'ouverture.

On reconnaîtra, en AC, la succession des charges de roues, en AB, la distribution de celles-ci et, en BM'C, la courbe tracée comme nous venons de le dire.

Si, au lieu de charges concentrées, il s'agissait de poids uniformément répartis, on procéderait de même. On diviserait l en un certain nombre de portions égales, et on supposerait le poids de chacune appliqué en son milieu. Le polygone des forces est une succession de poids égaux. On reconnaîtra alors que le tracé de la courbe est celui bien connu qui permet de construire un arc de parabole par points. Ceux que l'on aura trouvés devront être réunis par une courbe continue, le funiculaire étant, en réalité, la parabole dont on a construit la série des cordes successives.

Il est à peine besoin d'indiquer que si, dans un train, les roues ont des charges différentes, ce sont les plus lourdes qui devront se trouver en avant lors de la progression du train, pour donner le maximum absolu de l'effort tranchant. C'est ce qui se produit naturellement par l'existence des locomotives en tête du train. Quand il s'agit de véhicules sur routes, c'est au contraire au moment où une voiture lourdement chargée passe que le maximum se produit sous son essieu d'arrière.

Il résulte de ce que nous avons dit plus haut que le sens de l'effort tranchant est différent suivant que la ou les charges sont placées à droite ou à gauche du point considéré. On

obtiendra donc deux valeurs extrêmes pour chaque point, suivant que la surcharge avance de droite ou de gauche, un maximum positif et un autre négatif. Nous indiquerons comment ces maxima, dus à une charge roulante, se combinent toujours avec les efforts dus à la charge permanente d'un ouvrage.

43. — Nous avons dit (§ 42) que le maximum de l'effort tranchant était presque toujours atteint quand la première roue d'un groupe atteignait la section considérée. Il peut y avoir exception quand la première roue d'un train est peu chargée par rapport aux suivantes. Voici ce qui se produit quand la poutre est directement chargée par les roues.

Considérons (*fig.* 55, pl. XIII) la série de roues 1.2.3.4, dont la première a une charge P_1 relativement faible. Traçons le polygone A. Nous trouverons alors sous la roue 1 en M l'effort tranchant maximum quand la roue se trouve en ce point. Faisons-la avancer en N de la longueur a , c'est-à-dire de la distance qui la sépare de la roue suivante. L'effort tranchant est alors en ce point égal à NN' , et il est égal à la réaction correspondante \mathcal{R}_A . A ce moment, en M, sa valeur sera $\mathcal{R}_A - P_1$. Cette valeur est facile à déterminer, la force P_1 se trouvant figurée en A_1A_2 . Menant

l'horizontale A_2N'' , nous avons en $N''N'$ la valeur de l'effort tranchant correspondant au point M quand la première roue est en N, et il peut arriver que $MM' < N''N'$. Cela a lieu quand le côté du polygone A, a, par rapport à l'horizontale, une plus grande inclinaison que $N''M$, tracée comme nous l'avons dit et qu'on peut déterminer une fois pour toutes en faisant $A_1Q = a$ et en joignant A_2Q . A partir du point où les côtés du polygone A ont plus d'inclinaison que A_2Q , il conviendra de considérer la deuxième roue du train au lieu de la première.

On ferait un raisonnement analogue pour la troisième roue d'un train, mais, dans la pratique, ce cas n'a guère d'importance, celui que nous venons d'examiner se produit déjà peu souvent.

Il ne serait pas impossible que l'emploi croissant des machines locomotives avec bissel ou bogie à l'avant le rende plus fréquent. Les deux essieux de ce bogie sont en effet moins chargés que les roues motrices. Toutefois, les charges d'épreuve des ponts métalliques seront données, sans doute longtemps encore, par l'emploi, en tête d'un train, des lourdes machines à marchandises pour lesquelles le bogie ne s'emploie guère, au moins en Europe.

44. — Quand les poutres principales sont

chargées par l'intermédiaire de pièces secondaires, il y a, au contraire, souvent lieu de se préoccuper de la deuxième roue de la locomotive, et même de la troisième.

La *fig.* 56 (pl. XIII) indique une poutre qui reçoit des charges par l'intermédiaire d'entretoises porteuses. Le polygone A a été tracé, et nous supposons que, dans un panneau MN, la première roue, peu chargée, s'est avancée de telle sorte que la seconde, plus lourde, se trouve en N. La réaction \mathcal{R}_A sera alors égale à CC_1 . Mais comme la charge P_1 se transmet à la poutre par l'intermédiaire des pièces secondaires M et N, CC_1 ne sera pas la valeur de l'effort tranchant dans la poutre en ce point. Il sera égal à \mathcal{R}_A moins la portion de P_1 qui est transmis à la poutre en M, c'est-à-dire moins l'effort tranchant produit en M par les charges sur MN considérée comme une petite poutre séparée.

Si la longueur du panneau MN = λ et que la distance entre 1 et 2 soit égale à x , cette portion est égale à $P_1 \frac{x}{\lambda}$ et on la détermine facilement en portant en MM_1 la longueur P_1 et en joignant M_1N . On aura alors en CC_1 l'effort cherché et, en $C'C_1$, la valeur réelle de l'effort tranchant dans toute l'étendue MN.

Si donc $C'C_1 > NN_1$, c'est que le maximum de l'effort sera atteint quand la deuxième roue atteindra en N le panneau considéré. Il y aura presque toujours une région de la poutre où le maximum correspondra au passage de la première roue, lors même qu'ailleurs il correspondrait à la deuxième.

Le même raisonnement s'applique à la différence d'effort tranchant due au dépassement du point N par plusieurs roues. L'effort tranchant secondaire, produit en M, qui est à retrancher de l'effort principal, s'obtiendra en retournant les premières roues du train, de sorte que la première soit en N (*fig.* 57, pl. XIV) et le polygone A' permet de mesurer tout de suite la différence des efforts tranchants, qui est la valeur à faire entrer dans les calculs ultérieurs.

On reconnaîtra souvent que $C'C_1 > NN_1$, mais beaucoup plus rarement que $D'D_1 > C'C_1$.

Si les panneaux d'une poutre sont égaux, l'examen de ces cas à l'aide d'un seul tracé du polygone secondaire A' est très simple et vite fait. Quand les panneaux sont inégaux, il y aura autant de polygones A' à tracer qu'il y a de dimensions de panneaux.

45. — Reprenons la détermination des efforts maxima dans les diagonales d'une poutre.

Considérons (*fig.* 58, pl. XIV) une poutre quelconque AB et cherchons quel sera, sous le passage d'un train, l'effort maximum dans la diagonale FG. Supposons que la charge exerce son effort sur les nœuds de la membrure inférieure.

Suivons l'effet produit par un poids isolé P qui, parvenu en H, parcourrait le panneau HF, il produira des composantes appliquées en H et F, qui en H diminuent progressivement de P à 0. Pendant ce temps, l'effort D sur la barre FG varie, étant d'abord une compression, pour devenir nulle, et ensuite devenir une tension. Le point où se produit le changement de sens est évidemment un *point limite*.

Pour le déterminer, prolongeons EG, la membrure supérieure correspondante à la diagonale considérée, jusqu'en A' et B', sur les verticales des appuis. Joignons A'F et B'H, jusqu'à leur point de rencontre K. Ce point K est sur la verticale du point limite.

Pour le voir, construisons (*fig.* 58 a, pl. XIV) un polygone des forces à l'aide de la force $P = A_1B_1$ et dont les rayons polaires soient B_1O parallèle à B'H, et A_1O parallèle à A'F. Menons OM et ON, parallèles à FH et à A'B'. On reconnaîtra que le polygone A'FHB' peut être considéré comme le funiculaire de deux forces, ap-

pliées en F et H, sur la poutre AB, et dont B_1N et NA_1 seraient les réactions. Les forces elles-mêmes seraient B_1M en H, et MA_1 en F. Le même polygone est donc tout aussi bien applicable à une poutre qui aurait FH pour portée, et P pour charge unique, qu'à une poutre AB chargée de deux poids B_1M et MA_1 . Or, la résultante de toutes les forces agissant soit à droite, soit à gauche de la section ss , qui coupe les barres S, D et I, passe par la rencontre des deux côtés EG et FH, considérés comme appartenant au polygone funiculaire. Ces côtés étant identiques avec les membrures, la résultante se trouve passer par le point de rencontre de ces membrures. Or, nous avons vu au § 36 que, lorsque ce cas se produit, l'effort dans la diagonale est nul, et nous en concluons que le point K est bien le point limite auquel correspond un changement de sens dans la barre D.

Toute charge située à droite de K, donnera sur D un effort négatif, c'est-à-dire de compression. Toute charge située à gauche donnera un effort positif, c'est-à-dire de tension.

S'il s'agit d'une charge uniformément répartie, une fois qu'elle sera parvenue de B en K, toute cette portion ne fera plus varier l'effort sur D pendant sa progression. Celle qui dépasse K le

changera seule. Reprenons donc (*fig.* 59, pl. XIV) la courbe A des efforts tranchants maxima, et traçons la courbe A' applicable au panneau IIF, comme nous l'avons indiqué au § 43. Nous devons trouver sous K en K'K'', l'ordonnée que nous cherchons qui sera la valeur de la réaction en A, destinée à donner le maximum de D.

Si les charges sont appliquées aux nœuds supérieurs, la figure est à retourner, en se servant de ces nœuds comme on s'est servi de F et de H.

S'il s'agit de diagonales dirigées dans l'autre sens, comme EF, le tracé est le même, seulement les efforts et les maxima changent de sens.

46. — Si les charges mobiles sont concentrées et inégales, le tracé est un peu plus compliqué. Nous avons déterminé plus haut (§ 42) le maximum de la résultante agissant à gauche de la section considérée, mais ce maximum n'est pas toujours celui qui donne le maximum de l'effort D. Celui-ci dépend du maximum du moment de cette résultante par rapport au point de rencontre des membrures. Lorsqu'elles sont parallèles, le premier suffit. Quand elles sont concourantes, la condition est un peu différente.

Reprenons la même poutre et supposons (*fig.* 60, pl. XIV) qu'il s'agisse de la barre DE. Le train figuré avance de B vers A. Une pre-

mière roue est parvenue en F et va dépasser ce point. En ce moment, la résultante de gauche est égale à $F_1 F_2 = A$, et si l'on veut calculer la valeur de D_1 on aura $D_1 \times \overline{OO}_1 = -\mathcal{R}_A e$. Mais quand les roues avanceront, la valeur de \mathcal{R}_A changera. Nous avons montré comment on l'obtient, au § 44. Seulement ici, nous avons à déterminer le maximum du moment qui sera, non plus $\mathcal{R}_A e$, mais :

$$-\mathcal{R}_A e + \mathcal{R}'_A e'.$$

Ce moment peut s'écrire sous la forme :

$$-e \left(\mathcal{R}_A - \mathcal{R}'_A \frac{e'}{e} \right)$$

et son maximum sera celui de la portion entre parenthèses $\mathcal{R}_A - \mathcal{R}'_A \frac{e'}{e}$.

Nous avons précédemment construit le polygone des ordonnées A' . Elles doivent maintenant être modifiées toutes dans la proportion $\frac{e'}{e}$, ce qu'il est facile de faire en réduisant la distance polaire, qui, dans la *fig.* 67 (pl. XIV), avait été prise égale à a , dans la proportion $\frac{e'}{e}$. Cette construction est faite sur la *fig.* 60 *a*, où le polygone des forces est indiqué à gauche. La longueur a est redressée par un arc de cercle, le point trouvé

à été joint à O' , ce qui donne sur la verticale de A la longueur $a' = a \frac{e}{e'}$. Il n'y a plus qu'à la rabattre en O'' pour avoir le pôle nouveau qui sert au tracé du polygone A' . Ce polygone tracé, on voit que le maximum de l'ordonnée AA' se trouve en K_1K . Il est forcément sur l'un des sommets de A' , et une mesure au compas suffit ici pour le faire connaître.

Pour avoir le maximum D_1 , il suffit maintenant de décomposer cette valeur parallèlement à OA_2 , d'une part (§ 37) et à DE , d'autre part. C'est ce qui a été fait et le résultat cherché D_1 se trouve indiqué par un trait plus fort.

Les tracés que nous venons d'indiquer ne sont applicables que lorsque les diagonales se coupent dans de bonnes conditions avec la résultante, qui est ici toujours la réaction A . Mais les montants verticaux en particulier ne peuvent être ainsi déterminés, leur point de rencontre avec A étant à l'infini. Il faut alors avoir recours à l'emploi des moments. Pour calculer l'effort V_b (*fig.* 61, pl. XIV), on prendra les moments autour de O , et l'on aura :

$$A \times e = V_b \times e_1.$$

Graphiquement, on voit qu'en portant sur le montant D la valeur de A et joignant ses extré-

mités à O, on trouve, sur la verticale de l'appui, la valeur de D.

Quand les deux membrures sont parallèles, le point O se recule aussi à l'infini. La valeur de V devient alors égale à A.

47. — Les considérations du § 46 conduisent à une simplification quand il s'agit de poutres à membrures parallèles et de charges uniformément réparties. Le centre des moments étant à l'infini, l'effort D d'une diagonale s'obtiendra en projetant sur sa direction la résultante, différence de A et de A'. On peut alors éviter le tracé des courbes A'.

On remarquera, en effet, que les courbes A et A' sont des paraboles à axe vertical, mais à paramètres différents, proportionnels à l et à α . Elles ne dépendent que des charges et de l'espace des entretoises et non de la forme de la poutre. Aux points correspondants à K, leurs tangentes deviendront parallèles. On aura donc (fig. 59, pl. XIV) des triangles semblables $K''K'''L_2$ et $K'K'''B_1$.

Comme $K'''L_2 = \frac{1}{2} K'''H''$ et $K'''L_1 = \frac{1}{2} K'''B_1$, on aura encore deux autres triangles semblables $K'''K''H''$ et $K'''K'B_1$.

$H''K''$ sera donc parallèle à $K'B_1$ et $K'K'' = H''H''$.

De là un procédé très simple pour obtenir le maximum cherché. Il suffit, après avoir déterminé le point limite K , de joindre le point K' qui lui correspond sur la courbe A , au point B_1 , et on aura en $H'H''$ la valeur de l'effort qui, projeté sur D , donnera le maximum dans cette barre.

48. Ferme à trois rotules. — L'arc ou la ferme à trois rotules (§ 25) reçoit des applications de plus en plus fréquentes. Nous croyons utile de consacrer ici quelques pages au calcul qui lui est applicable.

Ces fermes peuvent avoir des formes très variées. Nous en étudierons deux, une première générale, en supposant que des efforts de direction variée peuvent s'y produire, et une autre simplifiée, ne subissant que des charges verticales. Ces cas sont ceux de fermes de comble recevant des efforts obliques causés par le vent, et de ponts recevant des surcharges roulantes.

La *fig.* 62 (pl. XV) représente une ferme arquée, recevant, en outre de poids verticaux, les efforts obliques du vent. Nous les supposons composés d'avance entre eux et appliqués aux nœuds. Du côté gauche, les forces $F_1 \dots F_5$ sont obliques. Du côté droit, les charges $P_1 \dots P_4$ sont verticales.

Un polygone funiculaire de toutes les forces

$F_1 \dots P_1$, qui passera par les trois rotules A, B, C, sera un polygone des résultantes qui permettra, par les procédés des §§ 36 et suivants, de calculer les efforts dans chacune des barres de la ferme. Voici comment on peut tracer ce funiculaire :

A l'aide du polygone des forces (*fig. 62 a*, pl. XV), et d'un pôle quelconque O_1 , traçons un premier funiculaire passant par C, et comprenant les forces $P_1 \dots P_4$ existantes entre B et C. La réaction verticale en B et en C serait donnée par la ligne $O_1 r$, parallèle à B'C. Menons par r une parallèle à BC, tout pôle situé sur cette ligne donnera un funiculaire passant à la fois par B et par C. Le pôle cherché sera donc sur cette ligne. Prenons sur elle un pôle d'essai O_2 et, à son aide, traçons pour les forces $F_1 \dots F_3$ un funiculaire passant par B. Leur résultante est connue et nous pouvons lui tracer une parallèle par A, qui sera coupée en m par le funiculaire. Joignons mB et AB. Menons $O_2 r'$ parallèle à mB , puis $r'O_3$ parallèle à AB. Ce sera le lieu des pôles des funiculaires passant par A et par B. Son intersection O_3 avec la droite $O_2 r$ sera le pôle que nous cherchons. On tracera donc le funiculaire ABC, qui, considéré comme polygone des résultantes, permettra l'application immédiate des procédés

de décomposition des §§ 36, 37 ou 38 (*fig.* 62 *c* et 62 *d*, pl. XV).

Considérons, par exemple, le panneau HI. La résultante qui agit sur les trois barres coupées suivant l'indication de la *fig.* 62 est donnée en $R_{3.4}$ (*fig.* 62 *a*). Sa décomposition est indiquée à côté (*fig.* 62 *c*), et n'a rien de spécial. Mais on pourra éviter une série d'épures séparées à l'aide de quelques observations.

La méthode des moments (§ 36) s'appliquera en prenant successivement, pour le calcul des membrures, les points H et I pour centres. Ainsi on aura $I_{GI} = \frac{R_{3.4} \times p}{r}$. Mais on peut procéder plus rapidement. Si $r > p$, traçons avec H pour centre ⁽¹⁾, et r comme rayon, un arc de cercle qui coupera le côté correspondant à $R_{3.4}$ en H'. Décomposons $R_{3.4}$ (*fig.* 62 *a*), en deux forces, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à HH'. Cette seconde nous donnera la valeur de I_{GI} . En effet, on remarquera que

$$\frac{R'}{R_{3.4}} = \frac{p}{r} \text{ d'où : } R' = R_{3.4} \frac{p}{r}$$

(1) En raison des petites dimensions obligées de la figure, nous avons reproduit le nœud H dans la *fig.* 62 *b* à une échelle double. De même, toutes les figures de détail suivantes sont à échelle double de celle de la *fig.* 62 *a*.

et conséquemment $R' = I_{GI}$. L'ensemble des tracés à faire pour obtenir ainsi toutes les valeurs de I et de S n'est pas long.

Si $r < p$, le cercle, décrit avec ce rayon r , ne coupe pas la résultante R. Dans ce cas, il est facile de remplacer R par deux composantes dont l'une passe par le centre H. On opérera alors sur l'autre composante comme on avait opéré sur R.

Pour avoir les valeurs de D dans les diagonales et de U dans les verticales, on peut se servir de celles de I de S qu'on vient de calculer. Traçons un faisceau de droites passant par un pôle quelconque, et parallèles successivement à toutes les membrures supérieures (*fig. 62 f*) et une autre de droites parallèles aux membrures inférieures (*fig. 62 e*). En portant sur chacune les valeurs de I ou de S qu'on vient de calculer, on pourra déterminer, en complétant une série de polygones à 4 ou à 5 forces, les valeurs de D et de V. Les résultats des deux doivent concorder et constitueront une vérification l'un de l'autre.

Ce tracé a cela de particulièrement avantageux que l'on peut déterminer une fois pour toutes et avec une très grande précision, les directions des droites passant par I et S (*fig. 62 e et 62 f*), ce qui conduit à des résultats

tats plus exacts qu'en menant des parallèles aux barres courtes.

49. — Nous passons à l'examen d'un arc à trois rotules pour pont, du type connu (*fig.* 63, pl. XVI) à voie supérieure. La rotule de la clef est en B.

La charge permanente donne des efforts qui peuvent être calculés par ce qui est dit au § précédent.

Les charges mobiles donneront dans les différentes barres des efforts qui atteindront des maxima dans certaines conditions que nous allons déterminer, en nous rendant compte de l'effet produit par une charge isolée qui parcourt l'arc, et venant de droite à gauche.

Joignons AB et CB et prolongeons ces droites. Toute charge P donnera sur les appuis A et C des réactions qui résultent de sa décomposition en P_c et P_a (*fig.* 33, pl. VII).

Considérons le panneau GI, et occupons-nous d'abord de la membrure supérieure. Nous pouvons calculer son effort en prenant le moment des forces extérieures autour de K. Tant que la charge P reste à droite de B, le tronçon ADG ne reçoit que la réaction en A. Elle est dirigée suivant AB et on voit qu'il en résultera un effort de tension sur GI. SI la charge P progresse vers

la gauche, son effet sera de même signe tant qu'elle n'aura pas atteint la verticale du point K_1 , qui est la rencontre de AK avec CB . Dès que ce point sera dépassé, l'effort sur GI changera de signe et deviendra une compression. On obtiendra conséquemment le maximum de la tension de GI en surchargeant à la fois toute la longueur comprise entre la verticale de K_1 et l'appui opposé C . Le maximum de la compression, au contraire, sera obtenu en étendant la surcharge sur la longueur DK_1 .

Le même raisonnement s'appliquera au tronçon de membrure inférieure HK , en utilisant le nœud G comme centre des moments. La verticale par G_1 sera la limite des surcharges, toutes celles situées à droite de ce point donnant une compression sur HK_1 , toutes celles situées à gauche, une tension.

Nous pouvons procéder de façon analogue pour les diagonales. La pièce GK , par exemple, se calculera en prenant les moments des forces extérieures autour de H' , rencontre des prolongements de GI et de HK . Ce point, joint à A , donnera, par la rencontre avec CB en H_1 , la limite des charges. Toute charge agissant à droite de H_1 donnera sur la diagonale GK une compression. Pour les charges agissant entre H_1 et l'appui A ,

il y a deux cas à considérer. Celles qui se trouveront entre H_1 et la section considérée, c'est-à-dire dans ce cas, en L et en I, ne donneront encore sur le tronçon ADGH qu'une force extérieure unique, la réaction en A. Son effet sera de produire sur GK une tension. Mais la section une fois dépassée, c'est-à-dire de G en D, le tronçon ADG subira l'effet de la charge P en même temps que de la réaction A. On en connaîtra l'effet sur GK plus simplement en considérant l'équilibre du tronçon IBK, sur lequel agit uniquement la réaction CB qui agit en B, Prenant toujours H' comme centre des moments, on voit que cette réaction produira sur GK une compression.

Mais si le centre H' , au lieu de se trouver au-dessus de la ligne CB, se trouvait au-dessous, le sens de l'effort sur la diagonale serait différent et cet effort serait de nouveau une tension.

Pour avoir les maxima sur la diagonale, on peut donc poser la règle suivante : Le maximum de compression sera obtenu en chargeant toute la partie de l'arc située au-delà du point H_1 . Si le centre H' est au-dessus de la ligne CB, on chargera aussi les nœuds compris entre la section considérée et l'appui du côté où se trouve la diagonale. La tension maxima, au contraire,

s'obtiendra si le centre H' est au-dessus de CB , en chargeant toute la partie de l'arc où se trouve la diagonale jusqu'au point H_1 . Si ce point est au-dessous, on ne chargera que la partie comprise entre H' et la section considérée.

Pour les montants, le procédé est identique, et les limites de charge seront aussi les mêmes que pour la diagonale placée à côté du montant, du côté de la rotule centrale. Ainsi, le montant GII aura la même limite de charge que la diagonale GK , seulement ses efforts seront nécessairement de signe contraire, et il en résultera que les charges qui doivent s'étendre de H_1 vers le montant considéré occuperont un panneau de plus que pour la diagonale.

Les longueurs chargées en vue d'obtenir les maxima de sens contraire sont toujours complémentaires par rapport à la longueur totale de l'arc.

Pour calculer les maxima des efforts dans toutes les pièces, il suffit donc de déterminer les réactions à droite et à gauche dues aux charges placées successivement aux différents nœuds. Quand ces charges sont égales entre elles, comme c'est le cas d'une surcharge uniformément répartie, le calcul se simplifie et le tracé s'exécute comme suit :

Portons en A une longueur Ad égale à l'unité, et menons dQ parallèle à BC. Joignant A à tous les points de rencontre de CB avec les verticales passant par les nœuds, nous aurons en Ae , de les réactions dues à une charge égale à l'unité, placée en E, de même en Ag , dg , celles dues à la charge G, etc... Les valeurs des réactions dues aux charges placées du côté opposé, aux points symétriques $E' G'$, seront de même de , Ae , et dg , Ag .

Traçons à partir d'un point A_1 (*fig. 63 a*, pl. XVI) une longueur A_1e' égale et parallèle à Ae , puis $e'g'$ égale et parallèle à Ag , et ainsi de suite. Nous formerons un polygone des réactions pour des charges égales à l'unité, que nous n'aurons plus qu'à multiplier par P pour avoir les réactions dues aux charges réelles. Sur ce polygone, nous pouvons, en effet, relever toutes les réactions partielles dues à des charges s'étendant d'un nœud à l'autre. Ainsi, pour la surcharge totale, la réaction en A sera A_1e'' , les charges en D et D' donnant de simples réactions verticales qui n'influent sur aucune partie de l'arc. Pour celle s'étendant de B en D' elle sera $l'e''$. Pour une charge partielle s'étendant de G en G', ce sera $e'g''$.

Comme les réactions en C sont symétriques

pour des charges symétriques, on voit que cette réaction pour les charges s'étendant de I en D' aura $A_1 i''$ pour valeur, et pour direction une ligne symétrique à $A_1 i''$ par rapport à la verticale.

Quand la charge P de chaque nœud sera connue, on pourra remplacer, dans le tracé précédent, l'unité Ad par la valeur de P. En tous cas, c'est une simple question d'échelle qui épargnera une multiplication.

Pour connaître les efforts dans chacune des barres, on pourra se servir d'un diagramme qui les donnera en fonction d'une réaction égale à l'unité. C'est ce qui a été fait *fig. 63 b* (pl. XVI). Sachant d'une part quels sont les nœuds qu'il faut surcharger pour avoir les maxima dans une barre donnée, sachant, d'autre part, quelle est la réaction que produit une charge placée aux divers nœuds, il devient facile de combiner méthodiquement les charges et les coefficients qui fourniront les maxima cherchés. Si, en effet, une charge P donne, en A ou en C, une réaction $R = \alpha P$, le coefficient α résultant du tracé Ad , Ae , $Af...$ de la *fig. 63*, et si une réaction $R = 1$ donne dans la barre considérée un effort β , on fera à volonté la somme des valeurs $\alpha\beta P$ correspondantes aux charges P de tous les nœuds qui contribuent au maximum.

En vue de cette application, le tracé de la *fig.* 63 *b* (pl. XVI) n'est pas entièrement suffisant. Il faut, en outre, pour les maxima dans les diagonales et les montants, faire le tracé analogue pour les réactions \mathfrak{R} résultant des charges appliquées aux nœuds de la moitié voisine de l'arc. Mais il n'est pas nécessaire de l'étendre pour chaque réaction à la totalité de l'arc. Chaque épure partielle n'aura besoin que d'être étendue aussi loin que le permet le tracé à l'aide de la seule réaction, comme nous le ferons voir dans une application numérique.

La *fig.* 63 *b* ne peut pas donner la valeur de la barre CD' aboutissant au nœud D' , car il faudrait pour cela connaître ou faire une hypothèse sur la valeur d'une force extérieure à appliquer en ce point. Cette force n'existe point, mais cela n'a pas d'inconvénient, les coefficients relatifs à cette barre n'ayant pas d'emploi.

Nous avons supposé que les charges s'appliquaient exclusivement aux nœuds. Mais il arrive presque toujours que ces charges sont produites par l'intermédiaire de pièces secondaires, des longerons. C'est ce qui a été indiqué déjà au § 41 et qui, ici, complique beaucoup la recherche des maxima absolus, les efforts provenant de la charge à droite et à gauche d'un point limite

étant de sens contraire et ayant des coefficients différents. Elle est facilitée par des considérations d'un ordre spécial, celles des *lignes d'influence*. L'espace ne nous a pas permis d'en parler ici, malgré l'usage qui commence à s'en répandre. Mais, en particulier pour les arcs dont nous nous occupons, les maxima maximorum diffèrent peu de ceux qu'on calculera suivant nos indications et, pratiquement, on n'aura pas d'avantage à opérer d'une façon plus précise.

S'il s'agit de charges uniformément réparties, donnant sur chaque nœud des poids égaux, il n'y a point d'hésitation : les nœuds à charger sont indiqués par les points limites. S'agit-il, au contraire, de charges isolées, ayant des valeurs différentes, comme celles des roues d'un train, il peut se présenter une infinité de cas. En passant d'un nœud au suivant, une roue peut, en raison du déplacement du groupe auquel elle appartient et tout en donnant des efforts de même signe sur la barre considérée, avoir un effet croissant ou diminuant. Il faudra donc placer les roues les plus lourdes là où elles produiront le plus d'effort sur la barre, et les moins lourdes là où cet effort, quoique de même signe, sera le plus faible. En général, le voisinage de la rotule du milieu donnera le plus grand effort, et c'est là

qu'il conviendra de concentrer les roues des locomotives. Ou encore ce sont les nœuds les plus voisins de la position limite, ce qui est en général le cas pour les diagonales et les montants. Mais là, dès qu'une roue dépasse le dernier montant, elle donne, par sa répartition sur le nœud suivant, au moyen du longeron, un effort de sens contraire. C'est à l'aide de quelques tâtonnements, rapidement faits d'ailleurs, que l'on s'assurera le mieux de la position à donner au train. Mais, nous le répétons, le problème des maxima ne se résout d'une façon complète qu'à l'aide des lignes d'influence que nous ne pouvons aborder ici.

CHAPITRE III

—

DÉFORMATIONS

50. — Toute construction, soumise à des efforts extérieurs, se déforme. La mesure de cette déformation est une fonction simple, proportionnelle au coefficient d'élasticité.

Ce coefficient, universellement désigné par E , représente, pour chaque matière, l'effort par unité de section qu'il faudrait lui appliquer pour allonger ou raccourcir la pièce de sa propre longueur.

L étant la longueur d'une pièce ; ΔL , son allongement (ou raccourcissement) sous un effort F ; Ω , sa section transversale, la définition qui précède conduit à la formule :

$$\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}.$$

On sait cependant que cette formule n'est

exactement applicable que dans des limites restreintes, tant que la limite d'élasticité de la matière n'a pas été dépassée.

Cette loi reconnue, on peut en déduire les déformations d'une construction dont on connaît les conditions de résistance.

La méthode la plus simple, le mieux en rapport avec les procédés de la statique graphique, est celle indiquée dès 1877 par M. Williot, alors conducteur des Ponts et Chaussées. Elle s'applique aux constructions triangulées et à celles que l'on peut y ramener, ainsi qu'on le fait presque toujours pour des types à lignes plus compliquées.

Considérons une portion de pièce reposant sur un appui absolument fixe et supposons que l'un de ses côtés, voisins de cet appui, a une direction invariable. Tel sera le côté OA (*fig. 64, pl. XVII*) qui, bien que libre de varier de longueur, conservera par hypothèse sa direction. Les trois pièces OA, AB, BO subissent, sous l'influence d'efforts quelconques, des variations de longueur Δa , Δb , Δc . Le point A sera donc venu, après déformation, en un point A₁. En même temps, la longueur OB sera devenue OB₃. Supposons, pour un instant, que l'assemblage qui existe en B soit annulé. Dans ce cas, la tige AB se serait dé-

placée en A_1B_1 ; mais, par suite de sa variation de longueur, le point B_1 serait venu en B_2 . La liaison subsistant en réalité, les points B_2 et B_3 doivent se confondre et, pour cela, les tiges auront dû pivoter autour de leurs autres extrémités A_1 et O . Les points B_2 , B_3 auront décrit autour de A_1 et de O de petits arcs de cercle qui se confondent, vu leur petitesse, avec des perpendiculaires à A_1B_2 et à OB_3 . Le point M pourra être ainsi déterminé et sera la position définitive du sommet B , après la déformation calculée.

On voit qu'il est possible de déterminer le déplacement du point B_1 en traçant seulement la figure $BB_1B_2MB_3$. A cet effet, d'un point quelconque, portons, en sens et en direction, les allongements positifs ou négatifs des barres OR , OA et de l'extrémité de l'un d'eux, B_1 par exemple, portons l'allongement de AB . Aux points B_2 et B_3 ainsi déterminés, élevons des perpendiculaires aux derniers éléments reproduits et nous obtiendrons le point M . Le déplacement cherché du point B est BM .

Ce tracé peut être reproduit successivement pour tous les sommets d'un système triangulé et on obtient rapidement, par une suite de tracés, les nouvelles positions de tous les nœuds d'un réseau quelconque.

S'il s'agit d'une structure ayant deux points fixes, tels que les retombées d'un arc par exemple, on devra trouver, en partant de l'un d'eux, comme vérification, après avoir déterminé successivement le déplacement des nœuds intermédiaires, que le déplacement du deuxième point est nul. En général, cela n'a pas lieu, parce que les barres aboutissant à l'origine varient toutes de direction. Mais si l'une quelconque des barres d'un réseau a une direction invariable (comme, par exemple, la verticale du milieu, dans une ferme symétrique chargée symétriquement), on devra trouver des déplacements nuls ou dont le sens est connu d'avance, aux points d'arrivée.

51. — Appliquons le procédé qui vient d'être indiqué à la déformation d'une ferme triangulée quelconque (*fig.* 65, pl. XVII).

Nous supposons que, sous une charge déterminée, les efforts dans chaque barre ont été calculés et que les sections de ces barres étant connues, on a calculé aussi pour chacune la valeur

$$\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}.$$

Supposons, pour commencer, que la barre 2 conserve sa direction, le point A étant fixe. Nous portons (*fig.* 65 *a*, pl. XVII) en A_1D_1 la longueur Δ_2 . Nous faisons ensuite A_1c' parallèle à

la barre 1 et égal à Δ_1 , puis $D_1c'_1$ égal et parallèle à Δ_3 . Elevant en c' une perpendiculaire à A'_1c et en c'_1 une perpendiculaire à $D_1c'_1$, nous trouvons le point C_1 . La ligne A_1C_1 (qui n'a pas été tracée), serait en grandeur et en direction, le déplacement du point C.

Connaissant le déplacement de C et de D, nous procédons à la recherche de celui du point E. Pour cela, nous faisons D_1e' égal et parallèle à Δ_5 , puis $C_1e'_1$ égale et parallèle à Δ_4 . Les perpendiculaires à ces lignes, élevées en e' et e'_1 , se coupent en E_1 . La ligne A_1E_1 serait le déplacement du point E.

Procédant ainsi, on trouve les points F_1 , G_1 , H_1 , I_1 et B_1 dont les distances de A sont les déplacements des nœuds portant les mêmes lettres.

Il nous reste à ramener le point B_1 sur la ligne que la nature de la construction le force à parcourir. S'il s'agit d'une poutre placée sur des appuis de niveau, le point B se déplacera en réalité sur la droite AB. Si nous traçons par A_1 une horizontale et que, de B_1 , nous abaissions une perpendiculaire en B_2 , nous aurons, en A_1B_2 , le déplacement horizontal vrai du point B.

Ce mouvement B_1B_2 du point B est, en réalité, une rotation autour de A, d'amplitude assez pe-

tite pour que l'arc décrit puisse être considéré comme une verticale. Il est facile de voir que chaque sommet décrira par cette même rotation un arc égal autour de A. Portons sous B en BB' une longueur égale à B_1B_2 et joignons $B'A$. L'angle BAB' nous donnera les déplacements de chaque point. Pour le point G par exemple, le rayon de l'arc parcouru est AG. Il suffit de décrire une portion de cet arc et, par son extrémité G'_1 , élever la perpendiculaire G'_1G' . Cette longueur sera la valeur de son déplacement normalement au rayon AG. Du point G_1 menons G_1q égal à G'_1G' et normal à AG, le point q donnera, par rapport à A_1 , le déplacement réel du point G.

Le même tracé se répéterait pour tous les autres nœuds de la poutre.

Souvent il est peu intéressant de tracer l'arc de rotation dans sa direction réelle et on pourra se contenter d'abaisser de chaque sommet une verticale qui mesurera dans l'angle BAB' la rotation cherchée. L'erreur sera toujours faible et d'autant plus négligeable que les points considérés seront plus éloignés de A et les droites, telles que AG, plus voisines de l'horizontale.

52. — Avant d'indiquer un procédé plus complet, nous examinons encore le cas d'une ferme symétrique, symétriquement chargée (*fig.* 66, pl. XVIII), dont on demande les déformations verticales.

Les valeurs ΔL ont été déterminées au préalable.

Nous parlons du milieu, supposant le point A fixe et AB invariable de direction. Le point B se déplace de $A'B' = \Delta_1$.

AC étant comprimé, C se déplacera vers A : nous placerons Δ_2 à droite de A', montant vers la droite. Bc étant comprimé, fera déplacer C vers B : Δ_3 sera placé à droite de B', en descendant. Le déplacement de C sera A'C'. On trouvera ainsi successivement les points D, E'.....H'.

En réalité, le point H reste à son niveau. Conséquemment, à tous les déplacements il faut ajouter la longueur H'H₁ qui ramène ce point à sa place sur l'horizontale passant par A'. Ainsi, l'abaissement du point A sera = H'H₁. Celui du point B sera A'B' + H'H₁. Celui du point G sera H'H₁ - G'G₁. On obtiendra toutes ces valeurs en menant par H' une horizontale et en mesurant les distances verticales des points A, B'.....F, G' à cette horizontale.

53. — Pour arriver à une solution plus complète du problème des déformations, nous rappelons ici ce qui concerne le centre instantané de rotation.

Considérons un système rigide, plan, quelconque ABCD (*fig.* 67, pl. XIX). Supposons que

ce système se déplace, en restant dans son plan, et qu'il vienne en $A'B'C'D'$. Ce mouvement pourra toujours être considéré comme une rotation autour d'un certain point.

Joignons, en effet, deux points homologues A, A' et deux autres D, D' . Sur le milieu de ces deux droites, élevons des perpendiculaires (non tracées dans la figure) : elles se couperont en O . Ce point est le centre autour duquel aura tourné la figure. Joignons, en effet, ce point aux sommets considérés AD et $A'D'$. Nous aurons évidemment deux triangles égaux, ayant leurs trois côtés égaux deux à deux, OAD et $OA'D'$, dont le second pourra être obtenu en tournant le premier autour de O , d'un angle AOA' . Tous les sommets de la figure joints à O donneraient de même des triangles égaux et qui peuvent, par conséquent, être obtenus, le second par une rotation du premier autour du centre commun O . Toute la figure est donc évidemment dans ce cas.

Si ce déplacement est extrêmement petit, le chemin AA' , comme tous les autres similaires, peut être considéré comme un élément de droite, perpendiculaire au rayon OA . Dans ce cas, le point O prend le nom de centre de rotation *instantané*.

Tous les déplacements DD' , BB' , CC' sont à

considérer de même. Ils s'opèrent autour de O . L'angle décrit par leurs rayons est toujours le même et leur longueur est évidemment proportionnelle aux rayons OD , OB , OC .

Prenons à partir d'un point quelconque P (*fig. 67 a*, pl. XIX) des longueurs égales ou proportionnelles à ces déplacements, qui leur soient parallèles et de même sens qu'eux, à partir de P . Joignons les extrémités de ces longueurs. Nous aurons ainsi construit une série de triangles Pab , Pbc , Pcd , etc., qui auront chacun deux côtés à la fois proportionnels et perpendiculaires aux triangles OAB , OBC , etc. Ils seront, par conséquent, semblables aux premiers et leur troisième côté sera perpendiculaire au troisième côté du premier triangle, ad à AD , ab à AB , etc. Il en résulte que la figure $abcd$ a tous ses côtés proportionnels et perpendiculaires aux côtés homologues de $ABCD$.

Si l'un des points de $ABCD$ a un déplacement nul, ce point fera partie de $abcd$, au même titre. Ce sera, en ce cas, le centre autour duquel la figure aura tourné.

Les déplacements de tous les autres points de $ABCD$ auront alors forcément lieu suivant une normale à la droite qui les joint au point dont le déplacement est nul.

54. — Ces considérations permettent de résoudre complètement le problème des déformations d'un système triangulé.

Soit un tel système ABC....I (*fig.* 68, pl. XIX) qui repose sur deux appuis A et I. Il peut s'y appuyer de plusieurs façons que nous avons indiquées au § 24. Nous pourrions, pour nos besoins actuels, toujours admettre que, temporairement au moins, l'un des appuis, A par exemple, est fixe.

L'autre appui peut être ou bien fixe, ou bien se trouver astreint à ne pas quitter une trajectoire déterminée. L'une ou l'autre de ces conditions suffisent pour connaître tous les déplacements des sommets du système. Si les deux points A et I sont fixes, nous nous trouvons toutefois dans le cas d'un arc continu qui donne une poussée sur ses appuis, que nous n'avons pas à étudier ici.

Nous supposons donc que le point I est astreint à se déplacer suivant une trajectoire MN qui sera, en général, droite. Elle peut être courbe; mais, vu la faiblesse de ces déplacements, son mouvement pourra toujours, dans la pratique, se ramener à un chemin rectiligne.

Nous traçons les déformations (*fig.* 68 a, pl. XIX), comme il a été indiqué au § 51, et

nous reconnaissons que le point I aurait parcouru le chemin $A'I'$. Mais ce point ne peut avoir suivi qu'une parallèle à MN et il faut le ramener sur cette droite par une rotation autour de A. Ce mouvement sera figuré par une perpendiculaire à AI, qui est $I'I''$ et, en fin de compte, le déplacement réel de I sera $A'I''$.

Or, remarquons que ce mouvement aurait été également produit si nous avions donné, tout d'abord, à la ferme AB.....I la rotation $I'I''$, et si nous l'avions ensuite déformée sous l'effet des charges. Les indications du § 53 fournissent le moyen de tracer les déplacements de tous les points sous cette première rotation. Menons par A' une droite $A'I_1$ égale et parallèle à $I'I''$ et sur cette droite, considérée comme homologue de AI, traçons une figure semblable à celle de la ferme considérée. Les droites qui joindront chacun de ses sommets à A' (droites que nous ne traçons pas pour ne pas compliquer la figure), seront les déplacements de ces points pour la rotation $A'I_1$ de sens inverse à $I'I''$. Si donc nous joignons deux points correspondants B_1 et B' par exemple, cette droite sera la résultante des deux mouvements B_1A' et $A'B'$, c'est-à-dire le déplacement réel du point B sous les deux mouvements.

Les déplacements dans l'espace de tous les

sommets seront donc, en sens et en longueur, B_1B' , C_1C' , H_1H' , I_1I' .

55. — Le problème le plus fréquent, relatif aux déformations, consiste à déterminer la flèche d'une poutre de pont sous une surcharge donnée. Il conduit à un tracé très simple.

Soit AB M (*fig.* 69, pl. XX), une poutre de pont dont la charge et la surcharge sont connues et où, conséquemment, les efforts dans chaque barre et les valeurs ΔL ont pu être calculés.

Prenons comme barre de direction invariable celle du milieu GF et comme point fixe le nœud ou sommet G .

Le tracé des déformations s'opèrera comme précédemment, mais en allant moitié à droite, moitié à gauche. On arrive ainsi à trouver les points A' et M' qui donnent les déplacements respectifs de ces points par rapport à G .

Abaissons les ordonnées verticales par A et par M et projetons sur ces ordonnées les points A' et M' en A_1 , M_1 . Joignons ces deux points par une droite. Projetons de même tous les points B, C' K' sur les verticales passant par les nœuds C, E ... M . On voit tout de suite que les distances de ces points à la droite A_1M_1 donnent les abaissements verticaux de chacun d'eux, car ce tracé revient à prendre pour axe de coordonnées la

ligne oblique A_1M_1 au lieu de l'horizontale passant par G' , les extrémités de cette ligne étant relevées de la quantité verticale dont chaque point s'est déplacé par rapport à G .

Le tracé polygonal $A_1C_1E_1\dots M_1$ est le polygone des flèches de la membrure supérieure de la poutre qui était droite avant la déformation. On tracerait de même le polygone des flèches de la membrure inférieure $A_1B_1D_1F_1\dots M_1$. Il ne diffère du précédent que de la valeur du raccourcissement des montants verticaux, ce qui résulte du mode même du tracé du polygone des déformations.

56. — Nous donnerons encore le tracé des déformations dans une ferme arquée à trois rotules, qui est, comme nous l'avons dit, calculable par les seules considérations de la statique.

La ferme constituée par les deux moitiés ABF , FKL (*fig. 70*, pl. XXI) est chargée d'une façon quelconque et l'on a déterminé pour chaque barre la valeur de ΔL . Les retombés A et L sont fixes et à rotules. Il s'agit de déterminer le déplacement du point F qui est la rotule de jonction.

Considérons d'abord chacune des moitiés AF et FL comme indépendantes, quoique soumises

aux efforts connus. Prenant O pour origine, nous tracerons, à partir de ce point, d'abord les déformations de AF , en supposant la barre AB de direction invariable, puis de même les déformations de FL , en supposant IL invariable. Nous obtiendrons ainsi pour déplacement du point F , d'une part, OF'_1 et, d'autre part, OF'_2 .

En réalité, le point F , pour conserver le contact entre les deux moitiés de la ferme, aura tourné autour de A pour la moitié de gauche, autour de L pour la moitié de droite, décrivant des éléments d'arc remplaçables par des normales à AF et LF . Si nous menons par F'_1 et F'_2 ces normales, nous trouverons le point F'' dont la position, par rapport à O , donnera le déplacement réel du point F .

Pour rester dans la méthode indiquée plus haut et en vue de déterminer les déplacements de chaque point, nous portons les longueurs F'_1F'' en F''_1O , et F'_2F'' en F''_2O , égales et parallèles. Elles représenteront le mouvement de rotation de chaque moitié d'arc, supposé antérieur à la déformation. Les déplacements vrais des différents sommets seront alors, en grandeur et en direction, B''_1B' , C''_1C' $F''_1F'_1$ pour la moitié AF et $F''_2F'_2$, G''_2G' ... pour la moitié de droite.

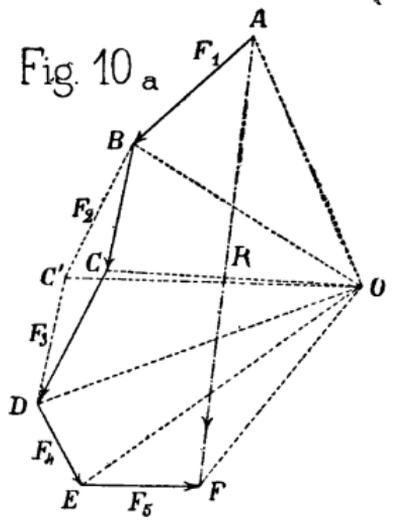
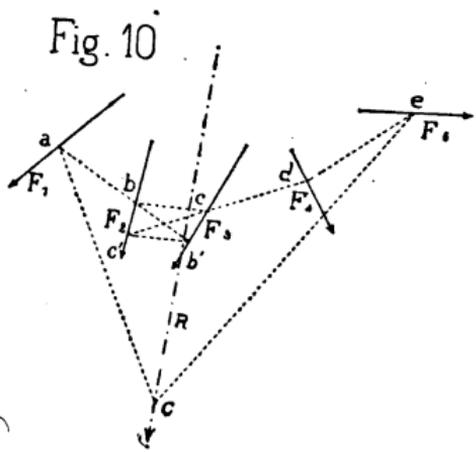
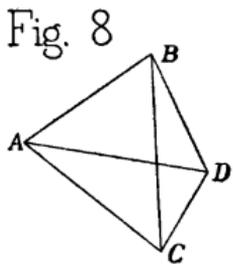
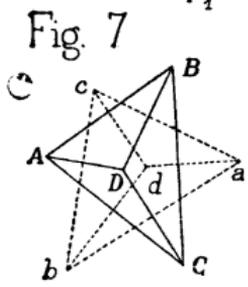
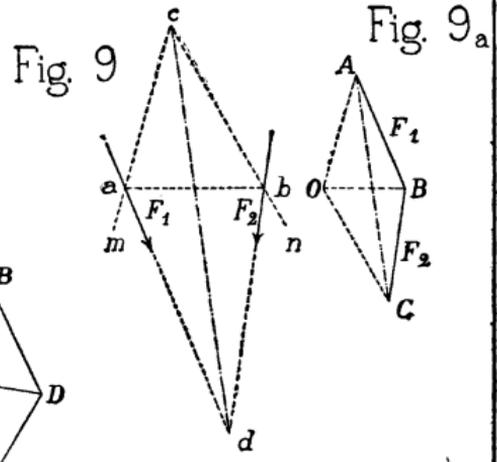
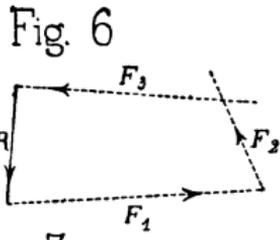
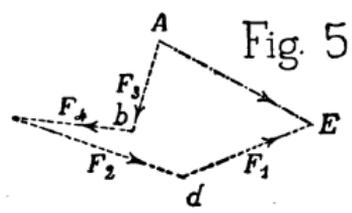
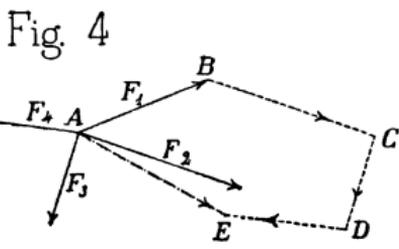
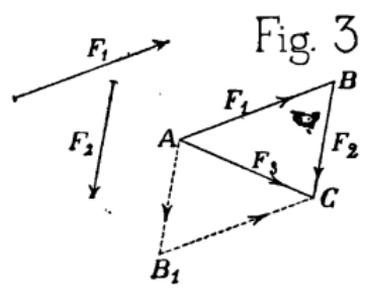
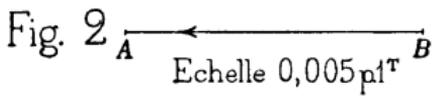
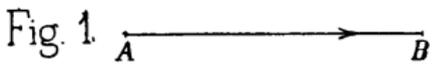
On remarquera que $F''_1F'_1$, $F''_2F'_2$ et OF'' sont

trois lignes égales et parallèles qui, toutes trois, donnent le même déplacement du point F.

57. — Il arrive qu'un système triangulé est composé non-seulement de barres simples, mais qu'une ou plusieurs d'entre elles sont, à leur tour, composées d'éléments multiples. Telle, par exemple, une grue dont la flèche est une poutre en treillis et le ou les tirants, des barres simples. Telles encore des fermes Polonceau ou autres, dont les arbalétriers sont composés de tronçons successifs, chacun desquels est une poutre composée, plus petite.

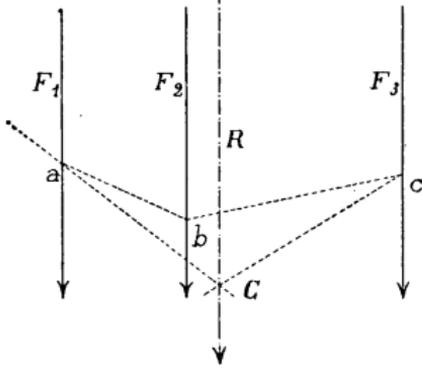
On pourra toujours considérer d'abord ces éléments composés comme des barres droites réunissant leurs extrémités et les calculer séparément, y faisant intervenir la flexion aussi bien que l'effort longitudinal. On pourra ensuite tracer le diagramme des déformations séparément pour chaque portion composée et y faire entrer la variation de longueur de la droite qui la remplacera. Nous nous bornerons à donner, dans les applications numériques, l'exemple d'un de ces cas de construction composée.

PLANCHES



THE
JOHN CRERAR,
LIBRARY.

Fig. 11



$$\begin{aligned} AB &= F_1 \\ BC &= F_2 \\ CD &= F_3 \\ AD &= R \end{aligned}$$

Fig. 11_a

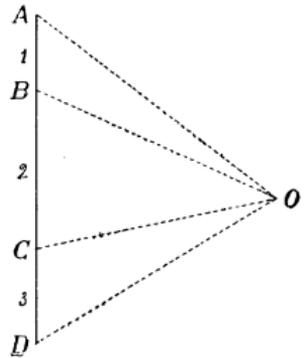


Fig. 12

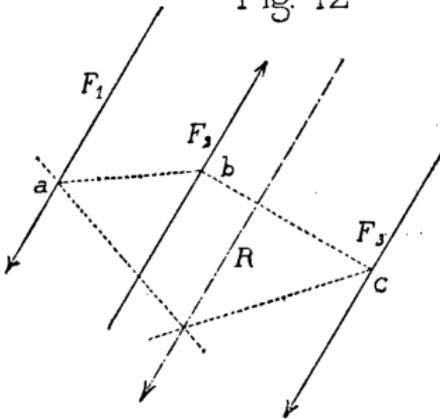


Fig. 12_a

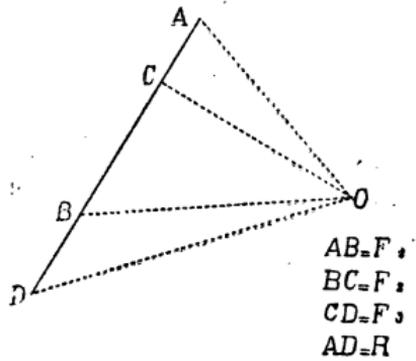


Fig. 13

n forces parallèles

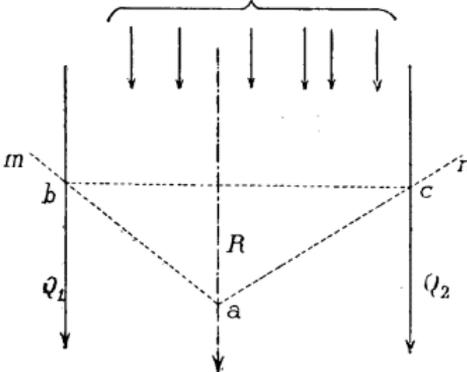
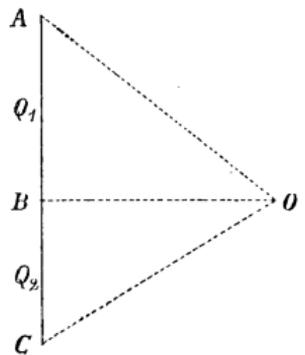


Fig. 13_a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 14 a

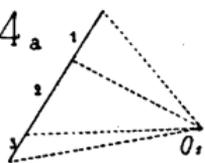


Fig. 14

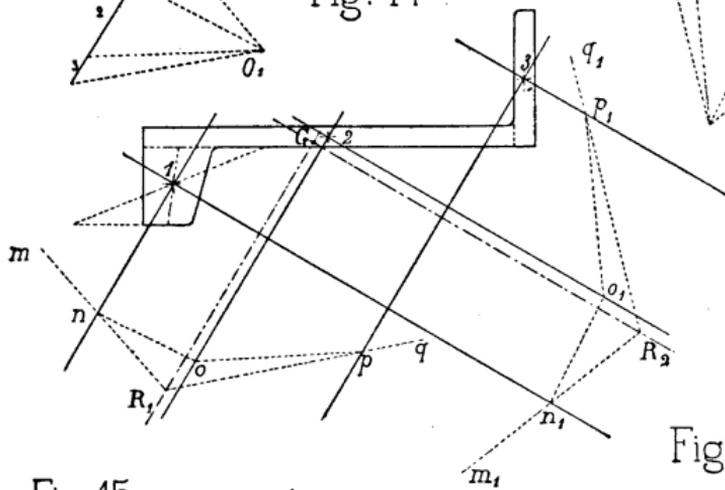


Fig. 14 b

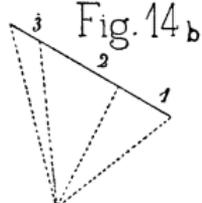


Fig. 15

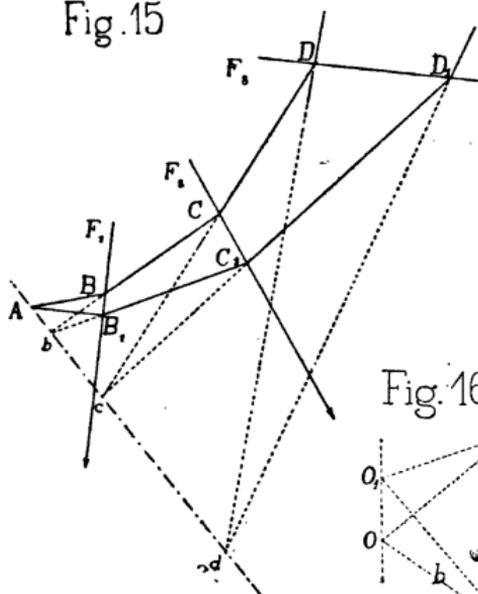


Fig. 15 a

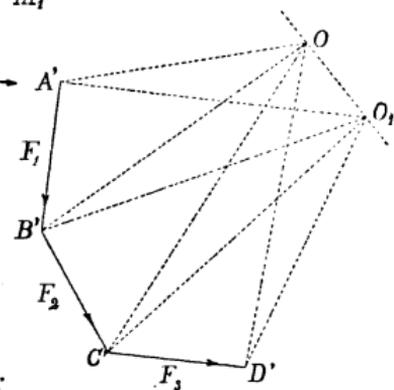


Fig. 16

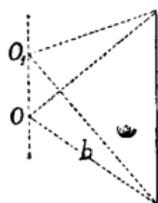


Fig. 16 a

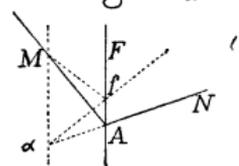


Fig. 17

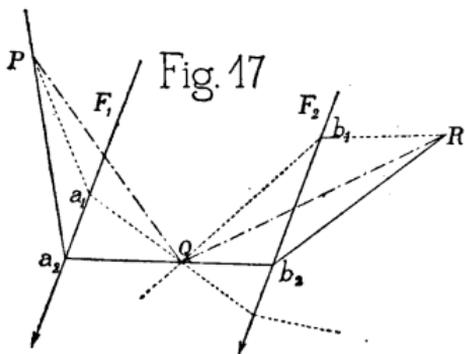
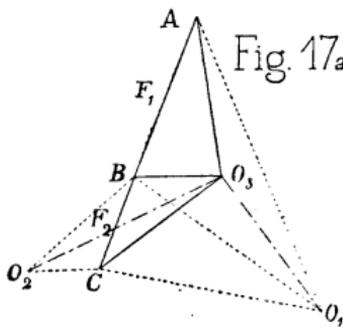


Fig. 17 a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 21

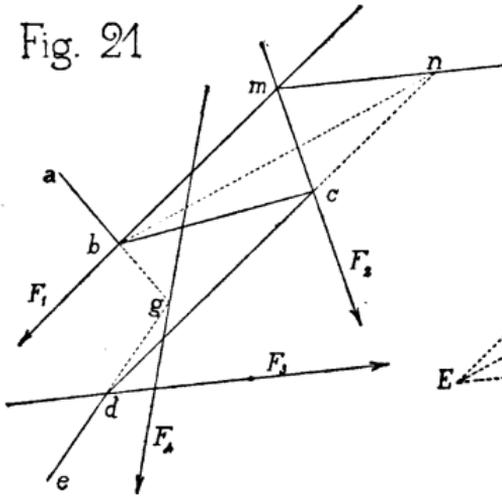


Fig. 21 a

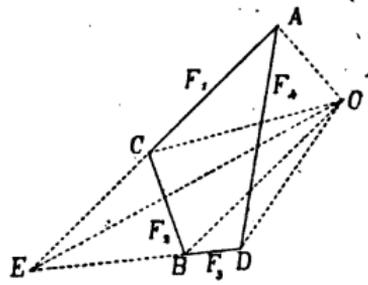


Fig. 22

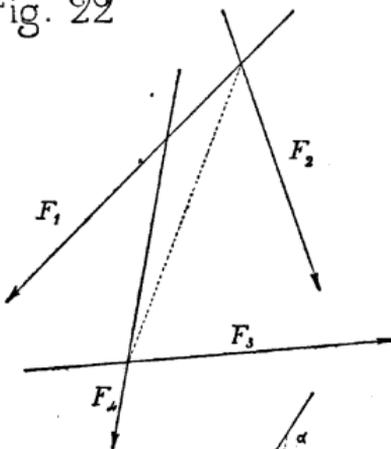


Fig. 22 a

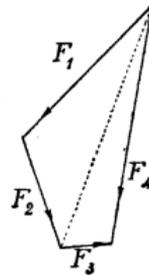


Fig. 24

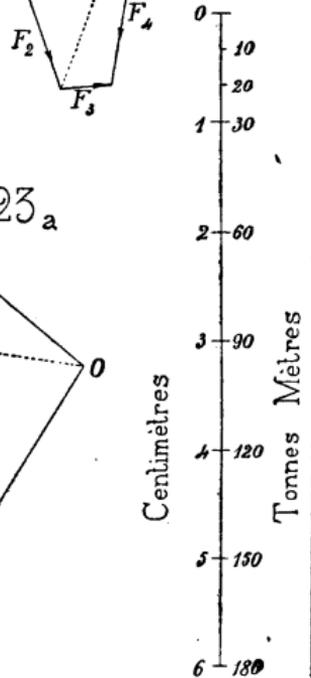


Fig. 23 a

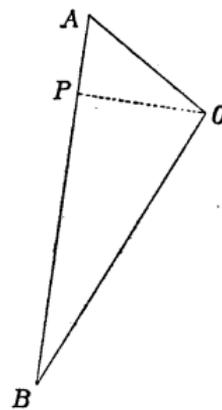
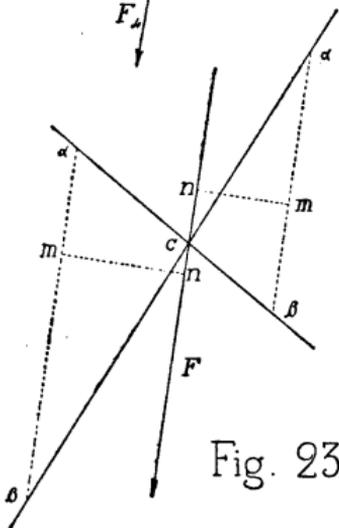


Fig. 23



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 25

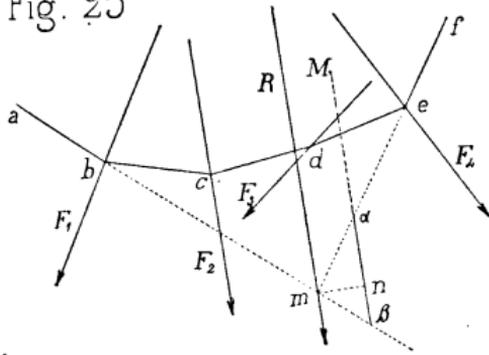


Fig. 25_a

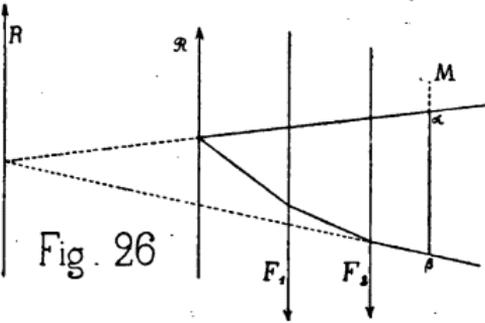
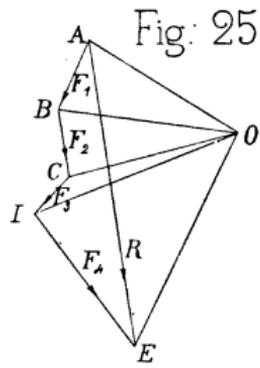


Fig. 26

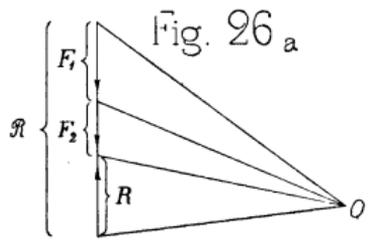


Fig. 26_a

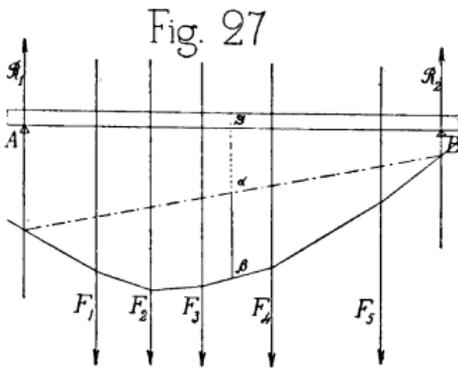


Fig. 27

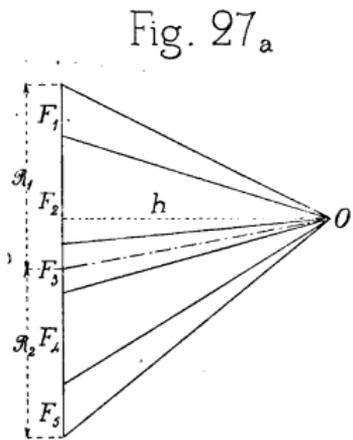


Fig. 27_a

Fig. 28

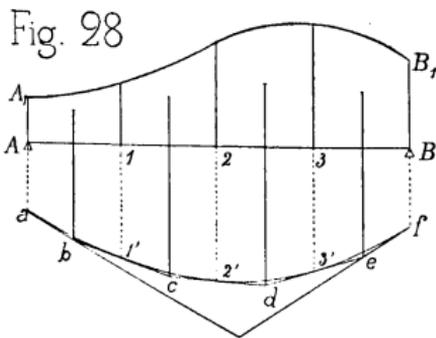
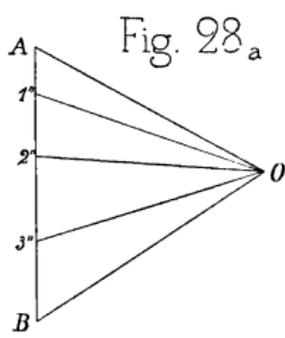
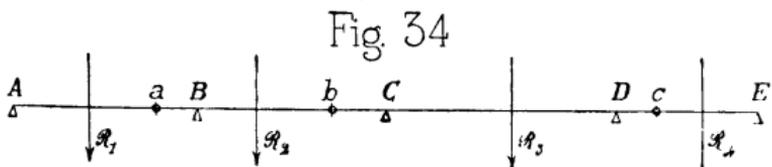
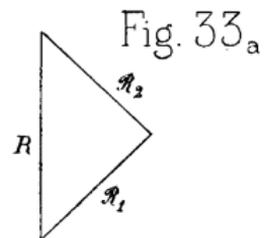
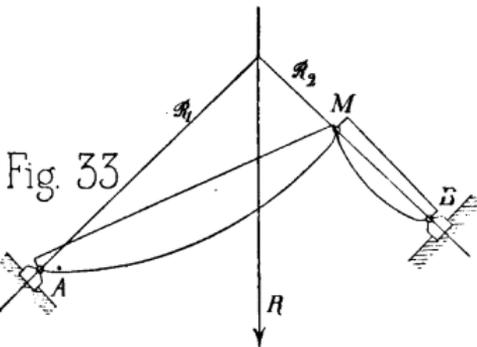
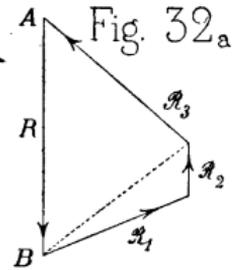
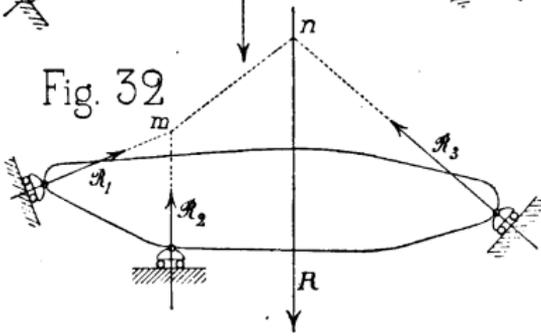
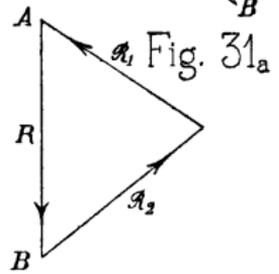
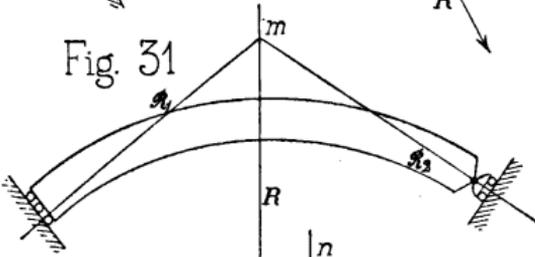
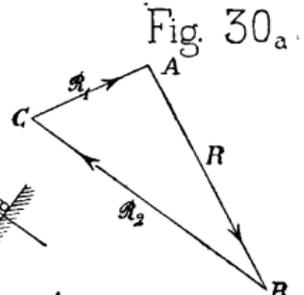
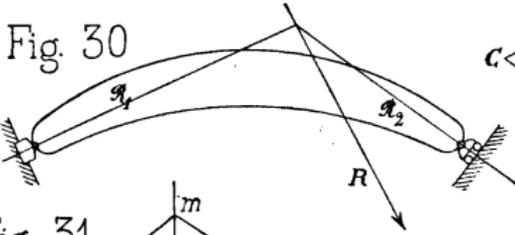
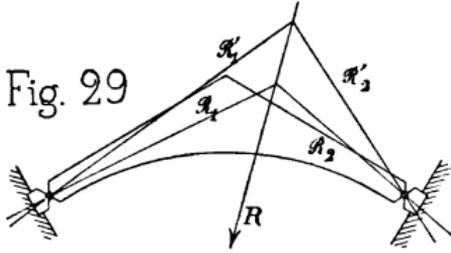


Fig. 28_a



THE
JOHN CRERAR,
LIBRARY.



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 35

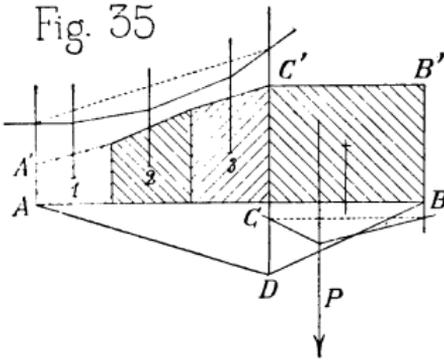


Fig 35 a

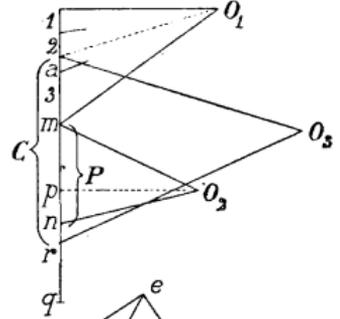


Fig. 36

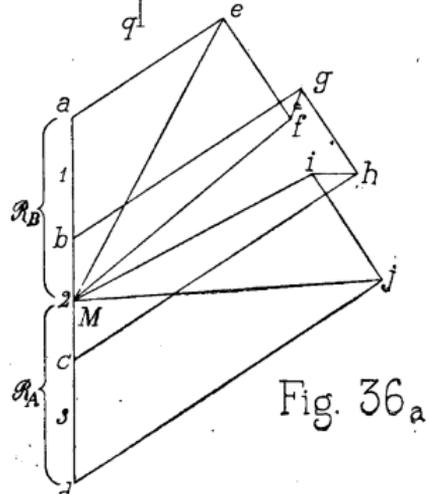
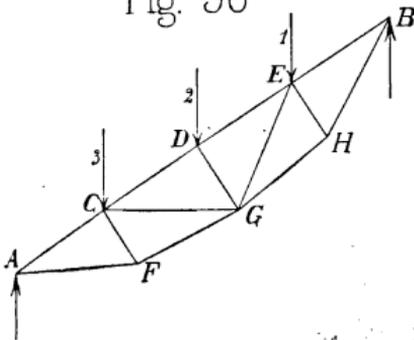


Fig. 37

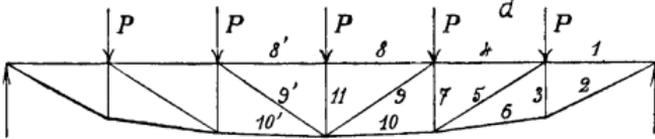


Fig. 37 a

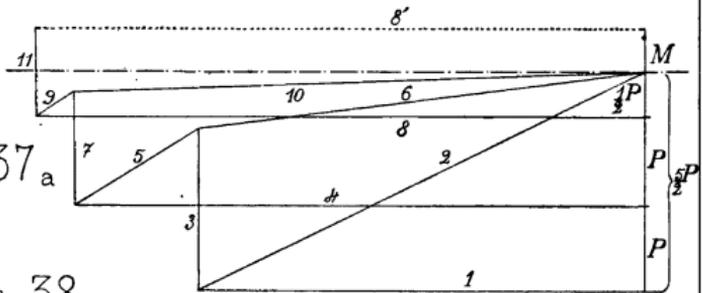


Fig. 38

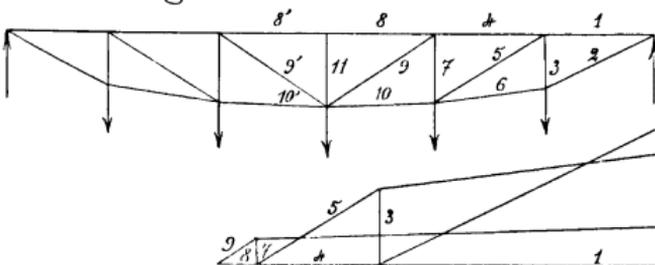
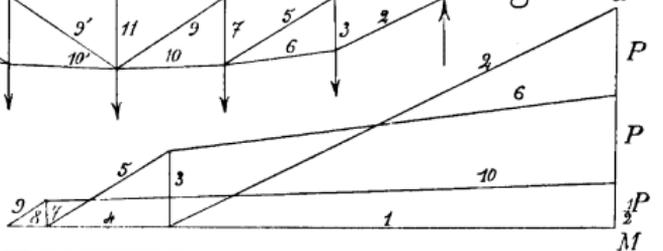


Fig. 38 a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

Fig 39

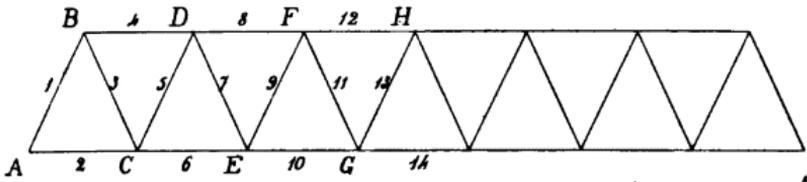


Fig. 39_a

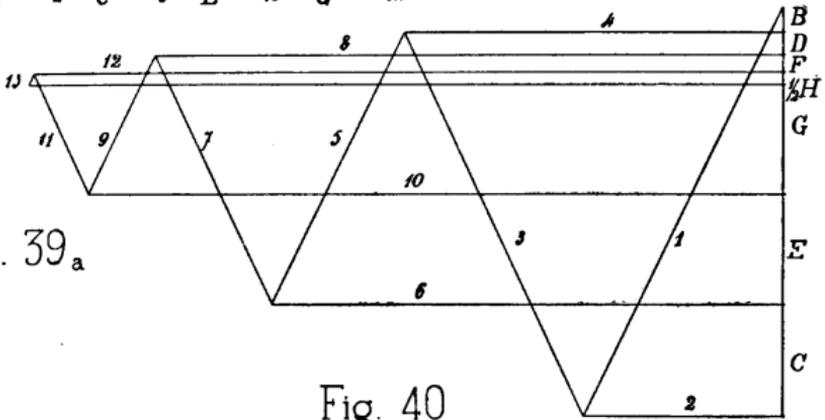


Fig. 40

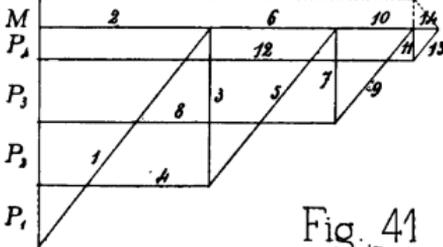
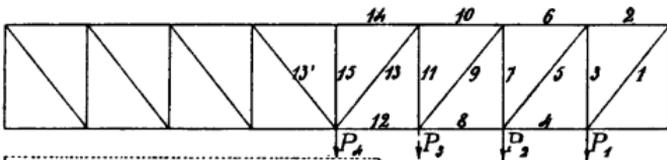


Fig. 40_a

Fig. 41

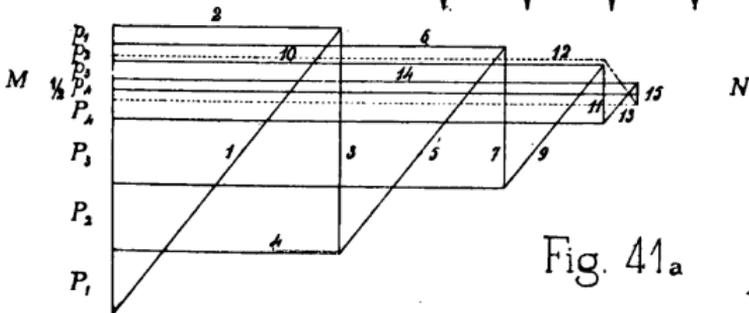
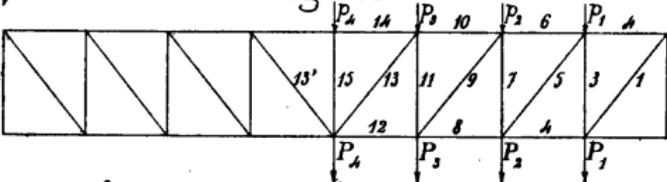


Fig. 41_a

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 42

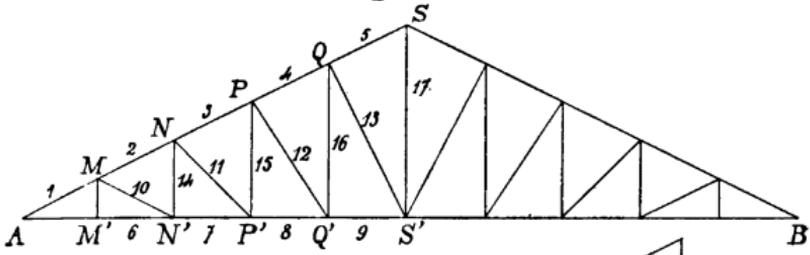


Fig. 42a

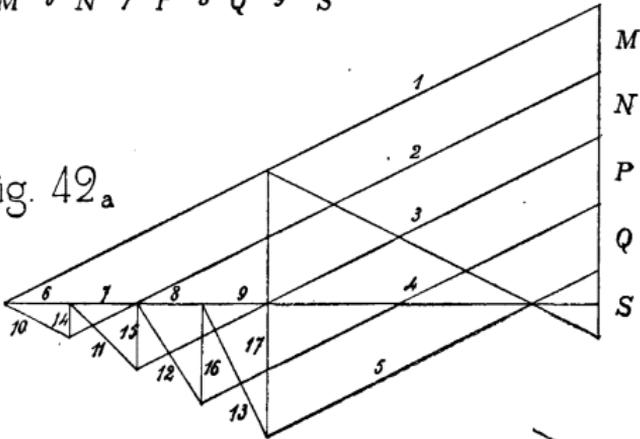


Fig. 43

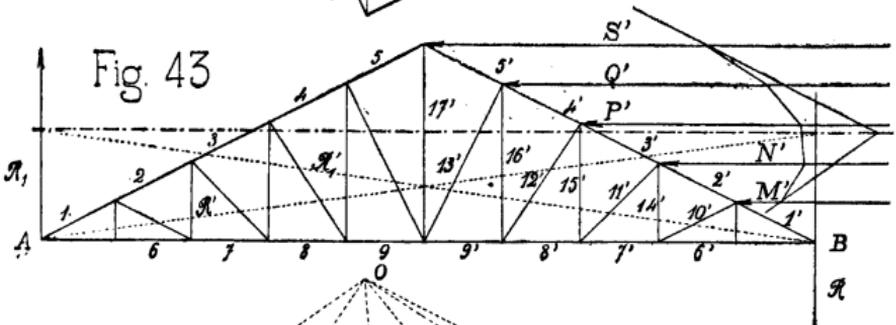


Fig. 43a

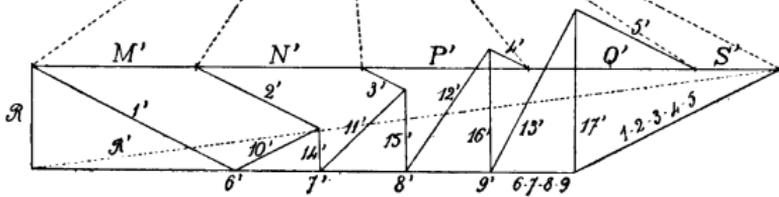
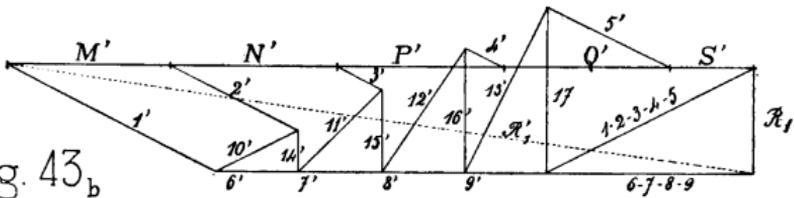


Fig. 43b



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 44

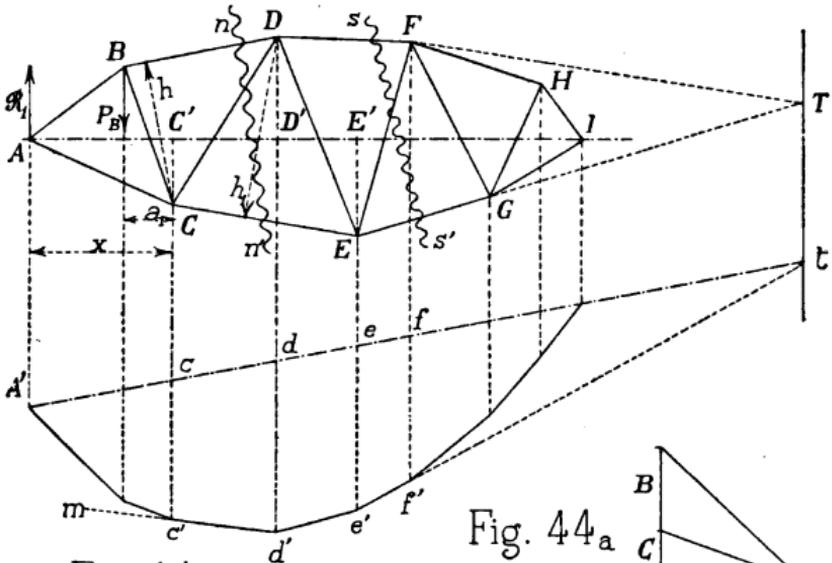


Fig. 44b

Fig. 44a

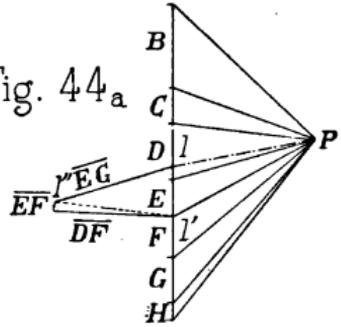


Fig. 45

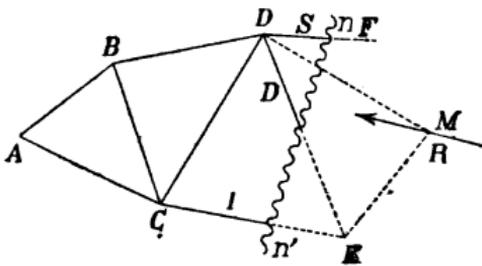


Fig. 46

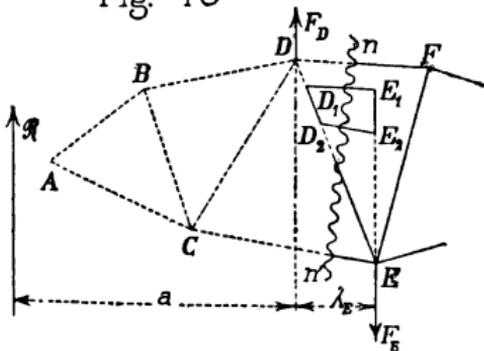


Fig. 46a

Fig. 45a

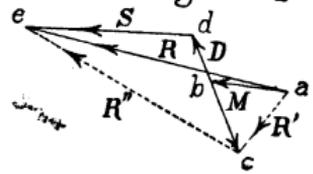
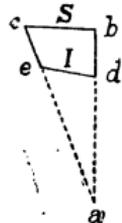
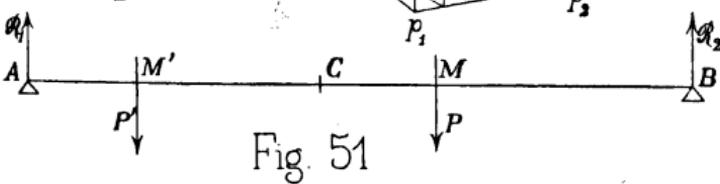
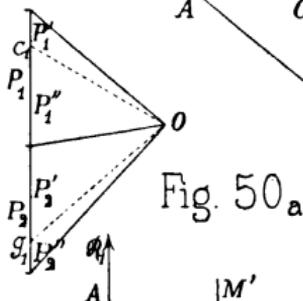
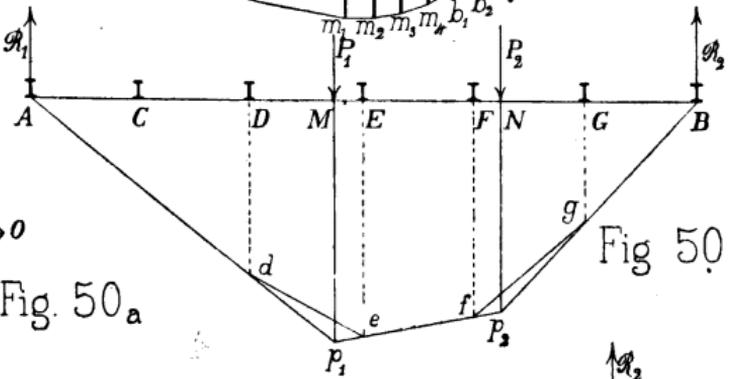
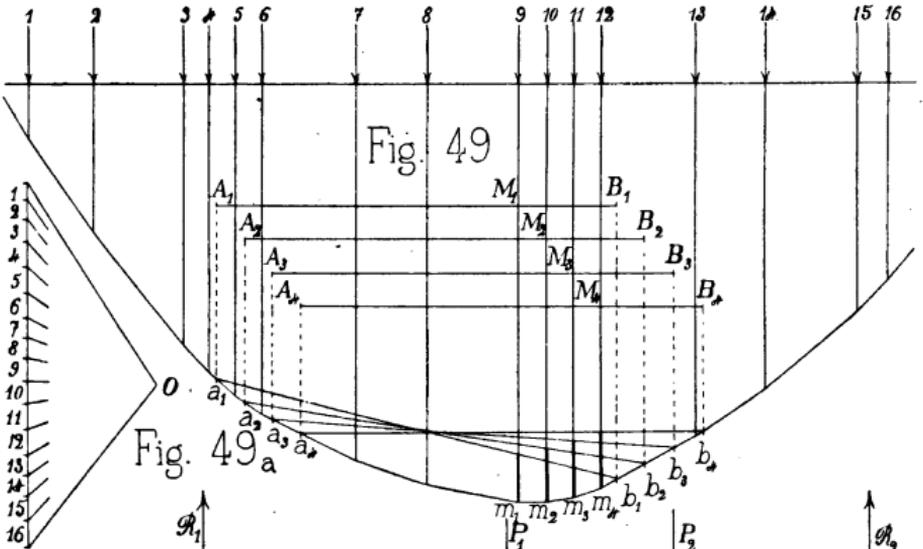
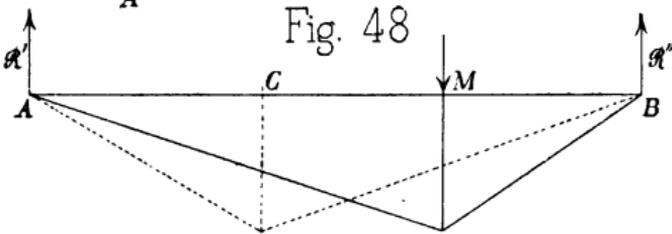
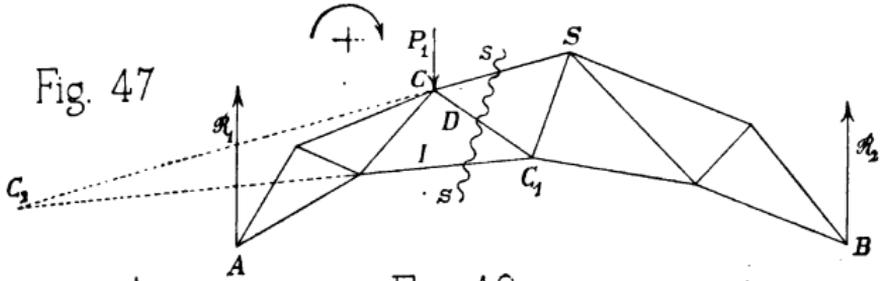


Fig. 46a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 52

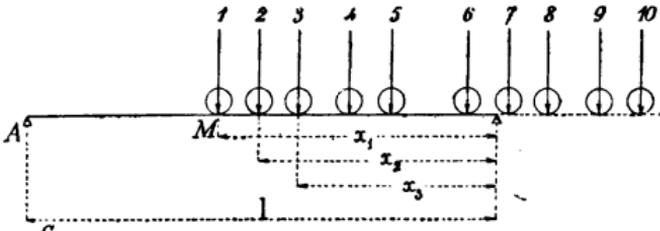


Fig. 53

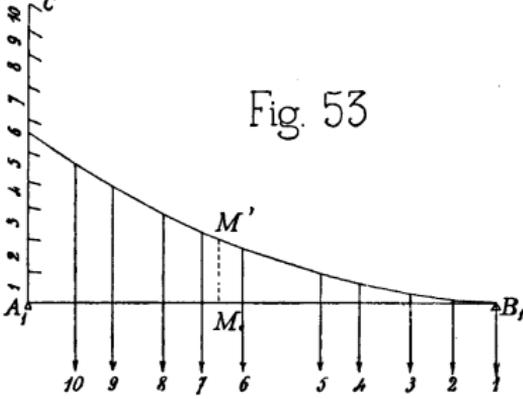


Fig. 55

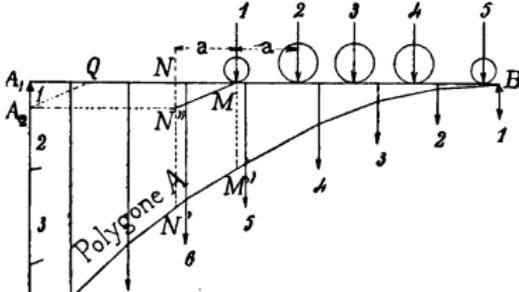


Fig. 56

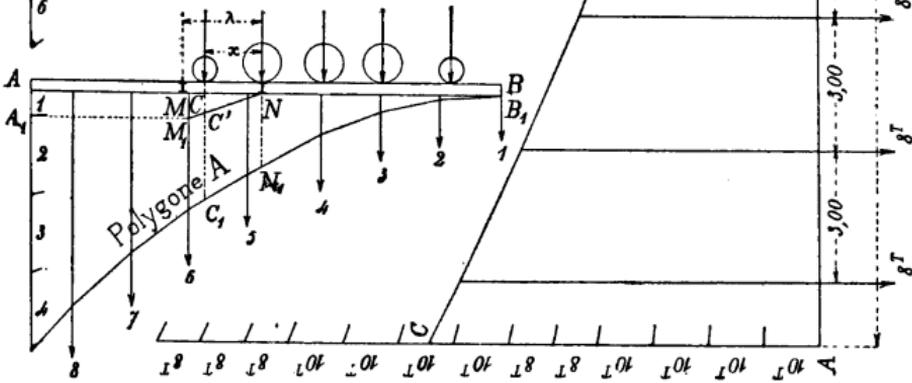


Fig. 54
Echelle des Longueurs 0^m004 p 1^m
Echelle des Forces 0^m005 p 10^r

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 57

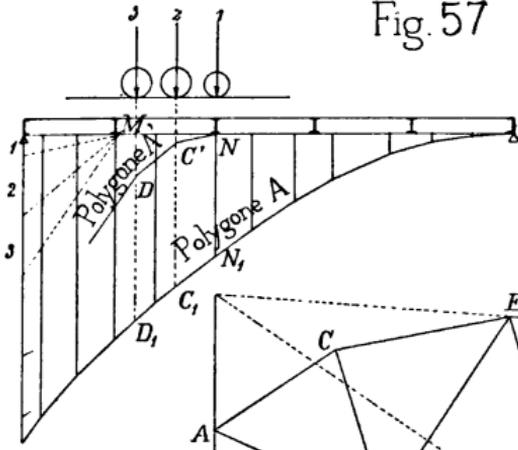


Fig. 58

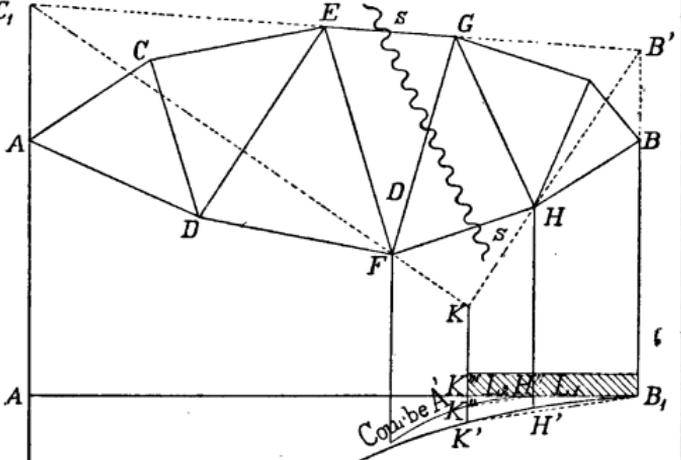


Fig. 58_a

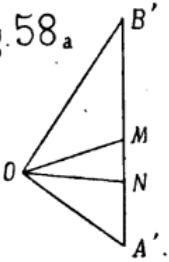


Fig. 59

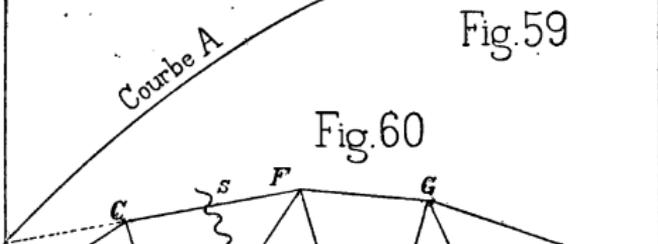


Fig. 60

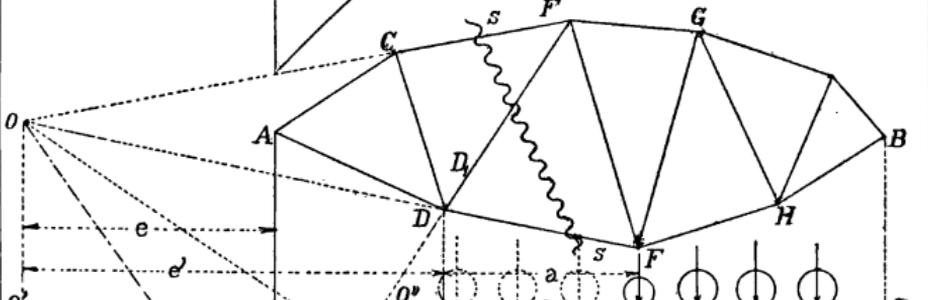


Fig. 60_a

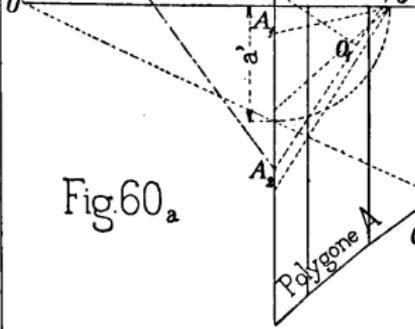
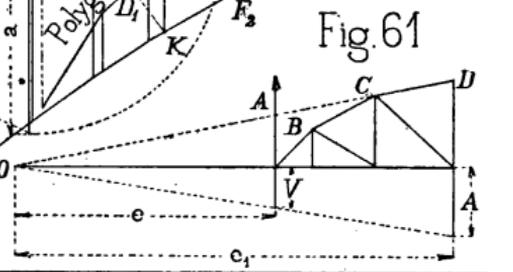


Fig. 61



THE
JOHN CRERAR.
LIBRARY

Fig. 62

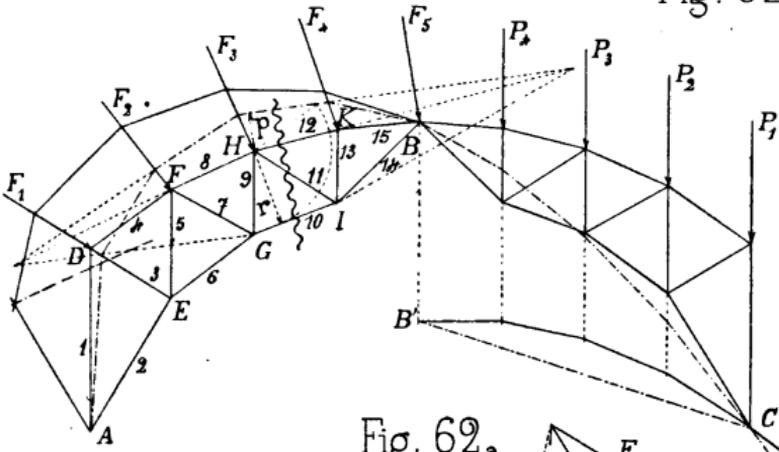


Fig. 62a

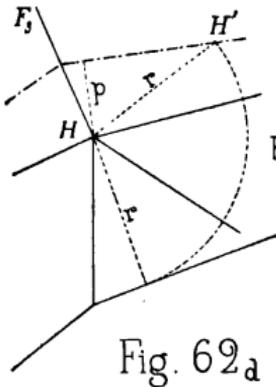


Fig. 62b

Echelle double

Fig. 62a

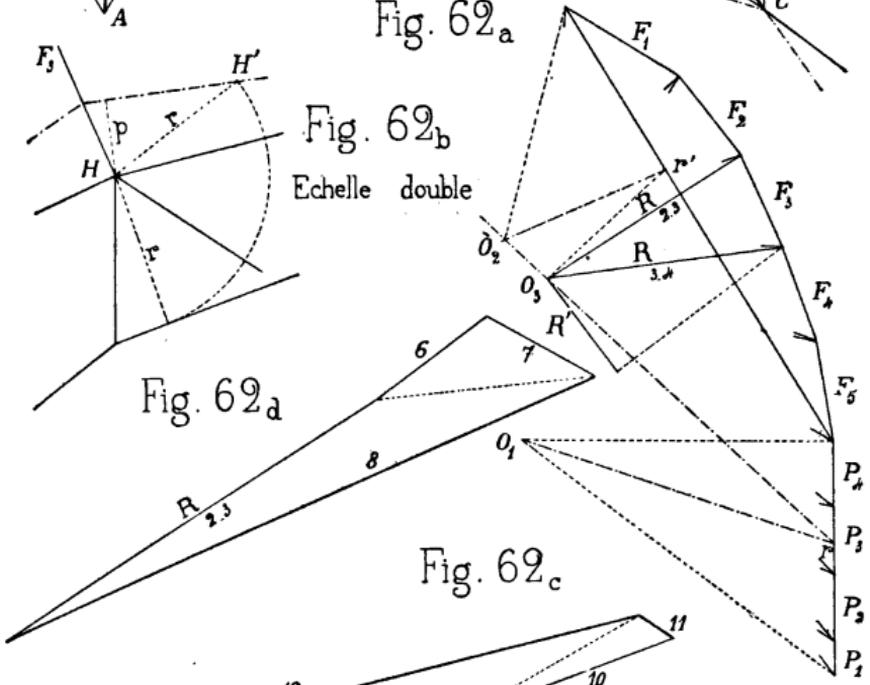


Fig. 62c

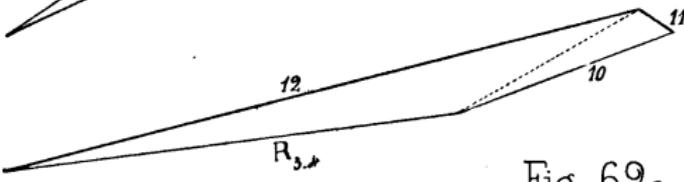
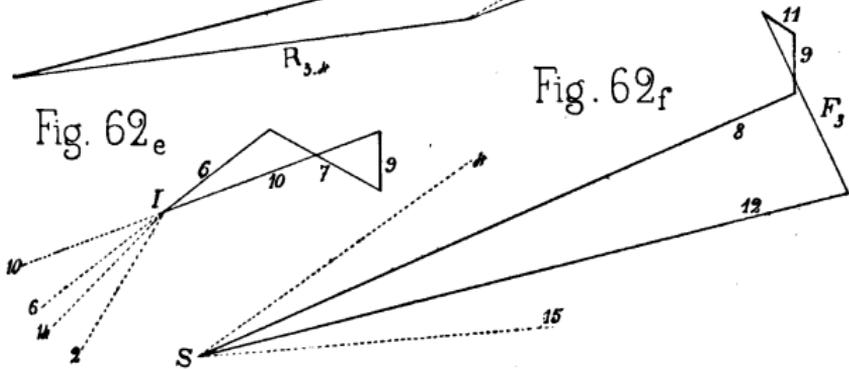


Fig. 62e

Fig. 62f



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

Fig. 63

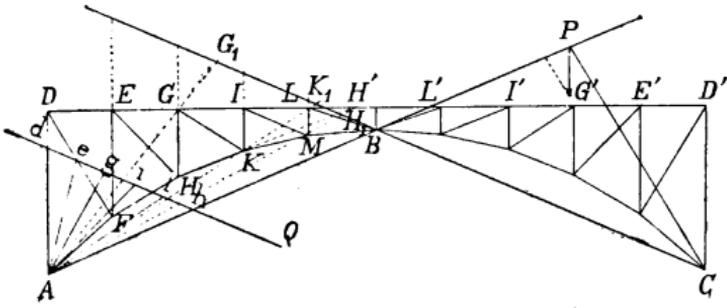


Fig. 63 a

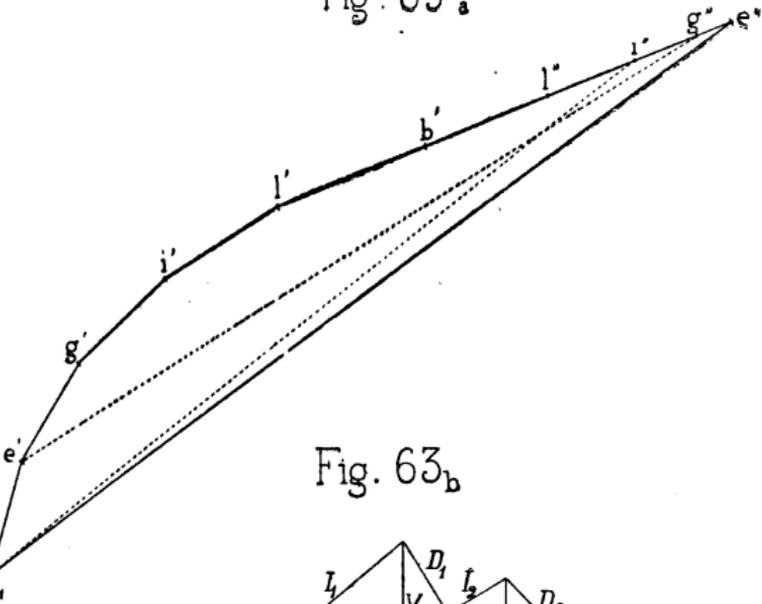
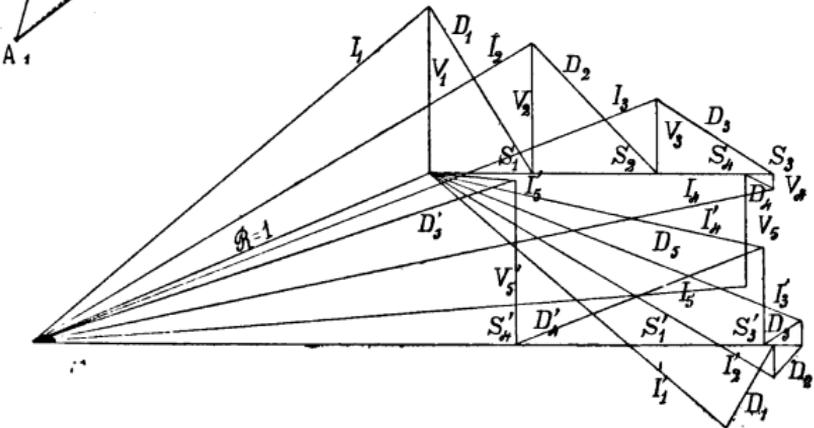


Fig. 63b



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 66

Echelle : 0^m,004 p.m.

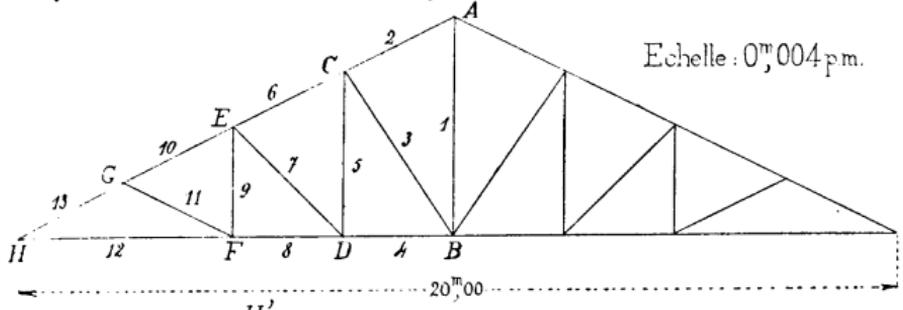
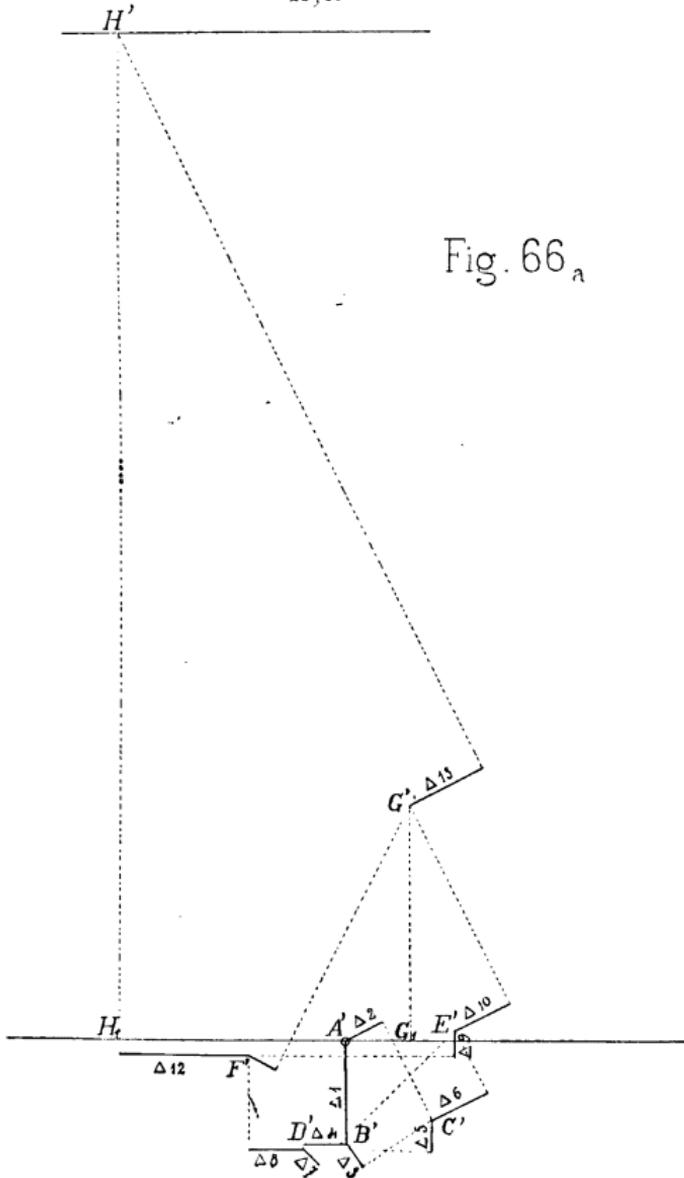


Fig. 66_a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig. 67

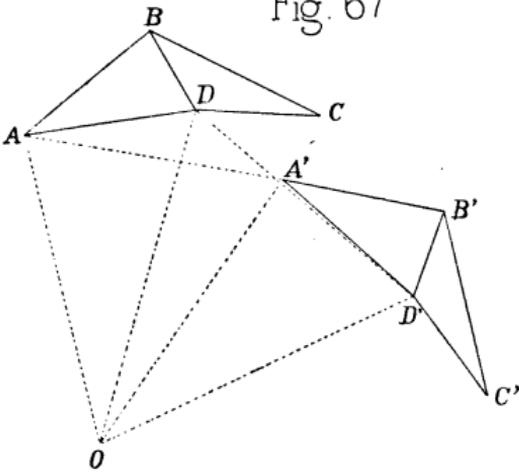


Fig. 67_a

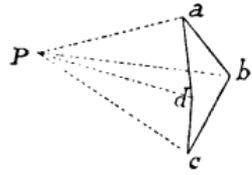


Fig. 68

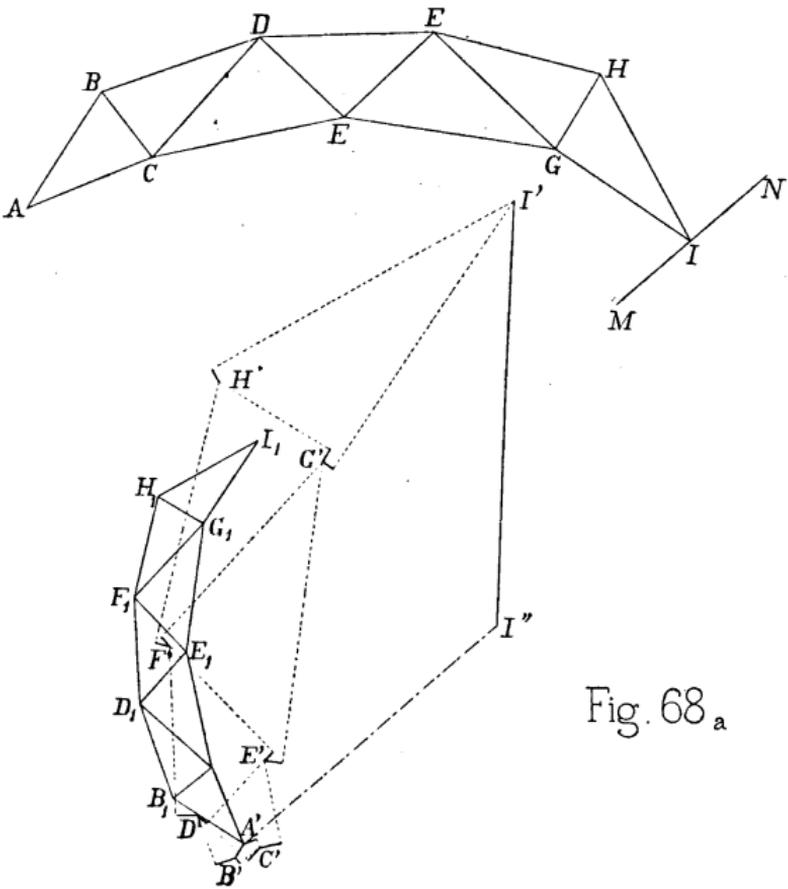


Fig. 68_a

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

Fig. 69

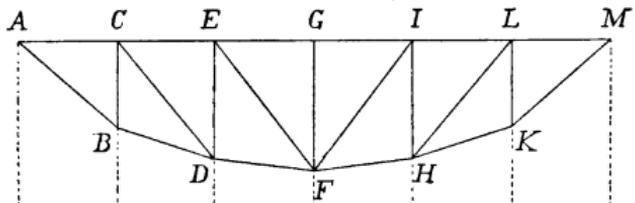


Fig. 69_a

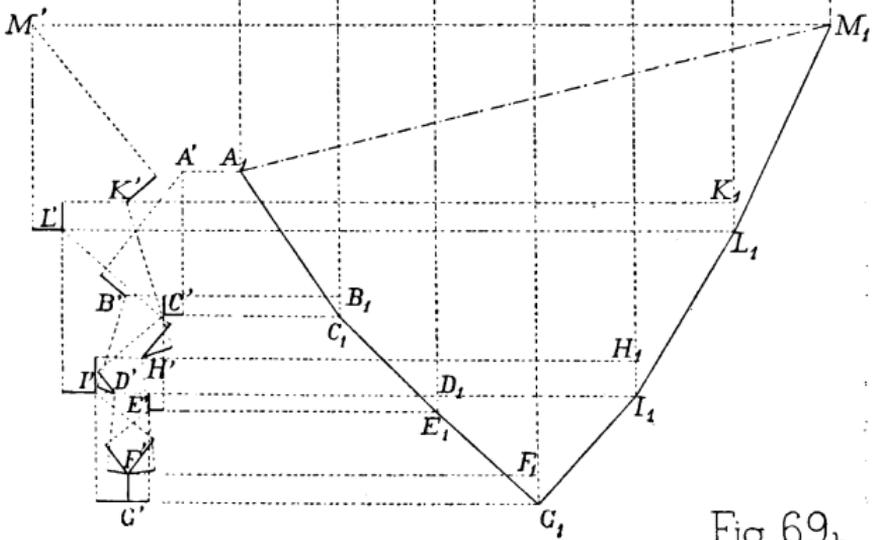


Fig. 69_b

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Fig 70

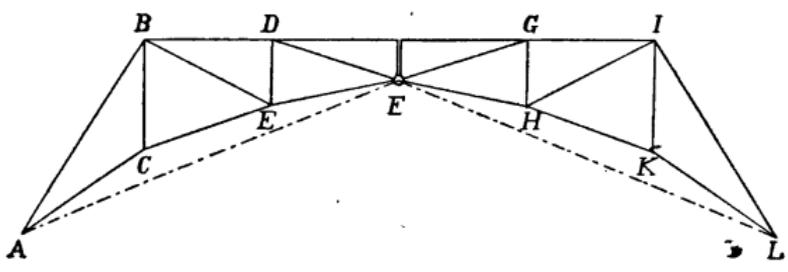
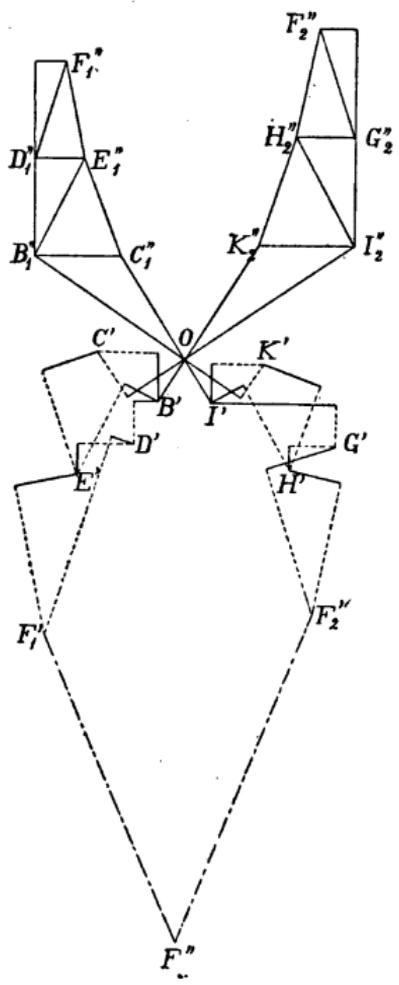


Fig. 70_a



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

	Pages
<i>Statique graphique</i>	9
Généralités	9
Représentation graphique des forces	11
Tracé des épures. Conseils pratiques	12
Composition de deux forces.	14
Composition d'un nombre quelconque de forces.	16
Décomposition d'une force	17
Lemme sur la similitude	18
Force quelconque. Polygone funiculaire	20
Forces parallèles.	24
Décomposition d'une résultante en forces parallèles.	24
Centres de gravité	25
Propriétés des polygones funiculaires	28
Polygone funiculaire passant par deux points donnés.	29
Polygone funiculaire passant par trois points donnés.	31
Cas particulier. Couples	34
Forces dont la résultante est un couple	37
Décomposition d'une force en trois autres non concourantes	39
Moments.	41

CHAPITRE II

<i>Types, les plus usuels de poutres et fermes</i>	50
Généralités	50
Charges	51
Constitution des fermes	52

	Pages
Modes d'appui.	53
Poutre ou fermes composées de plusieurs parties.	56
Charges fixes et variables	59
Poutre armée	60
Poutre triangulée.	62
Polygone Crémone	66
Poutre Warren	70
Poutre à treillis en N	71
Ferme de comble triangulée.	73
Efforts du vent	74
Ferme reposant sur deux appuis	78
Procédés divers de calcul. Méthode des moments.	81
Méthode de Culmann	85
Méthode de Zimmermann.	87
Charges défavorables	90
Maxima dans les membrures.	93
Charges indirectes	96
Maxima dans le treillis	98
Ferme à trois rotules	114
Pont à trois rotules.	118

CHAPITRE III

<i>Déformations</i>	127
Généralités	127
Ferme quelconque sur deux appuis	130
Ferme symétrique	132
Centre instantané de rotation	133
Solution générale	136
Poutre de pont	138
Ferme à trois rotules	139
PLANCHES.	143

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

DIRIGÉE PAR M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

Collection de 250 volumes petit in-8 (30 à 40 volumes publiés par an)

CHAQUE VOLUME SE VEND SÉPARÉMENT : BROCHÉ, 2 FR. 50; CARTONNÉ, 3 FR.

Ouvrages parus

Section de l'Ingénieur

- PICOU. — Distribution de l'électricité. 2 vol.).
A. GOULLY. — Air comprimé ou raréfié. — Géométrie descriptive (3 vol.).
DWELSHAUVERS-DERY. — Machine à vapeur. — I. Etude expérimentale calorimétrique. — II. Etude expérimentale dynamique.
A. MADAMET. — Tiroirs et distributeurs de vapeur. — Détente variable de la vapeur. — Épures de régulation.
M. DE LA SOURCE. — Analyse des vins.
ALHEILIG. — I. Travail des bois. — II. Corderie — III. Construction et résistance des machines à vapeur
AIMÉ WITZ. — I. Thermodynamique. — II. Les moteurs thermiques.
LINDET. — La bière.
TH. SCHLÜSSING fils. — Chimie agricole.
SAUVAGE. Moteurs à vapeur.
LE CHATELIER. — Le grisou.
DUBOIS. — Appareils d'essai des moteurs à vapeur.
CRONEAU. — I. Canon, torpilles et cuirasse. — II. Construction du navire.
H. GAUTIER. — Essais d'or et d'argent.
LECOMTE. — Les textiles végétaux.
DE LAUNAY. — I. Les gîtes métallifères. — II. Production métallifère.
BERTIN. — Etat de la marine de guerre.
FERDINAND JEAN. — L'industrie des peaux et des cuirs.
BERTHLOT. — Calorimétrie chimique.
DE VIARIS. — L'art de chiffrer et déchiffrer les dépêches secrètes.
GUILLAUME. — Unités et étalons.
WIDMANN. — Principes de la machine à vapeur.
MINEL (P.). — Électricité industrielle. (2 vol.). — Électricité appliquée à la marine. — Régularisation des moteurs des machines électriques.
HÉBERT. — Boissons falsifiées.
NAUDIN. — Fabrication des vernis.
SINIGAGLIA. — Accidents de chaudières.
GUÉNEZ. — Décoration de la porcelaine au feu de moufle.
VERMAND. — Moteurs à gaz et à pétrole.
MEYER (Ernest). — L'utilité publique et la propriété privée.
WALLON. — Objectifs photographiques.
BLOCH. — Eau sous pression.

Section du Biologiste

- FAISANS. — Maladies des organes respiratoires.
MAGNAN et SÉRIEUX. — I. Le délire chronique. — II. La paralysie générale.
AUVARD. — I. Séméiologie génitale. — II. Menstruation et fécondation.
G. WEISS. — Electro-physiologie.
BAZY. — Maladies des voies urinaires. (2 vol.).
TROUSSAUX. — Hygiène de l'œil.
FÈRE. — Epilepsie.
LAVÉRAN. — Paludisme.
POLIN et LABIT. — Aliments suspects.
BERGONIE. — Physique du physiologiste et de l'étudiant en médecine.
MEGNIN. — I. Les acariens parasites. — II. La faune des cadavres.
DEMELIN. — Anatomie obstétricale.
CUENOT. — I. Les moyens de défense dans la série animale. — II. L'influence du milieu sur les animaux.
A. OLIVIER. — L'accouchement normal.
BERGÉ. — Guide de l'étudiant à l'hôpital.
CHARRIN. — I. Les poisons de l'urine. — II. Poisons du tube digestif. — III. Poisons des tissus.
ROGER. — Physiologie normale et pathologique du foie.
BROCC et JACQUET. — Précis élémentaire de dermatologie (5 vol.).
HANOT. — De l'endocardite aiguë.
WEILL-MANTOU. — Guide du médecin d'assurances sur la vie.
LANGLOIS. — Le lait.
DE BRUN. — Maladies des pays chauds. (2 vol.).
BROCA. — Tumeurs blanches des membres chez l'enfant.
DE CAZAL et CATRIN. — Médecine légale militaire.
LAPERSONNE (DE). — Maladies des paupières et des membranes externes de l'œil.
KÖHLER. — Applications de la photographie aux Sciences naturelles.
BRAUREGARD. — Le microscope.
LESAGE. — Le choléra.
LANNELONGUE. — La tuberculose chirurgicale.
CORNEVIN. — Production du lait.
J. CHATIN. — Anatomie comparée (4 v.).

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

Ouvrages parus

Section de l'Ingénieur

DE MARCHENA. — Machines frigorifiques (2 vol.).
 PRUD'HOMME. — Teinture et impression.
 SOREL. — I. La rectification de l'alcool. — II. La distillation.
 DE BILLY. — Fabrication de la fonte.
 HENNEBERT (C^t). — I. La fortification. — II. Les torpilles sèches. — III. Bouches à feu. — IV. Attaque des places. — V. Travaux de campagne. — VI. Communications militaires.
 CASPARI. — Chronomètres de marine.
 LOUIS JACQUET. — La fabrication des eaux-de-vie.
 DUBÉBOUT et CRONEAU. — Appareils accessoires des chaudières à vapeur.
 C. BOURLET. — Bicycles et bicyclettes.
 H. LEAUTÉ et A. BERARD. — Transmissions par câbles métalliques.
 DE LA BAUME PLUVINEL. — La théorie des procédés photographiques.
 HATT. — Les marées.
 H. LAURENT. — I. Théorie des jeux de hasard. — II. Assurances sur la vie. — III. Opérations financières.
 C^t VALLIER. — Balistique (2 vol.). — Projectiles. Fusées. Cuirasses (2 vol.).
 LELOUTRE. — Le fonctionnement des machines à vapeur.
 DARIÉS. — Cubature des terrasses.
 SIDERSKY. — I. Polarisation et saccharimétrie. — II. Constantes physiques.
 NIEWENGLOWSKI. — Applications scientifiques de la photographie.
 ROCQUES (X.). — Alcools et eaux-de-vie.
 MOESSARD. — Topographie.
 BOURSALUT. — Calcul du temps de pose.
 SEGUELA. — Les tramways.
 LEFEVRE (J.). — I. La Spectroscopie. — II. La Spectrométrie. — III. L'éclairage électrique. — IV. Éclairage aux gaz, aux huiles, aux acides gras.
 BARILLOT (E.). — Distillation des bois.
 MOISSAN et OUVREAU. — Le nickel.
 URBAIN. — Les succédanés du chiffon en papeterie.
 LOPPÉ. — I. Accumulateurs électriques. — II. Transformateurs de tension.
 ARIES. — I. Chaleur et énergie. — II. Thermodynamique.
 FABRY. — Piles électriques.
 HENRIET. — Les gaz de l'atmosphère.
 DUMONT. — Electromoteurs.
 MINET (A.). — I. L'Electro-métallurgie. — II. Les fours électriques. — III. L'Electro-chimie.
 DUFOUR. — Tracé d'un chemin de fer.
 MIROU (F.). — Les huiles minérales.
 BORNÉQUE. — Armement portatif.

Section du Biologiste

CASTEX. — Hygiène de la voix.
 MERKLEN. — Maladies du cœur.
 G. ROCHÉ. — Les grandes pêches maritimes modernes de la France.
 OLLIER. — I. Résections sous-périostées. — II. Résections des grandes articulations.
 LETULLE. — Pus et suppuration.
 CRITZMAN. — Le cancer.
 ARMAND GAUTIER. — La chimie de la cellule vivante.
 SÉGLAS. — Le délire des négations.
 STANISLAS MEUNIER. — Les météorites.
 GREHANT. — Les gaz du sang.
 NOCARD. — Les tuberculoses animales et la tuberculose humaine.
 MOUSSOUS. — Maladies congénitales du cœur.
 BERTHAULT. — Les prairies (2 vol.).
 TROUSSART. — Parasites des habitations humaines.
 LAMY. — Syphilis des centres nerveux.
 RECLUS. — La cocaïne en chirurgie.
 THOULET. — Océanographie pratique.
 HOUDAILLE. — Météorologie agricole.
 VICTOR MEUNIER. — Sélection et perfectionnement animal.
 HENOCQUE. — Spectroscopie biol.
 GALIPPE et BARRÉ. — Le pain (2 v.).
 LE DANTEC. — I. La matière vivante. — II. La Bactériologie charbonneuse. — III. La Forme spécifique.
 L'HOTE. — Analyse des engrais.
 LARBALÉTRIER. — Les tourteaux. — Résidus industriels employés comme engrais (2 vol.).
 LE DANTEC et BÉRAUD. — Les sporozoaires.
 DEMMLER. — Soins aux malades.
 DALLEMAGNE. — Etudes sur la criminalité (3 vol.).
 BRAULT. — Des artérites (2 vol.).
 RAVAZ. — Reconstitution du vignoble.
 KHLERS. — L'Ergotisme.
 BONNIER. — L'Oreille (5 vol.).
 DESMOULINS. — Conservation des produits et denrées agricoles.
 LOVERDO. — Le ver à soie.
 DUBREUILH et BRILLE. — Les parasites animaux de la peau humaine.
 KAYSER. — Les levures.
 COLLET. — Troubles auditifs des maladies nerveuses.
 LOUTRE. — Essences forestières.
 MONOD. — L'Appendicite.
 DALLEMAGNE. — La Volonté (3 vol.).
 DELOBELLE et COZETTE. — La Vaccine.

Section de l'Ingénieur



T. SEYRIG

STATIQUE GRAPHIQUE

DES SYSTEMES TRIANGULÉS

EXEMPLES D'APPLICATIONS

GAUTHIER-VILLARS

MASSON ET C^{ie}

Section de l'Ingénieur

MM.	MM.	MM.
Alain-Abadie.	Gassaud.	Michel-Lévy.
Alheilig.	Gastine.	Minel (P.).
Ariès (Comm ^t).	Gautier (Henri).	Minet (Ad.).
Armengaud jeune.	Godard.	Miron.
Arnaud.	Gossot (Comm ^t).	Moëssard (C ^l).
Barillot.	Gouilly.	Moissan.
Bassot (C ^l).	Grouvelle (Jules).	Moissenet.
Baume-Pluvinel (dela)	Guenez.	Monnier.
Bérard (A.).	Guye (C. Eug.).	Moreau (Aug.).
Bergeron (J.).	Guye (Ph.-A.).	Müller (Ph. T.).
Berthelot.	Guillaume (Ch.-Ed.).	Niewenglowski (G. II.).
Ber ^t in.	Guyou (Comm ^t).	Naudin (Laurent).
Bertrand (L.)	Haller (A.).	Ocagne (d').
Biglia.	Hatt.	Ouvrard.
Billy (Ed. de).	Hébert.	Paloque.
Bloch (Fr.).	Hennebert (C ^l).	Périsse (L.).
Blondel.	Henriet.	Perrin.
Boire (Em.).	Hérisson.	Perrotin.
Bordet.	Hospitalier (E.).	Picou (R.-V.).
Bornecque.	Hubert (H.).	Poulet (J.).
Boucheron (H.).	Hutin.	Prud'homme.
Bourlet.	Jacométy.	Rateau.
Boursault (H.)	Jacquet (Louis).	Resal (J.).
Boussac (A.)	Jaubert.	Ricaud.
Candlot.	Jean (Ferdinand).	Rocques (X).
Caspari.	Launay (de).	Rocques-Desvallées.
Charpy (G.).	Laurent (H.).	Rouché.
Clugnet.	Laurent (P.).	Sarrau.
Croneau.	Laurent (Th.).	Sartiaux (E.).
Damour.	Lavergne (Gérard).	Sauvage.
Dariès.	Léauté (H.).	Seguela.
Defforges (Lt-Col.).	Le Chatelier (H.).	Seyrig (T.).
Delafond.	Lecornu.	Sidersky.
Drzewiecki.	Lecomte.	Simart.
Dudebout.	Lefèvre (J.).	Sinigaglia.
Dufour (A.).	Leloutre.	Sorel (E.).
Dumont (G.).	Lenicque.	Trillat.
Duquesnay.	Le Verrier.	Urbain.
Durin.	Lindet (L.).	Vallier (Comm ^t).
Dwelschauvers-Dery.	Lippmann (G.).	Vermand.
Fabre (Ch.).	Loppé.	Viaris (de).
Fabry.	Lumière (A.).	Vigneron.
Foex.	Lumière (L.).	Vivet (L.).
Fourment.	Madamet (A.).	Wallon (E.).
Fribourg (C ^l).	Magnier de la So ^l ...	Widmann.
Frouin.	Marchona (de).	Witz (Aimé).
Gages (Cap.)	Margerie.	
Garnier.	Meyer (Ernest).	

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

DES

AIDE-MÉMOIRE

PUBLIÉE

SOUS LA DIRECTION DE M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

*Ce volume est une publication de l'Encyclopédie
scientifique des Aide-Mémoire ; L. Isler, Secrétaire
général, 20. boulevard de Courcelles, Paris.*

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

DE M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT.

STATIQUE GRAPHIQUE

DES

SYSTÈMES TRIANGULÉS

EXEMPLES D'APPLICATIONS

PAR

T. SEYRIG

Ingénieur-Constructeur

PARIS

GAUTHIER-VILLARS,

IMPRIMEUR-ÉDITEUR

Quai des Grands-Augustins, 55

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

Boulevard Saint-Germain, 120

(Tous droits réservés)

G. V.

*OUVRAGES DE L'AUTEUR PARUS
DANS LA COLLECTION DE L'ENCYCLOPÉDIE*

- I. — Statique graphique des systèmes triangulés. Exposés théoriques.
- II. — Statique graphique des systèmes triangulés. Exemples d'applications.

PREFACE

Après avoir exposé, dans une première partie, les notions théoriques sur lesquelles est basé le calcul graphique des constructions, nous donnons ici un certain nombre d'exemples d'applications. Nous les avons choisis avec autant de variété que possible, et nous les donnons avec des développements numériques que l'on trouvera peut-être trop abondants ou superflus. Mais nous croyons utile d'entrer dans d'aussi grands détails, afin qu'on puisse, dès l'abord, en étudiant les méthodes de la statique graphique, se rendre bien compte de l'importance relative de chacun des facteurs du problème : les évaluations, l'établissement des données et les mesures numériques, d'une part, et le travail matériel de l'épure géométrique d'autre part. On saisira mieux ainsi, croyons-nous, toute la simplicité et la précision des méthodes graphiques.

STATIQUE GRAPHIQUE

APPLICATIONS DES MÉTHODES GRAPHIQUES

1. Centres de gravité (pl. I). *Cornière.*
— Nous choisissons pour premier exemple d'application la recherche du centre de gravité d'une cornière à branches inégales, de 100×56 millimètres de côté (pl. I, *fig.* 1).

Nous avons donné (vol. I, § 11) la méthode générale à suivre, qui consiste dans la décomposition de la surface soumise au calcul, en surfaces partielles, faciles à évaluer, et dont, en même temps, le centre de gravité soit aisé à déterminer. Tels sont les rectangles, les triangles, les secteurs de cercle, les trapèzes. C'est en surfaces élémentaires de cette nature, que la cornière a été partagée, en même temps que les mesures de ces surfaces partielles ont été faites. Elles ne sont indiquées, dans l'épure, que par

une seule lettre chacune, dont voici le résumé, avec le calcul des surfaces.

A	$\frac{1}{4} \pi 8^2$	=	50,2	millimètres carrés.
B	$\frac{1}{2} 92 \times 8$	=	368	''
C	$\frac{1}{2} 92 \times 12,8$	=	588,8	''
D	estimé	=	22	''
E	$\frac{1}{2} 48 \times 11$	=	264	''
F	$\frac{1}{2} 48 \times 8$	=	192	''
G	$\frac{1}{4} \pi 8^2$	=	50,2	''
	Surface totale		<u>1 535,2</u>	millimètres carrés.

Ces surfaces sont portées sur la figure de gauche, en polygone des forces, dans l'ordre où elles sont indiquées, à l'échelle de 1 millimètre pour 2 millimètres carrés.

Le centre de gravité de chacun des éléments de subdivision a été déterminé par les procédés élémentaires connus. Ainsi A est aux deux tiers du rayon bissecteur de l'angle droit qui constitue le secteur. B, C, E et F sont aux deux tiers de la ligne qui joint un des sommets au milieu de la base opposée.

D enfin pourrait être déterminé par différence, mais il se trouve sur la ligne médiane de la figure à laquelle il se rapporte et on ne fera

point d'erreur appréciable en le prenant aussi aux trois quarts de cette ligne.

Par chacun des centres de gravité partiels A, B, C..... G, on mènera deux lignes, l'une parallèle au polygone des forces, l'autre perpendiculaire. Puis choisissant arbitrairement un pôle O, on tracera le polygone funiculaire correspondant sur les lignes parallèles aux forces. Les côtés extrêmes de ce polygone se rencontreront en g , et on mènera par ce point une parallèle aux forces.

On agira de même pour les lignes tracées perpendiculairement aux premières, par les points A, B, C..... G. Les derniers côtés de ce nouveau polygone funiculaire se rencontrent en g_1 , par lequel point on mènera une perpendiculaire aux forces. Elle coupera la droite passant par g au point cherché G_1 , qui est le centre de gravité de la figure considérée.

Si la cornière était à branches symétriques, le tracé se simplifierait. Le centre de gravité cherché se trouverait évidemment sur la ligne médiane, bissectrice de l'angle extérieur, et il suffirait de faire le tracé pour l'une des moitiés de la cornière en se servant du polygone des forces perpendiculaire à la dite bissectrice.

Fer Zorès. — Le fer, dont la coupe est représentée par la *fig. 2*, a une partie courbe, mais d'épaisseur uniforme partout. Il est d'ailleurs symétrique par rapport à une verticale, ce qui dispensera de faire le tracé du polygone se rapportant à l'une de ses moitiés, à condition de prendre les forces perpendiculaires à l'axe de symétrie. La division en surfaces élémentaires se fera commodément, comme il est indiqué dans la figure. Elles comprennent deux rectangles importants A et M, une surface de forme irrégulière B, et une série de trapèzes curvilignes C à L. Huit de ceux-ci sont de surface égale, ayant même longueur sur la courbe intérieure, qui est un arc de cercle. Il reste deux petites surfaces, celles des congés de raccord de la base du fer, mais ces surfaces ne sont que de 2 ou 3 millimètres carrés chacun, ce qui ne saurait influer d'une façon appréciable sur le résultat. On les évaluera par approximation.

Les surfaces des sections partielles sont donc les suivantes :

A	24×8	=	192	millimètres carrés.
B	estimé	=	16	"
C	$8,25 \times 4$	=	33	"
D à L	$8 \times 11,5 \times 4$	=	368	"
M	33×8	=	264	"

Surface totale $\underline{\hspace{1cm}}$ 873 millimètres carrés.

Ces surfaces sont portées en polygone des forces horizontales, à droite de la figure. A l'aide d'un pôle O , on a tracé le polygone funiculaire correspondant, dont les lignes extrêmes ont donné le point g . Il suffit de tracer par g une horizontale pour trouver en G_1 le centre de gravité de la section totale.

2. Ferme de comble à deux versants symétriques (pl. II, *fig.* 3). — La ferme de comble, de 12 mètres de portée, représentée *fig.* 3, est une des plus simples qu'on puisse imaginer. Elle ne comporte que 3 pannes qui donnent des charges P_1, P_2, P_3 , que nous supposons égales à 1 000 kilogrammes chacune.

La ferme étant symétrique, ainsi que les charges, il est aisé de voir que chaque appui A et B recevra $1\ 000^{\text{kg}} + \frac{1}{2} 1\ 000^{\text{kg}} = 1\ 500$ kilogrammes. Nous portons en polygone des forces (*fig.* 4) les trois charges P_1, P_2, P_3 , et nous partageons, sans autre calcul, le poids total en deux parties égales, chacune desquelles représentera l'une des réactions. Celle de gauche se décomposera suivant la direction des barres 1 et 2, qui sont indiquées dans la *fig.* 4. La force P_1 agit au même point que les barres 1, 3 et 4. On pourra, par conséquent, la combiner avec la force 1 qui est

connue, puis la décomposer en 3 et 4. Nous aurons un polygone fermé, qui pourra être contourné en suivant le même sens, si nous considérons l'ordre suivant dans les lignes du polygone, savoir : $P_1, 1, 4, 3$, qui fait connaître la valeur de 3 et de 4. Il reste à déterminer la valeur de l'effort dans la barre 5. Elle peut se déterminer indifféremment par le nœud inférieur ou le nœud supérieur, en raison de la symétrie. Le plus simple est de prendre la ligne 3, et de former le polygone $P_2, 3, 5$ et $3'$. On le vérifiera en complétant le polygone 2, 4, 5, $4'$, $2'$, qui doit se fermer et être symétrique par rapport à la même ligne médiane horizontale, de l'ensemble de l'épure.

Les forces P_1, P_2, P_3 , ayant été portées à l'échelle de un centimètre pour 1 000 kilogrammes, les efforts dans les barres se liront à la même échelle et nous aurons :

Effort dans l'arbalétrier . . .	1 ...	— 4 400 ^{kg}
" " . . .	3 ...	— 2 900
" dans l'entrait . . .	2 ...	3 850
" dans la barre . . .	4 ...	— 1 300
" dans le poinçon . . .	5 ...	1 970

La nature des efforts se déterminera par la considération du sens de parcours des polygones (vol. I, § 30). Ainsi, au point A, il y a 3 forces,

la réaction R_A et les deux forces 1 et 2. La réaction s'exerce sur le nœud de bas en haut, et nous parcourons le polygone R_A 2 1 dans le sens qu'indique cette réaction. En parcourant 2, on s'éloignera donc de A : ce sera une traction. En parcourant 1, au contraire, on marche vers le point A : c'est une compression. Nous indiquons par le signe — les compressions ainsi reconnues.

3. Ferme de comble à la Mansard (pl. II, *fig. 5*). — Ce type de comble est, en général du moins, symétrique. La forme la plus simple est aussi à 3 pannes, portant chevrons. La ferme que nous représentons appartient à un comble de 12 mètres d'ouverture, avec chevrons hourdés et toiture légère.

Les fermes sont espacées de 3 mètres. La charge de la toiture comprend :

Couverture en zinc	8 ^{kg}	par mètre carré
Volige	7 ^{kg}	//
Hourdis en plâtre .	100 ^{kg}	//
Fers	25 ^{kg}	//
	140 ^{kg}	//
Surcharge de neige.	50 ^{kg}	//
	190 ^{kg}	//

Soit, par mètre courant de ferme,

$$190 \times 3 = 570^{\text{kg}}.$$

La panne faîtière P_2 porte une largeur de

4^m,60, soit 2 625 kilogrammes. Les pannes P₁ et P₃ portent 2^m,30 de largeur, soit 1 300 kilogrammes, mais pour tenir compte du membron et de quelques fractions du brisis presque vertical, il est prudent de compter au moins 1 500 kilogrammes.

Après avoir tracé la ferme à une échelle convenable (5 millimètres pour 1 mètre dans notre figure), nous portons (*fig.* 6) en polygone des forces les charges P₃, P₂, P₁. Comme dans le cas précédent, les réactions sont égales. Si elles ne l'étaient pas, on déterminerait leur valeur à l'aide d'un polygone funiculaire séparé. La réaction R_A donne les efforts en 1 et 2. La charge P₁, avec la force 1, donne les deux premiers côtés du polygone P₁. 1,3,4. Dès maintenant 2 et 3 étant connues, et se trouvant disposées à la suite l'une de l'autre, on continuera la formation du polygone correspondant à leur nœud, par le tracé de 5 et de 6, et l'on a ainsi les efforts dans toutes les barres du système.

Voici, relevées à l'échelle, les forces qui en résultent :

Arbalétrier	1	— 4 230 ^{kg}
"	4	— 3 070
Tirant	2	— 1 740
"	5	— 600
Entrait horizontal	6	— 3 410
Poinçon	3	— 2 360

La deuxième moitié de la figure est, en effet, symétrique à la première par rapport à la ligne 6.

4. Ferme Polonceau à une contrefiche (pl. III, *fig.* 7). — La portée du comble est de 15 mètres. Les fermes sont espacées de 5^m,50. Le comble est couvert en zinc sur voliges.

La charge permanente comprend :

L'ossature en fer	35kg	par	mètre	carré
La couverture.	. 35kg		//	
Ensemble.	. 70kg		//	

Chaque panne donne, en son point d'attache :

$$5,50 \times \frac{15}{4} \times 70 = 1\,444 \text{ kilogrammes.}$$

La *fig.* 8 donne le tracé des efforts. La réaction $\mathfrak{R}_B = 1\,444$ kilogrammes + 722 kilogrammes = 2 166 kilogrammes est portée de bas en haut, et les charges de 1 444 kilogrammes et de 722 kilogrammes sont tenues distinctes. La réaction \mathfrak{R}_B décomposée en 1 et 2, puis l'effort 1, combiné avec la charge 1 444 kilogrammes, permet de compléter le quadrilatère au moyen de 4 et 3. Les efforts 6 et 5 s'en déduisent par le tracé de 2,3,6,5.

Le tableau suivant résume la valeur de ces efforts, relevés à l'échelle :

Arbalétrier	1	— 7 100 ^{kg}
"	4	— 6 550
Entrait	2	6 550
"	6	4 050
Contrefiche	3	— 1 325
Tirant	5	2 625

5. Comble Polonceau à trois contrefiches, pour rotonde (pl. III, *fig.* 9). — Le diamètre de la rotonde est de 30 mètres. Le nombre des fermes est de 8. La couverture est comme pour le cas précédent, en zinc sur voliges, pesant, fers et chevrons compris, 70 kilogrammes le mètre carré. La longueur de la corde entre chaque pied de ferme sera 2×15 mètres $\sin 11^{\circ} 15' = 5^{\text{m}},85$.

Les charges aux nœuds seront égales à 1 155 kilogrammes, 770 kilogrammes, 385 kilogrammes et 48 kilogrammes (ce dernier chiffre pour la demi-ferme seulement). La réaction du pied de ferme sera donc $\mathcal{R} = 2 358$ kilogrammes.

Le tracé du polygone Cremona ne peut se faire, pour le comble à 3 contrefiches, aussi directement que pour le précédent, attendu que le nœud supérieur de la contrefiche du milieu est le point de rencontre de 5 barres, ce qui cons-

tituera un cas d'indétermination. On tourne aisément la difficulté en calculant directement la tension de l'entrait T. Nous indiquons pour cela plusieurs procédés.

On remarquera qu'il est facile de prendre les moments des forces agissant sur une moitié de ferme, autour du nœud de faitage. L'effort sur T est la seule inconnue, et l'on a :

$$Td = \mathcal{R}l - \Sigma \mathcal{M}P$$

ou, si l'on détermine la position de la résultante de ΣP en P_1 on aura :

$$T = \frac{\mathcal{R}l - P_1 l_1}{d}.$$

Une construction très simple permet de calculer graphiquement cette valeur de T. Prolongeons la direction de l'entrait T jusqu'à la verticale passant par A et joignons ce point de rencontre à F, puis menons par F une horizontale Fa. Entre les deux lignes ainsi tracées, déterminons une longueur verticale égale à \mathcal{R} ⁽¹⁾. D'autre part, à l'aide d'un polygone funiculaire, cherchons la position de P_1 et joignons le point où elle rencontre T au faitage F. Déterminons

(1) L'exiguïté de la feuille a obligé de faire cette construction à une échelle moitié du reste de l'épure.

encore la verticale égale à P_1 comprise entre cette ligne et l'horizontale passant par F. La distance rp_1 entre les deux forces \mathcal{R} et P_1 ainsi placées donnera la valeur de T.

On verra, en effet, en examinant les triangles semblables qui ont été constitués par le tracé, que

$$\frac{\overline{Fr}}{\mathcal{R}} = \frac{l}{d}$$

ou

$$\overline{Fr} = \frac{\mathcal{R}l}{d}$$

et

$$\frac{\overline{Fp_1}}{P_1} = \frac{l_1}{d}$$

d'où :

$$\overline{Fp_1} = \frac{P_1 l_1}{d}$$

et

$$T = \overline{Fr} - \overline{Fp_1} = \frac{\mathcal{R}l - P_1 l_1}{d}$$

On peut employer un autre tracé tout aussi simple, utilisant les propriétés des polygones funiculaires. Traçons (*fig.* 10) le polygone des forces qui nous servira dans un instant pour l'obtention des efforts dans les barres, et à l'aide d'une distance polaire MP' égale à d , construisons le polygone des moments Bb . Le moment

en F sera représenté par bb' et aura pour valeur $\overline{bb'} \times d$. C'est dire que la valeur de T sera immédiatement donnée par la longueur $\overline{bb'}$ même.

Le tracé du polygone Cremona, suivant les précédents exemples, se fera maintenant très aisément. Partant de l'appui A, on obtiendra d'abord les valeurs 1, 2. Viendra ensuite le polygone 1, 3, 4. On tracera successivement le polygone 2, 3, 5, 6, puis en raison de ce que T est connu, en direction, position et valeur, le polygone 6, T, 10, 7. On sait, en effet, que la ligne T doit forcément passer par le pied M du polygone des forces.

Un troisième procédé, le plus simple de tous, qui évite la recherche de T, est le suivant. On remarquera qu'au nœud E, il n'existe qu'une seule barre n° 11 qui soulage les deux portions d'arbalétrier 8 et 12. On peut décomposer la charge du nœud E, en deux efforts dirigés l'un suivant les arbalétriers, l'autre suivant le poinçon 11.

Ce dernier reporté en son pied, donnera immédiatement les efforts suivants 13 et 9. Le premier s'augmentera de la tension de la barre 10, encore inconnue. L'autre sera l'effort réel suivant la barre 9. Quand donc le tracé Cremona, partant de A, arrivera au nœud D, on connaîtra

en ce point 3 barres sur 5, et on pourra le faire en son entier.

Projetons donc (*fig. 10*) la charge E (qui est de 385 kilogrammes) sur la normale à l'arbalétrier, et décomposons cette force parallèlement à 9 et à 13. En menant par E'' une parallèle à AF, nous pourrons y arrêter la ligne 7. Ce sera l'effort sur 7, et le polygone 4, 5, 7 pourra se compléter par le tracé des efforts 9 et 8.

Quand les pannes sont équidistantes sur l'arbalétrier, la recherche du point E'' n'est même pas nécessaire. On remarquera que les côtés marqués 11, 9 et 13 forment toujours un triangle isocèle, où les longueurs 9 et 13 (*fig. 10*) sont elles-mêmes égales. Il en est de même des barres 2 et 5. Il faut donc que les points E'' et E''' soient à égale distance des lignes 8 et 12. Il en est de même du point C''' qui est à égale distance de 1 et de 4. Cela résulte de ce que, en raison de l'hypothèse des articulations aux nœuds, les portions AD et DF peuvent être tout d'abord considérées comme des poutres armées indépendantes, où les points C et E sont soulagés par les poinçons. Dans chacune, une des tiges ne supporte que la tension provenant de cette fonction tandis qu'à l'autre s'ajoute un autre effort provenant de la liaison avec les autres barres de la construction.

Ayant ainsi trouvé la valeur de 7, rien n'empêche plus de tracer le polygone des côtés 4, 5, 7, 9, 8, où les seuls côtés 8 et 9 sont inconnus. Les autres polygones relatifs aux nœuds supérieurs s'achèvent sans aucune difficulté.

Les efforts ainsi déterminés sont relevés à l'échelle et résumés dans le tableau suivant :

Noms	Numéros des barres	Efforts	Noms	Numéros des barres	Efforts
Arbalétriers	1	- 7 980	Tirants	5	1 860
	4	- 7 530		9	570
	8	- 6 030		10	2 780
	12	- 5 930		13	3 350
Entrait	2	7 420	Contrefiches	3	- 1 100
	6	5 570		7	- 1 380
	D	2 900		11	- 330

6. Comble avec ferme-console ou cantilever (pl. IV, *fig.* 11). — La ferme que représente la *fig.* 11 est un type assez récemment créé, qui a été employé avec succès dans un certain nombre de cas.

Ce type peut trouver son application soit isolément, formant alors un auvent avec porte-à-faux, soit doublé, comme le montre le croquis 11 *bis*, donnant dans chacun des cas une assez

grande surface couverte sans appuis et sans l'encombrement causé par les entrants des fermes ordinaires.

Il a été employé dans plusieurs bâtiments d'expositions, à Bruxelles, à Genève, etc., et il semble qu'il doive conduire à une assez grande économie de métal. On admet en général qu'il est très avantageux comme poids aussi bien que comme dépense de montage.

La ferme (ou demi-ferme) se compose d'un arbalétrier en treillis, qui repose à une de ses extrémités B sur un mur ou sur un pylône, auquel il est ancré. C'est cet appui qui doit, à lui seul, être assez résistant pour transmettre au sol tous les efforts horizontaux provenant du vent. Vers le milieu de sa longueur, en A, se trouve le second appui de l'arbalétrier, qui est fait à l'aide d'une colonne dont la longueur est telle qu'elle peut suivre les déplacements dus à la dilatation de la charpente. Parfois on la munit de rotules en haut et en bas.

Au sommet (ou faîtage), les arbalétriers sont reliés, mais on ne compte pas sur l'appui qu'ils pourraient se donner réciproquement.

La ferme représentée portait à droite des pannes de 14^m,50 de longueur, à gauche des pannes de 9^m,50. Elle portait donc une largeur

de toiture de 12 mètres. Sa charge était évaluée comme suit :

Poids des fers, par mètre carré .	30	kilogrammes.
" de la couverture en zinc .	29	"
" de la surface vitrée . . .	24	"
" de la surcharge de neige .	30	"
Charge équivalente à l'effort maximum du vent.	80	"

La toiture était, dans les travées de 14^m,50, pleine, de M en N (*fig. 11 bis*) et vitrée depuis N jusqu'au sommet. Les travées de 9^m,50 étaient entièrement couvertes en zinc.

La partie vitrée donne donc, par mètre courant de ferme, une charge égale à :

$$\frac{1}{2} 9^{\text{m}},50 \times 29^{\text{kg}} + \frac{1}{2} 14^{\text{m}},50 \times 24^{\text{kg}} = 312^{\text{kg}}.$$

La partie pleine donne :

$$12^{\text{m}} \times 29^{\text{kg}} = 348^{\text{kg}}.$$

La surcharge de neige et de vent, dont on admet l'action simultanée, donne :

$$12 (30 + 80) = 1\,320^{\text{kg}}.$$

Avec ces données, on a déterminé la charge maxima en chaque nœud de la ferme. Il faut d'ailleurs faire trois hypothèses. La première est

celle où la surcharge — très importante ici — s'exerce sur la partie comprise entre appuis.

La seconde suppose la surcharge s'exerçant au-delà de l'appui de gauche.

Enfin la troisième est celle de la surcharge totale. Les charges provenant de ces trois hypothèses sont résumées dans le tableau ci-dessous, mais la planche IV ne peut contenir que l'une des épures. Nous avons choisi celle qui est relative à la surcharge totale.

Numéro du nœud	Première hypothèse	Deuxième hypothèse	Troisième hypothèse
I	620	1 940	1 940
II	1 240	3 880	3 880
III	1 460	4 430	4 430
IV	1 680	4 980	4 980
V	„	„	„
VI	„	„	„
VII	„	„	„
VIII	„	„	„
IX	4 980	„	„
X	„	1 680	„
XI	„	„	„
XII	5 025	1 725	5 025
XIII	5 070	1 770	5 070
XIV	„	„	„
XV	„	„	„
XVI	„	„	„
XVII	„	„	„
XVIII	„	„	„

La première chose à faire est de déterminer les réactions des appuis. A cet effet, nous portons (*fig. 12*) les charges I, II, ..., XVIII en polygone des forces, choisissant pour cela la troisième hypothèse de la surcharge complète. A l'aide d'un pôle P quelconque, nous traçons un polygone funiculaire cab , dont les côtés extrêmes se coupent en g . La résultante de toutes les charges passe par ce point. Elle se trouve entre les deux appuis A et B, ceux-ci seront donc chargés positivement : il n'y aura pas, dans cette hypothèse, de soulèvement en B (ce cas se présenterait dans la deuxième hypothèse). Joignant a_1b , nous menons une parallèle à cette droite, passant par P. Le point P_1 partagera le polygone des forces en \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B .

Partant de la charge I, nous pouvons, sans difficulté aucune, faire le tracé des efforts dans toutes les barres de 1 à 34. Lorsqu'on arrivera au nœud formant la rotule de l'appui A, on tiendra compte de la réaction \mathcal{R}_A dans le tracé du polygone 28-31-33-32- \mathcal{R}_A , puis on suivra jusqu'en B toutes les déterminations dans les barres.

Les efforts ainsi déterminés sont résumés dans le tableau ci-après, et l'on remarquera que le changement de signe dans les barres 54 et 58

	Arbalétrier Membre supérieure			Arbalétrier Membre inférieure			Treillis			Montants						
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III				
6	14,2	34,6	34,6	1	14,3	34,8	34,8	2	44,9	34,5	34,5	34,5	3	14,6	54,6	54,6
10	3,4	12,0	12,0	4	3,3	12,2	12,2	5	1,8	8,2	8,2	8,2	7	2,8	9,4	9,4
14	8,6	26,2	26,2	8	8,7	27,0	27,0	9	5,7	15,0	15,0	15,0	11	4,7	13,3	13,3
18	16,1	43,5	43,5	12	16,5	45,0	45,0	13	7,6	18,0	18,0	18,0	15	5,4	16,0	16,0
22	22,8	60,8	60,8	16	33,3	63,0	63,0	17	7,0	18,8	18,8	18,8	19	6,4	17,8	17,8
26	27,4	74,8	74,8	20	28,8	78,8	78,8	21	5,6	17,0	17,0	17,0	23	5,7	18,0	18,0
30	31,7	88,1	88,1	24	33,8	93,6	93,6	25	5,6	17,0	17,0	17,0	27	6,1	19,0	19,0
34	35,7	100,5	100,5	28	38,3	107,4	107,4	29	5,4	17,0	17,0	17,0	31	6,2	19,7	19,7
38	16,5	90,3	79,1	32	17,6	89,7	78,2	33	27,4	14,9	—	—	35	21,8	13,8	25,2
42	11,1	90,8	59,4	36	2,5	81,4	59,8	37	23,9	14,6	—	—	39	17,3	12,1	22,0
46	13,6	71,0	41,0	40	14,3	69,9	40,4	41	20,4	13,0	—	—	43	13,0	10,8	18,0
50	16,3	60,6	24,0	44	25,6	59,8	23,9	45	16,8	15,8	—	—	47	9,4	10,2	14,8
54	36,3	50,4	9,6	48	35,5	49,8	—	49	12,6	13,3	—	—	51	5,2	9,4	11,0
58	42,3	40,1	2,5	52	41,4	39,7	2,2	53	7,0	12,4	—	—	55	0,7	8,5	7,0
62	42,4	32,3	10,3	56	42,9	29,3	10,3	57	0,8	11,8	—	—	59	4,0	8,0	3,0
66	37,8	19,7	14,3	60	37,1	18,4	14,2	61	5,9	12,2	—	—	63	9,6	7,0	1,8
70	23,9	9,9	11,3	64	24,4	8,7	12,0	65	15,1	11,4	—	—	67	15,9	5,9	7,2
								69	26,5	10,6	—	—				

correspond au point où le polygone funiculaire coupe la ligne de fermeture a_1b . C'est celui où les moments fléchissants dans l'arbalétrier, considéré comme pièce soumise à la flexion, changent de signe.

Bien que les épures ne soient pas reproduites sur la planche IV, elles ont été faites aussi pour la première et la deuxième hypothèse et les résultats en sont consignés dans le tableau de la page précédente.

On reconnaîtra sans peine les maxima des efforts dans les barres, dont il faudrait tenir compte dans la détermination des sections.

7. Grue fixe de Quai (pl. V, *fig.* 13). — La grue figurée pl. V est une grue de chargement pour navires. Elle a une flèche constituée en tôlerie triangulée, sauf dans sa partie inférieure, où elle est en tôle pleine. Se trouvant tout entière au-dessus du sol, afin de ne pas exposer son pivot et ses galets de rotation à être noyés, elle est maintenue par une tour en métal dont la partie supérieure contient les galets.

Il est nécessaire de connaître, pour un engin semblable, les efforts intérieurs, c'est-à-dire dans les barres dont il se compose, puis les réactions extérieures, sur les galets et sur le pivot, enfin celles de la tour en tôle sur le sol.

Les charges auxquelles est soumise la grue sont :

1° La charge de travail, soit 15 tonnes, à quoi il faut ajouter le poids du crochet (avec contrepoids) et celui de la chaîne, dans sa longueur maxima. Cet ensemble peut être évalué à 1 tonne, soit 16^T en tout.

2° Le poids de la flèche, avec poulie de tête, etc., qui peut être compté dans sa partie supérieure, à peu près jusqu'à la brisure en M. Nous l'évaluons à 4 tonnes et ce poids sera considéré comme appliqué au nœud Q.

3° Le poids de la partie inférieure de la flèche qui se transforme en pivot. Il est d'environ 8 tonnes, y compris le mécanisme hydraulique qui se trouve logé dans cette partie inférieure.

Le pivot, soumis aux forces extérieures que nous venons d'indiquer, en reçoit d'autres qui sont les réactions. Ainsi les galets de rotation exercent sur lui un effort qui est supposé horizontal, et que le mode de construction doit obliger à être ainsi. La crapaudine du pied exerce une réaction oblique, composée de la réaction verticale, ou charge totalisée, et d'une réaction horizontale, égale et de sens contraire à celle produite par les galets des sommets.

En outre de ces réactions, la flèche subit

encore certaines forces, extérieures à elle, mais intérieures à l'ensemble. Ce sont celles que produit la chaîne de levage sur ses galets ou poulies. Ainsi en passant autour de la poulie de tête, la chaîne produit un effort égal à la résultante des deux brins, et dirigé suivant leur bissectrice, en négligeant toutefois le frottement que produit l'axe de la poulie sur ses coussinets. Cette omission est d'une importance fort minime et négligeable.

De même, la chaîne qui passe sur le galet de renvoi pour descendre au treuil de levage, produit sur lui un effort de même ordre. On remarquera qu'il est bon que cet effort — dirigé suivant la bissectrice des deux directions de chaîne — passe par un nœud de la triangulation. Au sommet, ce même intérêt n'existe pas, la poulie de tête ayant toujours ses supports fixés à une partie en tôle pleine qui termine la flèche.

Pour déterminer tous ces efforts, nous portons en polygone des forces (*fig. 14*) les trois charges verticales énumérées ci-dessus. La première — 16 tonnes — se composera avec l'effort sur la chaîne, pour donner une résultante passant par l'axe de la poulie de tête et égale à ae . C'est cette résultante qui donnera les efforts S, I et V dans

la flèche. Elle devra être décomposée tout d'abord en S_1 , I_1 et 1 . A cet effet, nous joignons le point de rencontre de S_1 et de 1 , au point où la résultante coupe I_1 . Nous décomposons ae suivant la direction de cette droite, et suivant I_1 , qui se trouve ainsi connu, en af . La force auxiliaire ef sera à son tour décomposée suivant des parallèles à 1 et à S_1 , et l'on obtient ainsi ces deux forces.

On peut alors suivre facilement un tracé Cremona jusqu'au point Q , où nous avons supposé appliqué le poids de 4^T de la flèche. Cela n'est pas strictement exact, ce poids s'exerçant par parties en chacun des nœuds, mais on ferait, dans une épure à une grande échelle, tout aussi facilement l'application en ces points. Mais on comprend qu'arrivé à la barre S_4 , on tiendra compte de ce poids de 4^T en le portant verticalement au-dessous du point e , prolongeant ainsi le polygone des forces qui devient $abeg$.

De même, quand on arrivera au nœud qui suit la barre S_6 , on aura à introduire dans le polygone la nouvelle force, résultante des efforts sur le brin de chaîne incliné, et le dernier brin vertical. Cette résultante sera gh , et son extrémité tombe forcément sur la verticale du premier polygone des forces. On voit, en effet, que le brin incliné donne sur les deux poulies qui changent sa

direction, une même composante horizontale. De là le tracé qui donne l'effort S_7 . Continuant par les lignes suivantes, on trouve les derniers efforts $I_9 = ai$ et $S_9 = hi$, qui sont verticaux et qui diffèrent l'un de l'autre de la longueur ah , précisément égale aux trois efforts extérieurs qui s'exercent au-dessus du point M, la charge de 16^T , le poids de la flèche 4^T et l'effort sur la chaîne 16^T .

Au-dessous de V_8 , le pivot est supposé plein, mais on continuerait comme ci-dessus si on désirait le faire en treillis.

L'effort de la chaîne verticale étant supporté par le treuil, fixé lui-même au pivot, n'est plus à considérer que comme un effort intérieur au système, et la charge verticale de la crapaudine de pied sera égale à ai , ou 28 tonnes.

L'effort horizontal sur les galets de la couronne se calculera comme suit. On déterminera la résultante de l'ensemble des forces. Pour cela, choisissant (*fig. 14*) un pôle P, on tracera le funiculaire correspondant, qui donnera en G la position de la résultante. Sa verticale se rencontre en G_1 avec l'horizontale passant par les galets BB_1 . En joignant ce point au pied A, on aura les trois forces qui maintiennent en équilibre le système de la flèche. En traçant des parallèles à

ces forces par a et par d , on aura, en Md , l'effort horizontal sur les galets, et en aM , la réaction oblique sur la crapaudine.

L'effort horizontal Md est le seul qui s'exerce sur la tour en tôlerie, en dehors du poids propre de celle-ci, qui ne nous intéresse pas. On peut le décomposer en réactions passant par les points d'attache N et N_1 , de plusieurs façons. On peut admettre que la réaction du sol sur N_1 est verticale, et celle sur N , oblique. Élevant alors en N_1 une verticale jusqu'en n , on joindra Nn . On tracera par d une parallèle à Nn et on aura, en MM_1 , la réaction en N_1 et en $M_1 d$, la réaction oblique en N .

Si l'on admettait que N fût vertical, N_1 oblique, les valeurs absolues seraient les mêmes. Mais en réalité la répartition de ces réactions est indéterminée, et peut-être serait-il plus exact de supposer que l'obliquité est la même aux deux points N et N_1 . Les efforts qui répondent à cette hypothèse seraient obtenus en joignant n_1N et n_1N_1 . Les efforts correspondants seraient MM_2 et M_2d .

8. Grue roulante (pl. VI, *fig.* 15). — La grue roulante représentée *fig.* 15 est une grue à bras, de 3 tonnes de force. Elle est à contre-poids fixe, et la condition de sa stabilité est

que le centre de gravité de la grue avec ou sans charge tombe toujours à l'intérieur des points d'appui des roues A et B, d'une quantité suffisante pour offrir la marge voulue en prévision de toutes les éventualités, secousses ou à-coups.

Comme la grue tourne dans tous les sens autour de son pivot, cette condition de stabilité est la même dans le sens transversal du chariot. Nous n'examinerons ici que le sens longitudinal, les tracés seraient exactement les mêmes pour le travers, et, en général, on cherche à donner aux roues une base carrée.

La charge maxima est de 3 tonnes. Nous admettrons que la chaîne avec crochet et contrepoids pèsent encore 500 kilogrammes.

Le poids de la flèche est de 500 kilogrammes, Celui du bâti tournant avec treuil, de 1 200 ^{kg.}

Le châssis roulant avec ses roues pèse 1 600 kilogrammes. Nous admettons que, pour la stabilité générale, il y a liaison entre le bâti et le châssis roulant.

Il s'agit de déterminer les efforts intérieurs des éléments principaux de la grue, et de calculer le contrepoids, de façon qu'à vide comme sous charge, la grue soit stable.

Nous admettrons que cette stabilité est suffisante quand la résultante de toutes les charges

passé à $0^m,15$ en dedans du rectangle formé par les roues. Cette distance est faible, et constitue une limite, mais nous rappelons que ces grues sont, en général, munies de griffes qui permettent de les fixer aux rails sur lesquelles elles roulent. On leur donne ainsi une sécurité supplémentaire sur laquelle il convient cependant de ne pas trop compter pour un fonctionnement courant.

La condition que nous venons d'énoncer consiste donc à dire que la résultante doit toujours rester comprise entre C et D (*fig. 15*).

Nous traçons (*fig. 17*) le polygone des forces agissant sur la grue. Le contrepoids est encore inconnu. À l'aide d'un pôle O, nous traçons (*fig. 16*) le polygone funiculaire $P_1T_1G_1$. Pour le moment, T_1G_1 est le dernier côté du funiculaire, comme P_1D_1 est le dernier côté à son autre bout. Si nous voulons que la résultante sous charge passe par D, le côté extrême du polygone devra être G_1D_1 . De là la valeur du contrepoids G, qui se déterminera en menant par O une parallèle à G_1D_1 . Sa valeur, mesurée sur le polygone des forces, sera $3^T,6$.

Il faut vérifier si ce contrepoids convient pour que, à vide, la résultante des charges reste entre C et D. Il faut, pour cela, tracer le rayon Oa , en négligeant la valeur de la charge de 3^T . Le

côté du funiculaire correspondant sera P_1C_1 , qui coupera G_1D_1 en C_1 . La résultante aura donc bien pour positions extrêmes C et D, qui répondent à la condition de stabilité que nous nous sommes imposée.

Le déplacement maximum de la résultante générale des forces agissant sur la grue constitue une condition suffisante pour déterminer, non seulement la valeur du contrepoids, mais aussi sa position, dès que l'on connaît tous les autres poids. Voici comment on trouve à la fois l'un et l'autre.

Les polygones funiculaires tracés, l'un y compris la surcharge de 3^T , l'autre sans cette surcharge, suffisent. Le premier est formé de la ligne brisée $G_1T_1P_1D_1$. Le second est le tracé $G_1T_1P_1C_1$, qui ne diffère du premier que par le dernier côté P_1C_1 . Ces deux derniers côtés coupent les positions extrêmes des résultantes, l'une en D_1 , l'autre en C_1 . On voit qu'en joignant ces deux points l'on a immédiatement le dernier côté du polygone qui, cette fois, comprendra l'effet du contrepoids. Sa rencontre en G_1 , avec G_1T_1 donne la position du contrepoids. La parallèle à G_1D_1 , menée par le pôle O, donne la valeur qui est, comme nous l'avons dit, de $3^T,6$.

Toute indétermination cesse donc dès qu'on se donne les verticales limites qui devront correspondre à la résultante sous charge, et sans charge.

Le calcul des efforts intérieurs se fera à l'aide du même polygone des forces.

La chaîne étant mouflée, le brin qui se rend au treuil supportera $1^T,75$. Cette valeur est portée en pointillé à partir de b , parallèlement à la direction de la chaîne. La résultante se décomposera suivant des parallèles à la flèche ($11^T,6$) et au tirant supérieur ($7^T,9$).

Le contrepoids donne sur son tirant $5^T,7$, et sur sa contrefiche de support $5^T,4$.

L'ensemble du système précédent (charge, poids de flèche et des flasques, contrepoids) s'exerce sur les galets de roulement et sur la tête du pivot porté par le chariot. Suivant que la grue porte sa charge ou non, c'est le galet d'avant ou celui d'arrière qui portera. La réaction des galets est normale à leur surface du roulement. Leur rencontre avec la résultante donnera, à chaque fois, le point qu'il faut joindre à T pour avoir l'effort sur le pivot supérieur.

Pour ne pas tracer un deuxième polygone des forces, on a retranché de celui qui a servi plus

haut, $1^T,6$ représentant le poids du chariot. Le polygone funiculaire des forces restantes est alors, sans charge, $G_2T_1P_1C_1$, et avec charge $G_2T_1P_1D_1$. Les deux résultantes sont R_1 et R_2 , (leurs verticales se confondent malheureusement presque avec A et B, les centres des roues de support). Les points r_1 et r_2 sont les rencontres de ces résultantes avec les normales à la couronne de roulement, et l'on trouve, par les polygones des forces, l'importance de ces réactions, $3^T,66$ et $5^T,22$, puis des charges sur le pivot : $5^T,8$ et $8^T,75$.

Tous les éléments essentiels à la construction de la grue se trouvent ainsi déterminés.

9. Grue de montage pour bâtiments (pl. VII, *fig.* 18). — Cette grue consiste en un fléau supérieur, mobile autour d'un axe horizontal, ce qui permet de porter la charge à des distances variables de l'axe de l'appareil. Celle représentée par la *fig.* 18 est construite pour soulever une charge de 2^T à 5 mètres de distance de l'axe de la voie sur laquelle elle route, ou 1^T à la distance de $6^m,50$ de cet axe. La stabilité doit être également assurée dans les deux cas.

Le fléau est retenu par une chaîne fixée à

l'arrière, et dont la traction l'incline en lui donnant la portée voulue.

Le levage de la charge se fait par un deuxième treuil, à bras ou à vapeur, placé comme le premier sur la plate-forme inférieure du pylône qui supporte le fléau. Le tout roule sur deux paires de galets AB, dont l'écartement est de 3 mètres.

Les poids des différentes parties de l'appareil sont les suivants :

Fléau supérieur, 800 kilogrammes.

Pylône de support avec treuils, etc., 15 000 kilogrammes.

Crochet, chaîne, etc., levant la charge, 500 kilogrammes.

Il n'y a pas de contrepoids, comme celui de la grue calculée plus haut.

La stabilité générale sera assurée si, sous les charges les plus lourdes, la résultante passe largement à l'intérieur des galets AB.

Nous disposons le polygone des forces en commençant par le poids du fléau, $0^T,8$, puis le poids du pylône, 15^T , enfin les deux charges $1^T,5$ ou $2^T,5$, qui sont les poids de la charge accidentelle augmentée du crochet et des accessoires.

Les deux polygones funiculaires correspon-

dants se traceront aisément et on trouvera, coïncidant presque, les deux résultantes R_1R_2 . La plus défavorable sera R_1 , donnée par la charge de $2^T,5$ à 6 mètres de l'axe. Elle passe à $0^m,80$ en dedans de la roue B, ce qui est une condition suffisante de stabilité.

Pour avoir les réactions sur les galets on joindra les points a et b , où les côtés extrêmes du funiculaire rencontrent les verticales de A et de B. La parallèle à cette ligne, passant par P, donnera la valeur des réactions A et B.

Les forces intérieures au système se déduiront de la même épure. La chaîne de levage étant mouflée une fois, le brin allant au treuil supportera $1^T,25$ (ou $0^T,750$), mais l'axe de la poulie de tête donne la charge totale de $2^T,5$ sur l'extrémité du fléau. On la décomposera (*fig.* 19) en 1 et 2 et l'effort sur le tirant 2 fournira immédiatement, par le nœud supérieur, les valeurs de 3 et 4. Enfin 4 donnera la valeur de l'effort sur 5 et celui sur t , la chaîne de retenue de fléau. Le polygone 5,3,1, complété par \mathfrak{R} , donnera la réaction du fléau sur l'axe du sommet.

On aura remarqué que nous n'avons pas ici composé la charge totale de $2^T,5$ avec l'effort sur la chaîne, qui est de $1^T,25$, pour avoir les efforts sur les pièces 1 et 2. Le brin de chaîne est, en

effet, parallèle à 1, et on pourra simplement ajouter cet effort de $1^T,25$ aux $3^T,4$ qui résultent de l'épure, comme provenant de la charge verticale $2^T,5$. Leur composition et introduction dans le tracé Cremona auraient fourni exactement les mêmes résultats.

10. Grue Titan (pl. VIII, *fig.* 20). — La grue que représente la *fig.* 20 est destinée à la pose des blocs pour murs de quai, ou au versement des wagons apportant des enrochements. Elle se compose d'une grande volée tournante, sur laquelle chemine un chariot porte-blocs. Cette volée tourne sur une couronne de galets, représentée au dessin, et qui est elle-même portée par un beffroi d'une grande hauteur, susceptible de se déplacer sur ses galets de support.

Dans un semblable système, il importe que la résultante des poids reste strictement dans les limites déterminées. Il faut, en effet, que non seulement la stabilité de la volée seule, et de l'ensemble de la construction soit assurée, mais il ne faut pas que la charge sur l'une ou l'autre série des galets de support (galets d'avant ou galets d'arrière) dépasse une certaine limite, afin que leur fonctionnement soit assuré dans toutes les positions.

Dans la grue représentée, le poids maximum du bloc était de 35 tonnes. Le crochet avec l'appareil de suspension et le chariot supportant cet appareil pesait environ 5 tonnes. C'est donc un poids de 40 tonnes qui pouvait — suivant les nécessités du travail — s'avancer à 30 mètres de l'axe du chemin de roulement inférieur.

D'autre part, des wagons chargés de pierres, pesant 20 tonnes, — soit, avec l'appareil de suspension, 25 tonnes, — devaient pouvoir être portés à 45 mètres du même axe.

Enfin de plus petits wagons pesant 17 tonnes, — soit 22^T avec la suspension — devaient pouvoir être portés à 50 mètres de l'axe de la voie.

Tous ces poids étaient soulevés lorsque, la volée étant orientée perpendiculairement à la position de la figure, le chariot de levage se trouvait à 10 mètres de l'axe.

Le poids de la volée, y compris les machines et appareils fixes qu'elle portait, atteignait 255 tonnes.

Il y avait lieu de déterminer le contrepoids nécessaire pour l'équilibre de tous ces poids. Ce contrepoids devait occuper le dernier panneau arrière de la volée.

Enfin on désirait que, sous l'effet de ces diverses charges, la résultante ne s'écartât pas du centre

de l'appareil de plus de $1^m,50$. Le diamètre de la couronne de roulement de la volée est, en effet, de 8 mètres. La largeur de la voie sur laquelle roule le beffroi est aussi de 8 mètres. Le beffroi lui-même est carré en plan, en sorte que le calcul fait pour l'une des positions défavorables de la volée est applicable à toutes les autres positions analogues.

Le polygone des forces (*fig.* 22) contient les poids sus-indiqués dans l'ordre suivant, en remontant : bloc 40^T , volée 255^T .

A l'aide d'un pôle P quelconque, mais convenablement choisi pour la commodité de l'épure, nous traçons un polygone funiculaire qui s'appliquera aux deux forces en question, la surcharge étant supposée à son éloignement maximum du centre de l'appareil en A_1 . Ce funiculaire sera $A_1B_1C_1$ qui coupe en C_1 la verticale du contre-poids. Nous traçons à droite et à gauche de l'axe les droites distantes de $1^m,50$ de l'axe, que le centre de gravité de l'ensemble ne doit pas dépasser. Le premier côté du polygone coupe cette limite *avant* en G_{40} . Joignant ce point à C_1 , nous menons par cette droite une parallèle par le pôle, et nous trouvons la valeur du contre-poids, à 145 tonnes.

Ici il n'y a point de tâtonnement, comme pour

la partie roulante du § 8, la position du contrepoids étant déterminée d'avance.

Par contre, il est nécessaire de vérifier que ce contrepoids conviendra également bien pour tous les autres cas de charge qui peuvent se présenter.

A cet effet, nous traçons les différents polygones funiculaires correspondants à ces cas.

A vide, et le chariot porte-blocs ramené aussi près que possible de l'axe, en D, son poids n'étant que de 5^T , on trouve la position G_V du centre de gravité. Dans cette condition d'allègement la plus défavorable, le centre de gravité n'atteint pas la limite *arrière* que nous nous étions fixée.

Les charges extrêmes de 25 tonnes à 45 mètres de l'axe et de 22 tonnes à 50 mètres de l'axe donnent les positions G_{25} et G_{22} du centre de gravité. Ces points sont compris entre les deux limites $+ 1^m,50$ et $- 1^m,50$ à partir de l'axe, et l'on en conclut que le contrepoids déterminé en premier lieu convient à tous les cas de charge.

11. Pile de viaduc (pl. IX, *fig.* 23). — Les piles métalliques pour viaducs se réduisent, en général aujourd'hui, à des types très simples. La *fig.* 23 en représente une de dimensions peu importantes, mais qui peut servir d'exemple très

suffisant pour ce genre de construction. Elle se compose de quatre arbalétriers, dont deux sont représentés par la projection. Ces arbalétriers sont réunis par des entretoises horizontales qui forment autant d'étages et chaque étage est pourvu d'un croisillon, soit de deux barres en croix. Ces barres sont assez longues, leur section est, en général, peu importante et l'on est dans l'habitude de ne tenir compte que d'une barre sur deux pour le calcul, en considérant celle qui, sous l'effort horizontal du vent, travaille à l'extension. Il résulte de là que les entretoises sont censées travailler uniquement à la compression et on les proportionne en conséquence.

Quant aux arbalétriers, leur section est plus importante, puisqu'ils ont à subir à la fois les charges verticales du tablier et des trains et les efforts du vent. Ils peuvent travailler indifféremment à la tension ou à la compression.

Nous ne nous occupons ici que des efforts provenant du vent.

Les règles généralement admises supposent que l'effort du vent peut atteindre, sur des surfaces planes, 270 kilogrammes par mètre carré, au maximum. Sous un effort semblable, les trains ne pourraient plus circuler, mais seraient renversés, tout au moins ceux de voyageurs.

On admet donc que, lors du passage d'un train, l'effort du vent ne peut dépasser 170 kilogrammes par mètre carré (Règlement ministériel du 29 août 1891, art. 5).

Nous supposons que la pile dont il s'agit supporte des travées de pont ayant 30 mètres de longueur totale. Chaque paire d'arbalétriers (qui forment ce qu'on appelle souvent, une palée) correspond donc à 15 mètres de travée, tablier ou train.

Dès lors, les surfaces exposées au vent sont les suivantes :

Train $3^m \times 15^m$	45 ^{m²}
Tablier $2^m,25 \times 15^m$	33,75
Couronnement de pile, estimé . . .	0,80
Chaque étage de 5 ^{m,50} de hauteur .	3,50

Les efforts qu'exerce le vent sur ces surfaces sont les suivants :

Désignation	Surface	Vent à 270 p. m.	Vent à 170 p. m.
Train	45 ^{m²}	«	7 ^{t,65}
Tablier.	35, 75	9 ^{t,10}	5, 73
Couronnement .	0, 80	0, 22	0, 14
Chaque étage .	3, 50	0, 95	0, 60

La moitié de l'effort sur l'étage supérieur doit

être ajouté à celui sur le couronnement. Pour les autres, on appliquera, à chaque nœud antérieur, la moitié appartenant aux deux étages contigus. Dans le cas présent, ces deux moitiés sont égales, chaque étage étant évalué au même chiffre.

Nous portons ces efforts en polygone des forces (*fig.* 24-25). Ceux qui s'exercent sur le couronnement et au-dessus produisent leur effet sur les trois barres formant l'étage supérieur. Pour en connaître la répartition, nous cherchons, au moyen d'un polygone funiculaire, leur résultante. Cette résultante rencontre l'arbalétrier de gauche en A_1 . Ce point sera joint avec B_1 , nœud de l'arbalétrier de droite avec la barre de treillis.

La résultante R sera décomposée en deux efforts, l'un mq parallèle à cette ligne $A_1 B_1$ et l'autre parallèle à l'arbalétrier A . On aura ainsi, en qr , l'effort dans celui-ci. La deuxième composante sera à son tour décomposée suivant la direction de l'arbalétrier B en mm_1 et la barre de treillis en qm_1 .

Cette première détermination opérée, l'épure Cremona se tracera comme à l'ordinaire, avec la succession voulue des côtés pour en faire une figure réciproque de la pile.

Nous résumons comme suit les efforts ainsi obtenus :

Désignation des Étages	Arbalétrier A		Arbalétrier B	
	Sans surcharge	Avec surcharge	Sans surcharge	Avec surcharge
Base . . .	35 340	50 660	35 340	50 660
Étage 1 . .	32 000	48 350	35 340	50 660
" 2 . .	28 000	45 000	32 000	48 350
" 3 . .	21 670	40 000	28 000	45 000
" 4 . .	8 200	28 000	21 660	40 000

Désignation des Étages	Treillis		Entretoises	
	Sans surcharge	Avec surcharge	Sans surcharge	Avec surcharge
Base . . .			4 000	2 920
Étage 1 . .	5 000	3 670	4 170	3 170
" 2 . .	5 670	4 420	4 340	3 500
" 3 . .	7 330	3 500	5 000	4 170
" 4 . .	14 670	4 170		

L'angle entre les arbalétriers étant faible, on est exposé à des défauts de précision dans le tracé des efforts. Pour se garantir contre eux, on fera bien de contrôler le tracé en répétant la

première construction indiquée ci-dessus, pour un autre point. On choisira pour cela, avec avantage, le dernier tronçon d'arbalétrier à la base. C'est la résultante des efforts sur la pile entière qui interviendra alors. C'est son intersection A_2 avec l'arbalétrier de gauche qu'on joindra à B_2 , le nœud inférieur sur B. La parallèle à cette droite doit passer par m , l'extrémité gauche du polygone des forces et le sommet inférieur n .

On remarquera que la hauteur totale comprise entre le polygone primitif des forces et la dernière ligne horizontale inférieure, donne exactement l'effort vertical de compression ou d'arrachement sur la base des arbalétriers. En effet, le dernier effort obtenu pour ceux-ci s'applique à la portion qui se trouve au-dessous de l'entretoise inférieure. Elle a la direction parallèle à l'arbalétrier et il suffit de la projeter sur une verticale pour avoir l'effort d'arrachement vertical sur les maçonneries.

L'effort horizontal total sur les maçonneries est donné par la longueur totale du polygone des forces. Ici, il faut remarquer que le système n'est plus triangulé, la diagonale, qui existe dans chaque étage, manquant. Il en résulte que les bases des arbalétriers sont soumises à un certain cisaillement horizontal qui, vu leur faible

hauteur, n'a point d'inconvénient en pratique. Mais il est bon d'en connaître l'intensité : il est égal, pour l'ensemble des deux bases, à la force qui s'exerce dans les premières entretoises horizontales, qui est ici de 2 920 kilogrammes et de 4 000^{kg}, suivant l'hypothèse envisagée.

Le premier nœud de l'arbalétrier A réunit quatre barres, et il peut se trouver en équilibre par des forces agissant suivant l'axe de celles-ci. Il ne saurait en être de même du premier nœud de l'arbalétrier B, où se réunissent deux barres en prolongement l'une de l'autre, et une troisième barre de direction quelconque. Si celle-ci, qui est l'entretoise n° 1, y donne un effort — ce qui est généralement inévitable —, le tronçon de base subit forcément à la fois une compression venant de l'arbalétrier et un cisaillement horizontal. Il est prudent de supposer que la totalité de l'effort tranchant passe par cette pièce de base.

Si la résultante des efforts horizontaux du vent, passait par le point de rencontre des arbalétriers prolongés, l'effort tranchant n'existerait à la base que sous forme de composante des efforts transmis par les arbalétriers suivant leurs axes. Mais ce point de rencontre est, en général, si éloigné, que la composante en question n'atteint pas la valeur de l'effort tranchant. Il

faut donc tenir compte de celui-ci autrement, c'est-à-dire en calculant le cisaillement, et même la flexion qu'il peut donner sur les bases au-dessous de la première entretoise.

L'épure indique que l'effort en question est nul quand l'effort sur la première entretoise est lui-même égal à zéro.

12. Poutre de pont à triangles isocèles, pour route (pl. X, *fig.* 26). — La forme de poutre la plus simple est celle à membrures parallèles et à treillis en triangles isocèles.

La charge la plus simple est celle uniformément répartie. Nous allons en déterminer les effets, puis nous examinerons ceux de la charge roulante mobile, en adoptant pour cela le chariot d'épreuve défini par le règlement français, en date du 29 août 1891.

Les poutres, au nombre de deux, ont 35 mètres de portée. Leur hauteur est de 5^m,40. Elles sont divisées en 7 panneaux de 5 mètres. La largeur du pont entre garde-corps est de 6 mètres. La voie est supérieure.

Le poids propre, comprenant métal, voûtes, chaussée et trottoirs, est de 6^T,6 par mètre courant, soit 3^T,3 par poutre.

La charge permanente, supposée concentrée

aux nœuds supérieurs, sera, pour chacun d'eux, $3^T,3 \times 5 = 16^T,5$. Il est, toutefois, plus exact de supposer que ce poids s'applique, partie aux nœuds supérieurs, partie aux nœuds inférieurs. Il sera très approximativement de $1^T,5$ à chaque nœud inférieur et 15 tonnes à chaque nœud supérieur.

Ces données suffisent pour déterminer les efforts dans toutes les barres, à l'aide d'un tracé Cremona (*fig. 27*). Nous portons, à l'échelle de $0^{\text{mm}},5$ pour 1 tonne, sur une verticale, les charges aux nœuds supérieurs, puis celles aux nœuds inférieurs.

Comme la poutre, aussi bien que ses charges, sont symétriques, il suffit d'en considérer la moitié; la réaction sera égale sur les deux appuis. Elle sera :

$$\mathfrak{R} = \frac{6 \times 15^T + 7 \times 1^T,5}{2}.$$

Les charges aux nœuds A et B passent, en effet, directement dans les appuis et n'affectent, en aucune façon, la construction.

Pour tracer le polygone Cremona, il convient de placer les charges des nœuds supérieurs en haut, celles des nœuds inférieurs en bas. L'épure se dessine alors aisément et donne les efforts

dans toutes les barres jusqu'au milieu de la poutre (vol. I, § 31).

Surcharges. — La surcharge que nous employons est celle du chariot de 16 tonnes, traîné par 4 paires de chevaux. La largeur du pont est suffisante pour qu'il en passe deux de front : chaque poutre pourra donc avoir à supporter la surcharge d'une file entière de chariots.

Membrures. — Appliquant ce qui est dit au § 40, nous préparons une épure représentant une file de chariots (*fig.* 28) et nous traçons avec un polygone des forces (*fig.* 30) où la distance polaire est de 40 000 kilomètres (ou 10 mètres) le polygone général des moments. Le moment maximum se produisant sous une des roues et ce moment s'appliquant aux nœuds de la poutre, pour produire dans la membrure qui lui est opposée l'effort maximum, nous plaçons successivement les nœuds inférieurs A_1, C_1, D_1, E_1 , de la poutre sous les roues P et Q. Les lignes pointillées se rapportent à l'une des roues ; les pleines, à l'autre. Les maxima des moments s'indiqueront tout seuls et résultent du passage de la roue P, pour les tronçons 2 et 6 et de la roue Q pour les tronçons 10 et 14. On répétera (*fig.* 29) le même tracé pour les nœuds supérieurs, pour

obtenir les maxima dans les membrures inférieures 4, 8 et 12. Le premier correspond au passage de la roue P en C ; les membrures 8 et 12 auront leur maximum quand la roue Q sera en D et E.

Le tableau suivant résume les moments ainsi obtenus, lesquels, divisés par la hauteur 5^m,40, donnent les efforts dans les membrures :

Membrures	Barres	Moments	Efforts
Membrures supérieures	2	62 TM ,6	11 ^T ,6
	6	152,0	28, 1
	10	201,2	37, 2
	14	209,3	58, 6
Membrures inférieures	4	114,6	21, 2
	8	184,0	34, 1
	12	210,6	39, 0

Treillis. — La méthode indiquée au § 42 fournira les maxima des efforts dans les treillis. Pour une file de chariots, contrairement à ce qui se passe pour un train de locomotives, les efforts tranchants les plus grands se produiront quand la file entière sera sur le pont et que le dernier chariot quittera la culée, avançant sur la travée, sans être suivi. Le tracé de ces efforts maxima

sera d'ailleurs exactement semblable à celui indiqué pour un train (vol. I, *fig.* 54).

Nous l'appliquons *fig.* 31, où le polygone des efforts tranchants est tracé à l'aide de celui des forces indiqué à gauche, et avec $l = 35$ mètres pour distance polaire. Le maximum dans les barres 1 et 3 se produira en même temps, quand la surcharge occupera la longueur CB. Pour l'obtenir, on projettera CC' (*fig.* 31) sur la direction des barres. Comme elles sont symétriques, il suffira de le faire pour l'une des deux barres. Le maximum des barres 5 et 7 sera donné par la projection de DD' et ainsi de suite.

Par raison de symétrie, on obtiendra les mêmes valeurs en 13 et 13', que l'on commence par la droite ou par la gauche. Au-delà de ces barres, on obtiendra encore des maxima; mais ils seront inférieurs et de sens contraire aux efforts que l'on obtiendra en retournant la figure des efforts tranchants, c'est-à-dire en faisant cheminer la surcharge en sens contraire. En général, leur importance sera nulle. Cependant, en y joignant les efforts dus à la charge permanente, on peut parfois trouver un maximum relatif.

Relevant à l'échelle les valeurs qu'on vient d'obtenir, on pourra dresser un tableau résumé

de tous les efforts maxima dans les barres. Le voici, avec l'indication des efforts de compression par le signe —.

Désignation	Numéro des barres	Charge permanente	Surcharge	Totaux
Membres inférieures	2	— 22,5	— 12,3	— 33,8
	6	— 60,6	— 32,8	— 93,4
	10	— 83,5	— 39,4	— 122,9
	14	— 91,4	— 40,5	— 131,9
Membres supérieures	4	45,3	21,0	66,3
	8	75,6	35,1	110,7
	12	90,8	40,9	131,7
Barres descendantes de la poutre	1	55,2	25,3	80,5
	5	37,0	18,9	55,9
	9	18,7	12,6	31,3
	13	0,8	7,9	8,7
Barres montantes vers le milieu	3	— 53,8	— 25,3	— 79,1
	7	— 36,0	— 18,9	— 54,9
	11	— 17,0	— 12,6	— 29,6

13. Poutre de pont pour chemin de fer. Surcharge d'un train (pl. XI, *fig.* 32). — La *fig.* 32 représente une poutre de pont à une voie de chemin de fer, de 61^m,20 de portée d'axe en axe des appuis. Le type choisi est celui d'une poutre à N simples, avec montants comprimés

et diagonales tendues, avec contre-diagonales assurant l'impossibilité qu'aucune d'elles soient jamais soumise à une compression.

La surcharge imposée pour les épreuves est celle d'un train formé de deux locomotives pesant 65 tonnes chacune avec son tender, suivies de wagons du poids de 15 tonnes chacun. Pour obtenir les maxima des efforts dans les membrures, il convient d'adosser, par les cheminées, les machines dont le diagramme est donné *fig.36*. Par mesure de précaution et pour prévoir le cas où deux trains stationneraient simultanément sur le pont, on a supposé que chacune de ces deux machines était suivie de wagons chargés. On placera les machines à la suite, cheminées en avant, pour les efforts maxima des treillis et des montants. Le coefficient de travail maximum admis est de 10 kilogrammes par millimètre de section nette des pièces tendues et de section brute pour les pièces comprimées. Le métal est de l'acier.

La poutre est divisée en douze panneaux de 5^m,10 chacun. Sa hauteur est de 7^m,20 entre semelles. Cette hauteur est très légèrement supérieure à la distance entre centres de gravité des membrures. Celle-ci varie un peu avec le nombre des semelles et comme les points de rencontre

des axes de montants et de treillis sont à 7 mètres, c'est cette hauteur que nous adoptons pour le tracé de l'épure.

Le poids du tablier avec ses accessoires est le suivant :

Métal du tablier	1 500 ^{kg} par mètre
Rails, accessoires et contre-rails.	170
Traverses et platelage.	330
	<hr/>
Total.	2 000

Soit, par poutre, 1 000^{kg} = 1 tonne.

Membrures. — Comme nous allons nous servir de la méthode des moments (§ 46) pour chercher les maxima dans les membrures, il n'est pas nécessaire ici de répartir le poids entre nœuds supérieurs et nœuds inférieurs. Nous pouvons calculer le moment maximum au milieu de la poutre par la formule :

$$M = \frac{pl^2}{8} = 1^t,000 \times \frac{61,2^2}{8} = 468^{\text{tm}},2.$$

Nous traçons (*fig. 32*) la parabole qui a pour flèche cette valeur au milieu de la poutre, les cordes de cette courbe, tracées d'une verticale de nœud à la suivante, donneront le polygone des moments dus à la charge permanente.

Celui dû aux surcharges maxima se déterminera à l'aide de la *fig. 34*. Sur une droite indéfinie, nous plaçons les deux machines adossées, suivies des wagons de 15 tonnes. Ayant tracé un polygone des forces (*fig. 33*), donné par le poids des roues et avec une distance polaire égale à 10 mètres (ou 25 tonnes) nous obtenons un polygone funiculaire indéfini. Sur ce polygone, nous ferons voyager la portée de $61^m,20$, en plaçant successivement, au point correspondant à chaque nœud, les roues des locomotives, sachant d'avance que ces roues, de beaucoup les plus lourdes, nous donneront les moments les plus grands. Un très petit nombre de tâtonnements nous suffira pour voir qu'aux montants C et E, il faudra placer la dernière roue de l'une des machines. Au montant G, ce sera la roue suivante, en I et en K, ce sera la deuxième roue de tête et enfin, au montant M, ce sera la roue d'avant de l'une des machines qui donnera le maximum. Cette dernière donnera un moment de 900 tonnes métriques. On le portera dans la *fig. 32*, ainsi que tous les autres, chacun à son montant, et on obtiendra, en joignant les extrémités des ordonnées ainsi marquées, le polygone des montants maxima. Faisant la somme de ces ordonnées avec celles de la parabole déjà tracée,

Numéro des barres	Moment maximum	Effort maximum	Composition des barres	Section en m. m. c.	Coefficient de travail
DF	— 755 ⁴	— 1074,9	<p><i>Membres supérieures</i></p>  <p>2 Ames 500 X 8 2 Cornières 90 X 90 X 9 2 " 70 X 70 X 7 Même section que DF avec addition d'une semelle de 500 X 8</p>	12940	— 8 ^k ,34
FH	— 1 020	— 145,9	Même section que FH avec addition d'une semelle de 500 X 9	16940	— 8, 62
HJ	— 1 212	— 173, 1	Même section que HJ	21 440	— 8, 08
JL	— 1 320	— 188, 5	Même section que HJ	21 440	— 8, 80
LN	— 1 368,2	— 195, 5	Même section que HJ	21 440	— 9, 13
ACE	412	58, 8	<p><i>Membres inférieures</i></p>  <p>2 Ames 500 X 8 2 Cornières 90 X 90 X 9 Même section que AE avec addition d'une semelle de 500 X 9</p>	10330	5, 70
EG	732	104, 5	Même section que EG	14 786	7, 08
GI	1 020	145, 9	Même section que EG	14 786	9, 88
IK	1 212,5	173, 1	Même section que EG avec addition d'une semelle de 500 X 10	19 346	8, 98
KM	1 320	188, 5	Même section que IK	19 346	9, 76

on aura le polygone des moments maxima totalisés.

On les prendra à l'échelle à chaque nœud et on pourra former un premier tableau des moments et des efforts dans chaque tronçon de membrure, obtenu en divisant le moment au nœud qui lui est opposé par $h = 7$ mètres.

Montants et diagonales. — La recherche des efforts tranchants maxima est faite *fig. 35*. Ceux provenant de la charge permanente sont donnés par une droite, ayant sur les culées l'ordonnée $\frac{1}{2} pl = \frac{17,000}{2} \times 61^{\text{m},2} = 307,6$. Aux points où cette droite coupe les milieux des panneaux on a tracé les horizontales qui représentent dans la longueur du panneau ledit effort tranchant.

Ceux donnés par la charge roulante sont obtenus au moyen du tracé indiqué dans le vol. I, § 46. En les disposant comme le montre la *fig. 35*, on peut immédiatement faire la somme des uns et des autres, et la projeter sur la direction des barres du treillis (vol. I, §§ 45 et 46).

Le premier montant CD est en réalité une barre tendue, aucune diagonale ne s'attachant au pied de cette barre. Elle sert de suspension aux

pièces qui aboutissent en C, et qu'on peut évaluer comme suit :

Poids de la membrure inférieure et des pièces accessoires $0^{\text{T}},7 \times 5,10 = 3,57$

Poids de la surcharge maxima :

$$5^{\text{t}},5 \times 2 \frac{4,41 + 3,03}{5,10} = 16,85$$

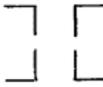
Total 19,62

Les montants suivants sont tous comprimés. EF subit, comme plus grande compression, l'effort tranchant maximum au point G, et en général, chaque montant a pour charge maxima l'effort tranchant au nœud suivant, auquel il faut ajouter toutefois la charge du nœud qui se trouve à sa propre extrémité supérieure. Ici ce poids est égal à : $0^{\text{T}},3 \times 5,10 = 1^{\text{T}},53$.

Dans la région du milieu de la poutre, certains montants pourraient, par suite du déplacement de la charge roulante, subir alternativement une tension et une compression. L'addition des contre-diagonales empêche cet effet de se produire, comme nous le rappellerons à propos des diagonales.

Parmi les diagonales, la première est AD qui est, en réalité, la membrure supérieure infléchie vers l'appui, et à laquelle on donne ordinairement la même section qu'à la membrure. Sa

charge maxima sera celle due à l'effort tranchant maximum en D, sous la seule réserve que la progression de la roue de tête du train ne diminue pas ce maximum (vol. I, § 43). On tracera donc pour s'en assurer, le petit polygone A' avec 5^m, 10, longueur du panneau, pour distance polaire. L'ordonnée nouvelle étant plus grande que celle en C', c'est elle qui est le véritable maximum. On le projettera sur la direction de la barre AD, pour avoir l'effort sur cette barre.

Numéro du montant	Effort maximum	Composition des barres	Section en m. m. c.	Coefficient de travail maximum
DC	-19 ^t ,62	 4 Cornières de 60 × 60 × 8	2 944	6,467
FE	-61,53	 4 Cornières de 90 × 90 × 10	6 800	-9,08
HG	-49,03	" 4 Cornières de 90 × 90 × 9	6 156	-7,97
JI	-37,53	" 4 Cornières de 80 × 80 × 8	4 864	-7,72
LK	-26,53	" 4 Cornières de 60 × 60 × 8	3 584	-7,41
NM	-15,53	" Même section que LK	3 584	-4,33

Ce même tracé a été répété pour chaque dia-

gonale, et on remarquera qu'il a été reporté au pied de l'ordonnée, comprenant dans celle-ci la portion due à la charge permanente. On a ainsi du coup la longueur totale à projeter obliquement sur la direction de la barre. Partout, jusqu'au nœud K, le maximum est donné par le passage de la 2^e roue au point considéré.

Numéros des barres	Effort maximum	Composition des barres	Section en m. m. c.	Coefficient de travail maximum
AD	105,0	Même section que DF	12 940	8,11
DE	89,0	2 Plats 320 × 8 4 Cornières 80 × 80 × 9	9 060	9,81
FG	73,3	2 Plats 320 × 8 2 Cornières 80 × 80 × 8	7 328	10,0
HI	58,5	<i>id.</i> 2 Plats 280 × 8 2 Cornières 80 × 80 × 8	6 242	9,37
JK	44,0	<i>id.</i> 2 Plats 200 × 8 2 Cornières 70 × 70 × 8	4 712	9,34
LM	30,3	<i>id.</i> 2 Plats 150 × 8 2 Cornières 60 × 60 × 8	3 552	8,55
NK ₁	17,5	2 Plats 150 × 8	2 080	8,42

On remarquera que la *fig.* 32 indique encore des diagonales dans les panneaux IK. L'épure (*fig.* 35) montre que ces barres ne peuvent, théoriquement, subir aucune traction, et seraient ainsi inutiles, car elles ne sont composées, comme les voisines NK, que de deux fers plats qui ne sont pas susceptibles de recevoir aucune compression. Elles n'ont été ajoutées qu'à titre de simple précaution, pour prévoir le cas où des locomotives d'un poids bien supérieur à celles actuellement en usage pourraient être mises en service, ce à quoi peuvent conduire des progrès dans l'exploitation. Un assez grand nombre de pièces de pont subiraient alors des efforts un peu supérieurs aux limites admises, mais sans qu'il en résulte d'inconvénient. La stabilité de l'ouvrage pourrait, au contraire, être mise en danger si l'augmentation des efforts tranchants conduisait à donner aux barres JK une compression quelconque, si faible qu'elle soit. Les contre-diagonales IL préviennent entièrement ce danger.

14. Ferme de comble triangulée avec verticales (pl. XII). — La ferme AB a 20 mètres de portée. Les pannes ont 5^m,00 de longueur. La couverture est en tuiles, les chevrons et lattis en fer.

Le poids propre de cette couverture peut être estimé ainsi :

Ossature en fer .	44 ^{kg} par mètre carré de projection		
Tuiles	<u>46^{kg}</u>	"	"
Ensemble . . .	90 ^{kg}	"	"

Les pannes, qui se trouvent aux nœuds supérieurs de la ferme, sont espacées de 2^m,50. La charge permanente appliquée en chaque nœud sera ainsi égale à :

$$90^{\text{kg}} \times 5^{\text{m}} \times 2^{\text{m}},50 = 1\,125 \text{ kilogrammes.}$$

La réaction, à droite ou à gauche, sera $\frac{7 \times 1\,125^{\text{kg}}}{2} = 3\,937^{\text{kg}},5$. Nous la portons (*fig. 38*) de bas en haut, et nous la subdivisons en trois longueurs de 1 125 kilogrammes et une de 562^{kg},5. Le tracé Cremona (vol. I, § 33) se fait sans difficultés (les valeurs des efforts 4, 8 et 12 sont toutes comptées à partir de la verticale).

La surcharge accidentelle peut consister en neige ou pluie, donnant de nouvelles charges verticales, dont les efforts résultants se détermineront par un procédé tout semblable. Mais comme on la suppose, en général, appliquée aussi sur toute l'étendue de la ferme, il est inutile de refaire ce tracé ; il suffira de multiplier les efforts

qu'on vient de trouver par le rapport $\frac{p'}{p}$ de la surcharge à la charge permanente.

Il est plus intéressant d'indiquer le tracé des efforts causés par le vent qui frappe d'un côté seulement. Nous supposerons que ce vent vient de droite, et que (suivant l'ancienne hypothèse) il frappe sous un angle de 10° avec l'horizontale, avec une force de 100 kilogrammes par mètre carré.

La distance entre deux pannes, projetée sur une normale au vent, est de $1^m,65$ et la surface correspondante à chaque nœud de panne $1^m,65 \times 5^m \cong 8^m^2,25$. L'effort sur cette surface sera donc de 825 kilogrammes.

On peut le supposer appliqué en chaque nœud conservant sa direction, ou bien le projeter sur la normale au toit. Cette projection est alors égale à 490 kilogrammes. Son emploi donne des figures un peu plus claires.

Supposons d'abord que l'appui H' est fixe et H mobile.

La résultante du vent rencontrera la verticale par H en M' . Ce point, joint à H' , donne la direction de R' , réaction en H' . On obtient alors le polygone (*fig. 39*). On peut encore supposer H fixe et H' mobile. Dans ce cas, la *fig. 40* donne

Désignation	Numéros des barres	Charge permanente	Vent				Efforts maxima
			Appui H fixe		Appui H' fixe		
			Côté du vent	Côté opposé au vent	Côté du vent	Côté opposé au vent	
Arbalétrier	13	— 12 670	— 2 190	— 1 200	— 2 190	— 1 200	— 14 850
	10	— 10 880	— 1 830	— 1 200	— 1 830	— 1 200	— 12 710
	6	— 9 060	— 1 465	— 1 200	— 1 465	— 1 200	— 10 525
Entrait	2	— 7 200	— 1 090	— 1 200	— 1 090	— 1 200	— 8 290
	12	11 400	2 750	1 075	1 950	285	14 150
	8	9 780	2 215	1 075	1 400	285	11 995
Treillis	4	8 100	1 665	1 075	850	285	9 765
	11	— 1 800	— 600	0	— 600	0	— 2 400
	7	— 2 340	— 775	0	— 775	0	— 3 115
Montants	3	— 3 000	— 1 000	0	— 1 000	0	— 4 000
	9	800	270	0	270	0	1 070
	5	1 680	550	0	550	0	2 230
	1	4 860	815	0	815	0	5 675

les efforts (\mathcal{R} est alors parallèle à HM). Ils sont les mêmes, sauf en ce qui concerne toutes les les portions d'entrait 12, 8, 4, 4', 8', 12' et pour cet entrait la différence constante entre les deux valeurs est égale à la projection horizontale de l'effort total du vent.

Le tableau de la p. 67 résume les efforts dans les différentes barres.

Le calcul de la déformation a été appliqué au cas de la charge permanente seule : le vent ne donne que des efforts trop insignifiants.

A l'aide des efforts maxima ci-dessus calculés, on a arrêté les dimensions à donner aux barres. Tous les éléments nécessaires pour le calcul de ΔL sont résumés dans le tableau de la p. 69, ainsi que ses valeurs.

La *fig.* 66, pl. XVIII (I^{re} partie), qui nous a servi à l'explication du tracé des déformations, se rapporte à la ferme dont nous parlons ici, et on y trouvera, portés à l'échelle, à huit fois la grandeur naturelle, les ΔL . Ainsi que nous l'avons indiqué au § 52, la flèche de chaque point est donnée par sa hauteur verticale au-dessous de l'horizontale menée par H'.

Si l'on voulait calculer les efforts et la déformation résultant d'une surcharge telle que la neige qui sera presque toujours à considérer

Numéros des barres	Efforts maxima	Composition des barres	Sections des barres	Coefficient de travail	Longueurs	Efforts sous la charge permanente	$\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}$ $E = 20 \times 10^9$
13	— 14 850	2 Corn. 70 × 70 × 7	1 862mm	7 ^{kg} ,98	2 ^m ,80	— 12 670	0,96
10	— 12 710	"	"	6, 84	"	— 10 880	0,81
6	— 10 525	"	"	5, 66	"	— 9 060	0,69
2	— 8 290	"	"	4, 45	"	— 7 200	0,54
12	14 150	"	1 862	7, 60	5, 00	11 400	1,53
8	11 995	"	"	6, 44	2, 50	9 780	0,65
4	9 765	"	"	5, 24	"	8 100	0,54
11	— 2 400	2 Corn. 50 × 50 × 5	950	2, 53	2, 80	— 1 800	0,26
7	— 3 115	2 Corn. 60 × 60 × 6	1 368	2, 27	3, 50	— 2 340	0,30
3	— 4 000	2 Corn. 70 × 70 × 7	1 862	2, 15	4, 50	— 3 000	0,36
9	1 070	2 Corn. 50 × 50 × 5	950	1, 13	2, 50	800	0,10
5	2 230	"	"	2, 35	3, 75	1 680	0,33
1	5 675	"	"	5, 97	5, 00	4 860	1,28

comme uniformément répartie, il suffirait de multiplier les efforts et les flèches obtenus pour la charge permanente par le rapport du poids de la neige à cette charge. Si la neige n'occupait qu'une moitié de la ferme, on recourrait au tracé indiqué vol. I, § 55, *fig.* 69.

15. Ferme de comble à trois rotules. (pl. XIII). — La ferme représentée par la *fig.* 41 a 20 mètres de portée. Les pannes ont 6 mètres de longueur et se trouvent appliquées à chaque nœud supérieur. Elles sont espacées de 1^m,666.

La toiture est couverte en zinc, sur voilageage pesant 25 kilogrammes par mètre carré	25 ^{kg}
Le poids du métal de l'ossature est de :	<u>40^{kg}</u>
Ensemble :	65 ^{kg}
Le poids de neige formant la surcharge maxima est de	<u>45^{kg}</u>
Total :	110 ^{kg}

Le vent est supposé ne jamais dépasser une vitesse de 40 mètres par seconde, correspondant à 200 kilogrammes d'effort par mètre carré, normalement à sa direction.

Les charges maxima verticales seront, en chaque nœud d'attache des pannes :

$$110^{\text{kg}} \times 6^{\text{m}} \times 1^{\text{m}},666 = 1100^{\text{kg}}.$$

Le vent supposé horizontal, les efforts sont évalués comme suit :

En D', F' et H', la surface étant verticale, les efforts normaux seront :

$$\begin{aligned} D' & 2^m \times 6^m \times 200^{kg} = 2\,400^{kg}; \\ F' & 1,85 \times 6^m \times 200 = 2\,200^{kg}; \\ H' & 1,00 \times 6^m \times 200 = 1\,200^{kg}. \end{aligned}$$

A partir de H' la surface de toiture s'incline graduellement jusqu'au faîtage. Celle afférente à chaque panne a été mesurée à l'échelle. L'effort du vent, évalué normalement à cette surface, a été projeté sur la normale à la surface du toit en chaque nœud, ce qui représente très suffisamment la moyenne de l'inclinaison. On a obtenu ainsi les efforts normaux suivants :

$$\begin{aligned} \text{En H'.} & 0^m,75 \times 6^m \times 200^{kg} = 900^{kg}. \text{ Projetés} = 600^{kg}. \\ I'. & 1,15 \times 1\,200 = 1\,380. & = 800 \\ K'. & 0,85 \times 1\,200 = 1\,020. & = 450 \\ M'. & 0,55 \times 1\,200 = 660. & = 250 \\ O'. & 0,45 \times 1\,200 = 540. & = 150 \\ Q'. & 0,20 \times 1\,200 = 240. & = 70 \end{aligned}$$

Les charges verticales étant déterminées, on a d'abord cherché les réactions. A cet effet, dans la *fig. 42*, les charges aux nœuds ont été portées en polygone des forces, pour la moitié de la ferme où tout est symétrique ; et avec un pôle quelconque O on a tracé un funiculaire AB₁. Pour faire passer son homologue par B, il a suffi de

mener par O une parallèle à AB_1 , et par son point de rencontre avec la verticale des forces une autre parallèle à BA . On obtient ainsi le nouveau pôle O_1 , qui donne, en O_1R , la réaction totale \mathfrak{R}_A , et en O_1A , la poussée horizontale.

Sans tracer \mathfrak{R}_A , on peut procéder tout de suite à l'épure Cremona, donnant les efforts dans toutes les barres.

Nous avons supposé, pour ce tracé, que la ferme portait sa surcharge générale et maxima, parce que l'on obtient ainsi du coup les efforts maxima ordinaires. Si l'on a besoin, comme pour l'examen des effets du vent, de séparer les deux influences de la charge permanente et de la surcharge, il est souvent préférable d'opérer d'abord sur des chiffres plus grands, puis de multiplier tous les résultats par $\frac{p}{p+p'}$, pour avoir ceux relatifs à la charge permanente seule.

Pour tracer l'épure relative au vent, il faut connaître la valeur des deux réactions. A cet effet, nous portons (*fig. 43*) en polygone des forces cq , les efforts du vent calculés plus haut. La direction de la résultante est R_v . A l'aide d'un pôle O_2 , nous traçons, sur la *fig. 41*, le funiculaire de toutes ces forces, dans le but de déterminer la position de la résultante R_v . Aucune des

forces du vent n'agissant sur la moitié AB de la ferme, la réaction en A passe forcément par B, et la direction de \mathcal{R}'_A est ainsi fixée. Sa rencontre avec R_V sera jointe à C pour avoir la direction de \mathcal{R}_C et la résultante R_V de la *fig.* 43 se décomposera suivant ces deux directions pour obtenir la valeur de \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_C .

Dès lors tous les efforts extérieurs sont déterminés et l'on peut tracer le Cremona qui donne les efforts dans toutes les barres. Ils sont résumés dans les tableaux des p. 74 et 75.

16. Poutre de pont. Charge symétrique uniformément répartie (pl. XIV). — La poutre représentée par la *fig.* 44 est celle d'un pont-route, de 40^m d'ouverture et de 6 mètres de largeur. Elle a 8 panneaux de 5 mètres. Sa hauteur est de 6 mètres. La voie est placée à sa partie inférieure. On demande les efforts dans chaque barre et les déformations verticales en chaque nœud sous la surcharge uniformément répartie.

Le poids permanent est, par mètre de poutre, 3 600 kilogrammes par mètre courant, et la surcharge, de 400 kilogrammes par mètre carré, est de $400^{\text{kg}} \times \frac{6^{\text{m}}}{2} = 1\,200$ kilogrammes par mètre de poutre.

EFFETS DU VENT

Numéros des barres	Avec surcharge totale	Charge permanente seule	Effets du vent		Maximum (Tension)	Minimum (Compression)
			Côté du vent	Côté opposé		
1	9 250	5 470	—	19 400	15 500	—
2	9 250	5 470	—	19 400	15 500	—
3	4 600	2 720	—	9 750	8 500	—
4	4 150	2 450	—	8 900	7 550	—
5	4 050	2 400	—	9 400	8 750	—
6	2 910	1 720	—	8 400	7 860	—
7	1 670	990	—	6 000	5 970	—
8	450	266	—	3 000	3 050	—
10	—	—	19 800	—	10 450	—
11	—	—	13 000	—	5 500	—
12	—	—	8 350	—	2 430	—
13	—	—	7 900	—	2 870	—
14	—	—	6 300	—	2 190	—
15	—	—	3 950	—	790	—
16	—	—	1 040	—	—	—

extérieures

intérieures

Numéros des barres	Avec surcharge totale	Charge permanente seule	Effets du vent		Maximum (Tension)	Minimum (Compression)
			Côté du vent	Côté opposé		
17	0	0	— 2 400	0	0	— 2 400
18	1 740	1 030	— 5 550	870	2 610	— 4 520
19	— 1 400	— 828	— 170	850	22	— 1 570
20	— 2 330	— 1 378	— 1 140	— 210	— 238	— 2 540
21	— 2 300	— 1 360	2 300	— 870	940	— 3 170
22	— 1 900	— 1 125	2 270	— 1 500	1 145	— 3 400
23	— 1 400	— 828	2 100	— 1 800	1 272	— 3 200
24	— 1 100	— 650	0	0	— 650	— 1 100
25	— 4 070	— 2 410	7 920	— 2 100	5 510	— 6 170
26	— 3 870	— 2 290	6 400	— 3 200	4 110	— 7 070
27	— 170	— 100	750	— 1 500	650	— 1 670
28	870	515	— 640	— 530	340	— 125
29	1 280	757	— 2 150	400	1 680	— 1 393
30	1 100	650	— 2 950	1 670	2 770	— 2 300
31	530	314	— 3 400	12 900	3 440	— 3 086

Montants

Diagonales

Nous admettrons que toutes les charges sont concentrées aux nœuds inférieurs.

La charge permanente sera alors, en chaque nœud inférieur :

$$3\,600^{\text{kg}} \times 5 = 18^{\text{T}}.$$

La surcharge : $1\,200^{\text{kg}} \times 5 = 6^{\text{T}}.$

$$\text{Ensemble : } 24^{\text{T}}.$$

Dans la *fig. 45*, nous portons en polygone des forces, la réaction en A, subdivisée en trois charges de 24 tonnes et une de 12 tonnes. Ce polygone est tracé perpendiculairement à la direction réelle des charges. Tous les côtés du polygone des efforts devront donc être perpendiculaires au sens des efforts. Sauf cela, il est tracé comme d'ordinaire, en partant de l'appui A. La barre 1 reçoit toute la réaction, et la décomposition commence par le nœud C, où aboutissent les barres 2 et 3. Les efforts mesurés à l'échelle de 0,005 pour 10 tonnes sont consignés dans le tableau des p. 78 et 79.

Pour calculer les déformations, nous avons dû constituer chaque barre par des fers de dimensions déterminées. Elles sont indiquées au même tableau, ainsi que la section en millimètres, qui en résulte. Le coefficient de travail $R = \frac{F}{\Omega}$ est

indiqué, puis la longueur des barres, et enfin la valeur $\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}$, dans laquelle on a fait $E = 16 \times 10^9$, souvent applicable aux pièces rivées en fer.

Les valeurs de ΔL ont été employées dans le tracé de la *fig. 46*, faite en conformité à ce qui a été dit, 1^{re} partie, § 52. Partant du milieu K, on trouve successivement les déplacements des différents nœuds par rapport à celui-ci, supposé immobile. Le point A se déplacera, par rapport à sa position primitive, de K'A'. Or, ce point est en réalité fixe, dans le sens vertical, reposant sur la culée, et c'est le point K qui s'est abaissé de la hauteur verticale comprise entre A' et K'. On tracera donc une horizontale par A' et les distances verticales des points C'D'E', etc., à cette horizontale, fourniront les abaissements verticaux subis par chacun d'eux.

La distance horizontale entre K'₁ et A' est le déplacement horizontal du point A' : c'est la somme des allongements des tronçons de la membrure inférieure, de la demi-poutre.

La distance horizontale entre K'₁ et C' est de même le déplacement horizontal de C : c'est la somme des raccourcissements des éléments de la membrure supérieure, aussi pour la demi-poutre.

Numéros des barres	Efforts totaux F	Composition des barres	Sections en m. q.	Coefficient de travail	Longueurs des barres	$\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}$ en m. m.
2	70t	 <p>Ame 500 × 10 2 Cornières 90 × 90 × 10 Semelle 400 × 9</p>	12 000	5k,83	5m,00	1,82
5	120	Même section que N° 2 avec addition de 400 × 20	20 000	6, 00	//	1,88
9	150	Même section que N° 5 avec addition de 400 × 7	26 800	5, 60	//	1,75
13	160	Même section que N° 9	26 800	5, 98	//	1,87
7	70	Même section que N° 2	12 000	5, 83	//	1,82
11	120	Même section que N° 5	20 000	6, 00	//	1,83
15	150	Même section que N° 9	26 800	5, 60	//	1,75

Numéros des barres	Efforts totaux F	Composition des barres	Sections en m. q.	Coefficient de travail	Longueurs des barres	$\Delta L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A}$ en m. m.
3	109	2 Plats de 500 X 20	20 000	5,45	7,81	2,67
6	78	" 400 X 18	14 400	5,40	"	2,65
10	46	" 300 X 14	8 400	5,48	"	2,69
14	15	" 200 X 10	4 000	3,75	"	1,83
1	84	 Ame de 500 X 10 { 6 Cornières 80 X 80 X 10 2 Plats 200 X 10	21 000	4,00	6,00	1,50
4	60	 { 2 Ames 200 X 10 4 Cornières 90 X 90 X 10	10 800	5,55	"	2,09
8	36	 { 2 Ames 200 X 10 4 Cornières 70 X 70 X 10	9 200	3,91	"	1,47
12	12	 4 Cornières 70 X 70 X 8	5 200	2,91	"	0,87

17. Poutre de pont. Charge uniformément répartie sur la moitié seulement de la portée (pl. XV). — La *fig. 47* représente une poutre de pont de 30 mètres d'ouverture, destiné à une voie ferrée. Elle se subdivise en 6 panneaux de 5 mètres, et elle a 5 mètres de hauteur. La voie est supposée supérieure.

Charge permanente, ossature, voie, etc.	
par mètre de poutre :	1 800 ^{kg}
Surcharge uniformément répartie :	4 000 ^{kg}
Ensemble :	<u>5 800^{kg}</u>

Le pont ayant deux poutres, les charges de chacune seront 900 et 2 000 kilogrammes.

La surcharge de 4 000 kilogrammes est celle qui était souvent admise autrefois. Elle a servi à déterminer les sections à donner aux barres, à l'aide de la *fig. 48*.

La charge en chaque nœud supérieur (où nous admettons qu'on peut concentrer toute la charge permanente) est égale à

$$2\,900^{\text{kg}} \times 5 = 14^{\text{T}},5.$$

Le tracé relatif à la moitié de la poutre suffit. Il serait nécessaire, pour l'exécution, de faire la recherche des efforts tranchants maxima : nous nous en dispensons, ayant donné cette construction au § 13.

Les efforts trouvés ont servi pour le choix des dimensions de barres telles qu'elles sont résumées dans le tableau des p. 82 et 83.

On demande maintenant la déformation de la poutre sous une surcharge s'étendant sur la moitié de gauche de la poutre. Le nœud G aura alors la moitié de sa surcharge totale, soit $5^M \times \frac{2\ 000^k}{2} = 5$ tonnes, les nœuds C et E seront surchargés au maximum, soit 10 tonnes.

Nous ne reviendrons pas sur le calcul des réactions, que l'on trouvera aisément. On aura $\mathcal{R}_A = 17^T,5$ et $\mathcal{R}_B = 7^T,5$.

Pour avoir les efforts dans toutes les barres il faut tracer le polygone Cremona (*fig. 48*) qui s'applique à la poutre entière. Les efforts qu'il donne servent à dresser le tableau de la p. 84, destiné à résumer les valeurs de ΔL .

Nous prenons maintenant (*fig. 50*), A' comme point de départ du tracé des déformations, et nous supposons que la barre AC est invariable de direction. Δ_1 nous donne le premier point C', et Δ_2 avec Δ_3 permettent de trouver D'. A'D' est le déplacement de D par rapport à sa position primitive. Successivement on obtiendra de même les déplacements de tous les autres points, jusqu'à B'. La hauteur verticale entre A' et B'

Numéros des barres	Efforts maxima	Composition des barres	Section en m. m. c.	Coefficient de travail maximum
1	— 36 ^r , 25	 <p> Ame 350 × 9 2 Cornières 80 × 80 × 9 Semelle 300 × 9 </p>	8570	4 ^{ks} , 24
4	— 58, 00	Même section que N° 1 avec addition d'une semelle 300 × 8	10970	5, 28
8	— 65, 25	Même section que N° 4	10970	5, 95
6	36, 25	Même section que N° 1	8570	4, 24
10	58, 00	Même section que N° 4	10970	5, 28
2	51, 26	Même section que N° 1	8570	5, 97

Numéros des barres	Efforts maxima	Composition des barres	Section en m. m. c.	Coefficient de travail maximum
5	30 ^r , 75	 2 Cornières 70 × 70 × 10 Semelle 300 × 9	5 300	5 ^{kg} , 89
9	10, 25	 2 Cornières 70 × 70 × 8	2 112	4, 85
3	— 36, 25	 4 Cornières 90 × 90 × 10	6 800	5, 34
7	— 21, 75	 4 Cornières 70 × 70 × 8	4 224	5, 16
11	— 14, 50	Même section que N° 7	4 224	3, 43

Numéro des barres	Efforts		Sections	Longueurs	$\Delta L = \frac{FL}{E\Omega}$ $E = 16 \times 10^9$	
	Côté surechargé	Côté non surechargé			Côté surechargé	Côté non surechargé
1	— 17 ^t ,50	— 7 ^t ,50	8570mm	5 ^m ,00	0mm,64	0,28
4	— 25,00	— 15,00	10970	"	0,61	0,43
8	— 22,50	— 22,50	10970	"	0,64	0,64
6	17,50	7,50	8570	5,00	0,64	0,28
10	25,00	15,00	10970	"	0,71	0,43
2	24,75	10,60	8570	7,07	1,28	0,55
5	10,60	10,60	5300	"	0,89	0,89
9	— 3,54	10,60	2112	"	0,74	2,21
3	— 17,50	— 7,50	6800	5,00	0,81	0,35
7	— 7,50	— 7,50	4224	"	0,56	0,56
11	— 5,00	"	4224	"	0,37	0,37

serait donc celle dont le point B devra redescendre pour se trouver sur son appui, qu'il ne peut avoir quitté. Portons cette hauteur en BB_1 (*fig.* 47) et joignons AB. Par chaque nœud traçons une verticale, $I I_1$ par exemple, et prenons $I_1 I_2$ égale à la hauteur verticale entre A' et I' . La différence $I I_2$ sera l'abaissement réel du point I, ou sa flèche. Sur la même verticale, prenons $I_2 K_2$ égal à la hauteur verticale de K' au-dessus de A' : la différence IK_2 sera la flèche du point K. Les déformations ayant été tracées à une échelle double de leur grandeur vraie, on n'aura qu'à diviser par 2 les longueurs obtenues $I I_2$, IK_2 pour avoir les flèches réelles de ces points.

18. Ferme de marquise. Poutre en treillis soutenue par un tirant incliné (pl. XVI). — La ferme, que représente la *fig.* 53, a 10 mètres de saillie sur son point d'appui A. Elle porte des pannes de 6 mètres de longueur, espacées de 2 mètres. Le poids de l'ossature avec la toiture est de 125 kilogrammes par mètre carré. La charge en chaque nœud courant sera donc $125 \times 6 \times 2 = 1\,500$ kilogrammes. A chaque extrémité B, L, la charge ne sera que de 750 kilogrammes.

En raison de la symétrie, la résultante de

Números des barres	Efforts	Composition des barres	Section en mmq.	Longueurs L	$E\omega$ 10^6 $E=20 \times 10^9$	FL $E\omega \cdot 10^3$
1	— 6 900	2 Corn. 60 × 60 × 8	1 792	2 ^m ,00	35,84	— 0,386
2	— 10 850	"	"	"	"	— 0,605
3	— 12 000	"	"	"	"	— 0,558
4	— 10 200	"	"	"	"	— 0,570
5	— 5 470	"	"	"	"	— 0,305
6	— 5 400	2 Corn. 60 × 60 × 6	1 368	2 ^m ,00	27,36	— 0,395
7	1 500	"	"	"	"	0,110
8	5 470	"	"	"	"	0,400
9	6 520	"	"	"	"	0,477
10	4 720	"	"	"	"	0,345
11	7 330	2 Corn. 60 × 60 × 6	1 368	2 ^m ,10	27,36	0,560

Numéros des barres	Efforts	Composition des barres	Section en mmq.	Longueurs L	$\frac{E\omega}{10^9}$ $E=20 \times 10^9$	$\frac{Fl.}{E\omega} \cdot 10^3$
12	4 200	2 Corn. 50 × 50 × 5	950	"	19,00	0,464
13	1 990	1 Plat 50 × 6	300	"	6,00	0,380
14	—	2 Corn. 50 × 50 × 5	950	"	19,00	— 0,211
15	—	"	"	"	"	— 0,547
16	—	2 Corn. 40 × 40 × 4	608	0m,90	12,16	— 0,303
17	—	"	"	"	"	— 0,266
18	—	"	"	"	"	— 0,156
19	—	"	"	"	"	— 0,040
20	960	"	"	"	"	0,071
21	2 490	"	"	"	"	0,184
22	5 900	Rond. d = 45mm.	1 590	10m,85	31,80	2,012

toutes les charges passera par le milieu de la longueur BL : ce sera un poids total égal à

$$1\,500 \times 5 = 7\,500^{\text{kg}}.$$

Joignons le point de rencontre de cette verticale N au point A, puis dessinons (*fig. 52*) le polygone des 6 forces agissant sur la ferme. Des parallèles à AN et à MN nous donnent aussitôt la tension de ML en 22. Le tracé de Cremona fait, en partant, soit de A', soit de M', est dès lors facile et donnera les efforts dans toutes les barres.

Il est intéressant de faire le tracé des déformations de cette forme, les articulations A et M étant considérées comme fixes. A cet effet, nous déterminons d'abord les sections à donner à toutes les barres, puis nous calculons pour chacune la valeur $\frac{FL}{E\Omega}$. Le tableau des p. 86 et 87 résume ces valeurs dans la disposition la plus commode.

Les ΔL étant ainsi calculés, nous traçons (*fig. 51*) les déformations de la ferme proprement dite, en supposant que la barre AC conserve sa direction. Procédant de point en point, nous trouvons que le déplacement du point L sera A'L'.

Mais ce même point L, considéré comme appartenant à la barre ML, serait, par l'allongement de

celle-ci, venu en L_0 , et, par suite de la rotation autour de M , aurait décrit un arc représenté par une perpendiculaire à $A'L_0$. Le même point, appartenant à AL , aurait décrit un arc représenté par une perpendiculaire à AL et partant de L' . Les deux mouvements combinés le conduisent à L'' , et son déplacement réel sera $A'L''$.

Portons donc à partir de A' la longueur $A'L_1$ parallèle, égale, mais de direction opposée à $L'L''$. Nous retrouverons en L_1L' le déplacement $A'L''$. Sur la droite $A'L_1$, homologue de AL , nous pourrons dessiner une figure semblable à celle de la ferme, dont nous avons expliqué la fonction au § 60. Tous ses sommets donneront, avec les homologues du tracé des déformations, les déplacements réels des nœuds de la ferme. Tels seront K_1K' , J_1J' , I_1I' , etc.

19. Arc à trois rotules, avec surcharge d'un train (pl. XVII). — L'arc représenté *fig. 54* a 30 mètres d'ouverture. Il sert au passage d'une voie ferrée et se compose de deux arcs portant chacun un des rails. Sa charge permanente se compose de :

Fers	1 500 ^{kg}	par mètre courant.
Rails et traverses . . .	100 ^{kg}	//
Platelage en tôle ondulée	100 ^{kg}	//
Ballast	800 ^{kg}	//
Total	2 500 ^{kg}	//

Soit, par poutre, 1 250 kilogrammes, et par nœud $1^{\text{T}},25 \times 3^{\text{m}},75 = 4^{\text{T}},70$.

La majeure partie des poids, de beaucoup, se trouvant à la partie supérieure, nous supposons que tous sont concentrés aux nœuds du haut.

La surcharge d'épreuve est la locomotive type du règlement français du 29 août 1891 (*fig.* 62). La travée est trop courte pour que les wagons d'un train soient à considérer, deux machines ayant déjà ensemble une longueur supérieure à 30 mètres.

La *fig.* 54 *a* donne le polygone des réactions (vol. I, § 49) correspondant aux poids de 1 tonne placés en chaque nœud, savoir \mathcal{R}_E , \mathcal{R}_G , \mathcal{R}_I et \mathcal{R}_B . La *fig.* 55 est le tracé des efforts résultant de chacune de ces réactions supposées égales à l'unité, dans les différentes barres de l'arc. On remarquera que, pour \mathcal{R}_B , ce tracé a été étendu à toutes les barres des deux moitiés de l'arc. Les réactions \mathcal{R}_E , \mathcal{R}_G et \mathcal{R}_I ne servent que pour autant qu'on n'a pas besoin de faire intervenir les poids qui les produisent, et s'arrêtent conséquemment aux nœuds F, H et K.

(On pourrait, au lieu de faire \mathcal{R}_E , etc., égales à 1, leur donner tout de suite les valeurs de \mathcal{R} que produit l'unité appliquée aux nœuds E, G, I. Il

est préférable de suivre pour tous les points la même méthode qui donne l'épure la plus simple et qui permet d'ailleurs de trouver les efforts pour $P = 1$, en effectuant les produits $\alpha\beta$.

Sur la *fig. 54*, nous mesurons les valeurs de \mathcal{R} (en A) et de \mathcal{R}' (en C) que nous résumons dans le tableau suivant :

Numéros des charges	Valeurs de \mathcal{R} (coefficient α)	Valeurs de \mathcal{R}' (coefficient α')
E	0,930	0,339
G	0,980	0,678
I	1,130	1,016
B	1,355	1,355
I'	1,016	1,130
G'	0,678	0,980
E'	0,339	0,930

La *fig. 55* nous permet de réunir en tableau les coefficients de \mathcal{R} relatifs à toutes les barres du système (voir p. 92).

Nous allons donner comme exemple le calcul des efforts maxima dans une barre de chaque sorte.

Maxima dans la membrure inférieure 8.
— Le centre des moments pour le calcul de cette barre étant E, nous joignons AE et nous trou-

Désignation	Numéros des barres	Coefficients β pour $\mathcal{R} = 1$				Numéros des barres	Réaction $\mathcal{R}_B = 1$
		Charge en E	Charge en G	Charge en I	Charge en B		
S	2	— 0,586	— 0,235	0,070	0,285	2'	— 1,640
	6		— 1,285	— 0,104	0,600	6'	— 1,600
	10			— 0,994	0,705	10'	— 1,106
	14				0,740	14'	— 1,167
I	4	— 0,425	— 0,808	— 1,047	— 1,165	4'	0,788
	8	0,275	— 0,451	— 1,004	— 1,346	8'	0,791
	12		0,456	— 0,754	— 1,582	12'	0,695
	15			0,161	— 1,640	15'	0,180
	3	0,900	0,362	— 0,108	— 0,442	3'	— 0,141
D	7		1,025	0,212	— 0,378	7'	— 0,055
	11			0,961	— 0,113	11'	— 0,536
	14				0,740	14'	— 1,167
	1	— 0,682	— 0,275	0,081	0,334	1'	0,031
V	5	— 1,059	— 0,568	— 0,118	0,211	5'	0,195
	9		— 0,883	— 0,357	0,040	9'	0,337
	13			— 0,570	— 0,224	13'	

vons I_8 comme point limite. Les charges s'étendant entre D' et I_8 donneront un maximum négatif (compression). Celles placées entre I_8 et D donneront le maximum positif (tension).

Il faut maintenant procéder par essais préliminaires en plaçant d'abord la tête du train sur le nœud G , le dernier compris dans la région I_8D' . Si cette position du train donnait une forte charge en G , le maximum serait certainement atteint, mais la distribution des roues de la première machine donne alors une charge bien plus importante en I , et, comme on le voit par le tableau de la page précédente, le coefficient β relatif à la charge en I est beaucoup plus grand que celui de G . on trouvera donc, par des essais successifs, que le maximum réel sera atteint en plaçant la première roue en I . Voici comment il convient de procéder pour cela.

La *fig.* 58 représente les verticales des divers nœuds à leurs distances respectives. Nous figurons les charges du train (à la droite de la figure) avançant de D' jusqu'en I et, à l'aide du polygone des forces (*fig.* 56), nous traçons des polygones funiculaires pour déterminer la répartition des charges en chacun des nœuds, chaque intervalle étant considéré comme une poutre séparée. Ces réactions sont résumées dans le tableau suivant, avec les valeurs de α et β correspondantes, ainsi

que les produits $\alpha\beta P$, dont la somme nous donne — 60^t,33.

Nœuds chargés	Charges P	α	β	$\alpha\beta P$
I	14 ^t ,56	1,130	— 1,004	— 16 ^t ,52
B	13, 44	1,355	— 1,346	— 24, 52
I'	5, 73	1,016	— 1,346	— 7, 84
G'	6, 27	0,678	— 1,346	— 5, 71
E'	12, 60	0,339	— 1,346	— 5, 74
Total.				— 60, 33

On sera sans doute surpris de trouver que la limite théorique étant en I₈, il ait fallu reculer la première roue jusqu'en I pour trouver un maximum. C'est un cas assez exceptionnel, dû à la répartition des charges. Mais il est bon de faire remarquer que, même en plaçant la tête du train en G, la différence n'eut pas été très grande. On trouve, en effet, pour ce cas, une valeur de 59^t,05, et en plaçant la deuxième roue en I, 60^t,12. La singularité du cas provient de la très grande différence qui existe entre les coefficients β , relatifs aux points G et I, jointe à la grande distance qui existe entre le premier groupe de roues (locomotives) avec celles moins chargées qui viennent à la suite (tender).

Pour obtenir le maximum positif sur 8, il faut surcharger la région DI_8 . On procédera comme ci-dessus, en plaçant d'abord la première roue en E. Dans ce cas, un essai montrera qu'il faut avancer la deuxième roue jusqu'en ce point pour obtenir la plus forte valeur.

Nœuds chargés	Charges P	α	β	$\alpha\beta P$
E	19 ^t ,04	0,930	0,275	4 ^t ,87
G	2, 24	0,980	— 0,451	— 0, 99
Total.				3, 88

Si la première roue s'était trouvée en E l'effort n'aurait été que de 3^t,72. On pourra se servir du même procédé que celui de la *fig.* 58, pour les cas suivants de surcharge. Mais on remarquera que les maxima procèdent toujours des cas où une roue se trouvera à l'aplomb d'un nœud, et les nœuds étant équidistants d'un bout à l'autre de l'arc, il suffira de faire le calcul exact des charges aux nœuds pour un très petit nombre de positions du train. Si la locomotive a quatre essieux, il conviendra de calculer ces charges pour les quatre positions du train qui placent successivement les quatre roues sur le nœud le plus voisin de la culée, E dans le cas actuel,

Désignation des nœuds	Première roue en E	Deuxième roue en E	Troisième roue en E	Quatrième roue en E	Observations
D	0	2,24	6,72	13,44	
E	14,56	4,76 } 14,28 }	7,28 } 11,76 }	14,56 } 0 }	
G	13,44	6,72 } 0,80 }	2,24 } 2,72 }	0 } 5,29 }	
I	5,73	5,20 } 2,80 }	3,28 } 4,72 }	6,71 } 0 }	
B	6,27	3,20 } 1,68(1) }	1,28 } 5,60 }	0 } 11,76 }	
I'	12,60	5,32 } 12,60 }	8,40 } 10,64 }	9,24 } 6,44 }	
G'	8,40 } 6,72 }	8,40 } 0,32 }	3,36 } 2,25 }	0,56 } 4,33 }	
E'	0,28 } 4,81 }	5,65 } 2,32 }	3,75 } 4,25 }	7,67 } 0 }	
D'	7,19	3,68	1,75	1,43	(1) La réaction 1,68 provient déjà de la deuxième locomotive dont la première roue se trouve dans le panneau B1'.

Les résultats de ce calcul sont donnés dans le tableau de la p. 96, qui est limité à la considération des charges données par les deux locomotives ; jamais la position du train n'est telle, pour le calcul des maxima, qu'on ait besoin de faire entrer, en ligne de compte, les wagons. Si l'ouverture du pont était plus grande, il faudrait naturellement pousser plus loin ces évaluations et considérer le train avec wagons.

Maxima dans la membrure supérieure 6. — Le centre des moments à considérer est le nœud H. Le point limite est S_6 . Pour avoir le maximum de tension, il faudra placer la deuxième roue en B (*fig. 59*). Le tableau de la page précédente donne les charges utilisées dans le tableau ci-dessous :

Nœuds chargés	Charge P	α	β	$\alpha\beta P$
I	2 ^t ,24	1,130	— 0,104	— 0 ^t ,26
B	19, 04	1,355	0,600	15, 48
I'	7, 52	1,016	0,600	4, 59
G'	8, 00	0,678	0,600	3, 25
E'	4, 88	0,339	0,600	0, 99
Total.				24 ^t ,05

La compression maxima sera obtenue en

plaçant en G la deuxième roue de la machine s'avancant de D vers S₆.

Nœuds chargés	Charge P	α	β	$\alpha\beta P$
I	2 ^t , 24	1,130	— 0,104	— 0 ^t , 26
G	19, 04	0,980	— 1,285	— 20, 24
E	7, 52	0,339	— 1,600	— 4, 08
Total.				— 24 ^t , 58

Maxima dans la diagonale 11. — L'application des règles développées au vol. I, § 49 indique, comme point limite des charges pour cette barre, D₁₁. Pour la tension maxima, il faudrait surcharger entre ce point et le nœud G, où aboutit la barre. Pour la compression, il faut surcharger entre l'extrémité D' et le point D₁₁. puis encore toute la région à gauche de la barre, jusqu'à l'extrémité D. Comme on ne peut pas placer sur le pont un nombre quelconque de roues, cette règle ne s'appliquera encore qu'approximativement, car nous supposerons qu'une machine est toujours suivie au moins de son tender. Encore faut-il examiner si elle doit être tournée la tête à droite ou à gauche. Il faut admettre par contre que deux machines peuvent accidentellement

aborder le pont par ses deux extrémités, et se trouver arrêtées à une petite distance l'une de l'autre, ce qui arrive fréquemment dans le voisinage d'une gare, par exemple.

Pour la tension, il faudra donc surcharger le plus possible les nœuds G, I, ce qui se fera en plaçant la locomotive là où les coefficients indiquent que l'effet est le plus grand, c'est-à-dire surtout près du point I (*fig. 60*). C'est en effet, la deuxième roue placée en I qui donnera le maximum, la tête étant tournée vers la gauche.

Voici quel est le résultat de deux essais de position à ce sujet :

Nœuds chargés	Charge P	α	β	$\alpha\beta P$
G	2 ^t ,24	0,678	— 0,526	— 0 ^t ,80
I	19, 04	1,130	0,961	20, 68
B	7, 52	1,355	— 0,113	— 1, 15
I'	8, 00	1,016	— 0,113	— 0, 92
G'	3, 20	0,678	— 0,113	— 0, 25
Total.				— 17 ^t ,56

Pour le maximum négatif, on trouvera qu'il faut placer une machine venant de la droite, avec sa première roue en B, l'autre venant de gauche

avec sa première roue en G (*fig. 60*). On aura alors le tableau suivant :

Machines	Nœuds chargés	Charge P	α	β	$\alpha\beta P$
Machines de gauche	E	13 ^t ,44	0,339	— 0,526	— 2 ^t ,41
	G	14,56	0,678	— 0,526	— 5,21
Machines de droite	I	0	1,130	0,961	0
	B	14,56	1,355	— 0,113	— 2,23
	I'	13,44	1,016	— 0,113	— 1,55
	G'	5,73	0,678	— 0,113	— 0,44
	E'	6,27	0,339	0,113	— 0,24
Total.					— 12 ^t ,08

Maxima dans la verticale 9. — Le point limite est ici encore D_{11} , comme pour la diagonale 11. Pour la compression maxima, il faut surcharger entre E et D_{11} , — en accumulant naturellement dans le voisinage de G le plus de charges possible — et pour la tension, surcharger de D en G, et de D_{11} en D'.

Pour la compression, la deuxième roue de la locomotive sera placée en G, le tender vers la droite.

Les charges aux nœuds se succéderont alors toujours dans l'ordre indiqué par le tableau p.96, mais en appliquant au nœud G ce qui, dans ce tableau, se rapporte au nœud E (3^e colonne).

On aura alors les résultats suivants :

Nœuds chargés	Charges P	α	β	$\alpha\beta P$
E	2 ^t ,24	0,339	0,195	0 ^t 1,5
G	19, 04	0,980	— 0,883	— 16, 47
I	7, 52	1,130	— 0,357	— 3, 03
B	8, 00	1,355	0,040	0, 43
I'	3, 20	1,016	0,040	0, 13
Total.				— 18 ^r ,79

Pour la tension, il faudra placer une machine arrivant de gauche avec sa première roue en E et une autre, arrivant de droite, avec sa première roue en B.

Nœuds chargés	Charges P	α	β	$\alpha\beta P$
E	14 ^t ,56	0,339	0,195	0 ^t ,96
B	14, 56	1,355	0,040	0, 79
I'	13, 44	1,016	0,040	0, 55
G'	5, 73	0,678	0,040	0, 16
E'	6, 27	0,339	0,040	0, 08
Total.				2 ^r ,54

Ces opérations peuvent sembler compliquées. On trouvera que non, quand on réfléchira qu'il s'agit de l'évaluation de maxima qui supposent

toujours l'examen d'autant d'hypothèses qu'il y a de pièces à examiner. On remarquera d'ailleurs que bien des simplifications se présenteront toutes seules. Ainsi, par exemple, on aura à employer constamment les mêmes produits $\alpha\beta$ dont on préparera le tableau. Nous n'avons pas fait ici ces simplifications, ayant pour but d'exposer plus complètement la méthode.

20. Déformations (pl. XVIII). — Pour appliquer la méthode des déformations expliquée au vol. I, § 55, nous choisissons un des cas de charge que nous prenons dissymétrique, tel qu'il se présentera le plus ordinairement. Ce sera celui où, un train avançant de la droite vers la gauche la machine de tête a sa première roue sur le nœud I, ce qui correspond à $\max. I_8$, de façon à se trouver placée à peu près au milieu du pont. Les charges ainsi produites aux nœuds ont été données plus haut.

La *fig. 63* représente l'arc avec ses charges, mais dessiné à 90° d'avec les tracés de déformations. Dans ces tracés, il est facile de remplacer les parallèles aux barres par des perpendiculaires, et réciproquement.

Nous ne répétons pas ici tous les calculs des efforts dans chaque barre, mais nous en résumons

Numéros des barres	L	Ω	$\frac{L}{E\Omega} 10^9$	Moitié de gauche		Moitié de droite	
				F	ΔL	F	ΔL
2	3m,75	7 462mm	25,2	101,46	0mm,26	11,56	0mm,04
6	"	"	"	17,87	0,45	5,66	0,14
10	"	"	"	6,58	0,17	7,42	0,19
4	4,70	11 078	21,2	-55,78	-1,17	-55,28	-1,17
8	4,15	"	18,7	-60,33	-1,13	-50,68	-0,93
12	3,87	"	17,4	-64,09	-1,12	-51,54	-0,89
15	3,76	"	17,0	-50,78	-0,86	-51,51	-0,87
3	5,75	5 436	52,9	-16,20	-0,85	-2,57	-0,13
7	4,52	"	41,5	-8,83	-0,36	-5,05	-0,21
11	4,03	4 864	41,5	12,13	0,51	-1,98	-0,08
14	3,94	9 024	21,9	6,85	0,15	7,71	0,17
1	7,20	5 630	63,9	12,24	0,78	-6,61	-0,42
5	4,34	5 436	39,9	4,93	0,20	-8,69	-0,34
9	2,52	"	23,2	-4,57	-0,11	-5,58	-0,13
13	1,52	"	14,0	-16,72	-0,23	-8,07	-0,11

les résultats, en donnant pour chaque barre l'effort la section, la longueur, et le produit $\Delta L = \frac{LF}{E\Omega}$, pour $E = 20 \times 10^9$.

Il convient de remarquer que l'on peut, au lieu de passer par la série de calculs que nous avons indiqués, faire pour le cas de charge considéré, un polygone des efforts. Il faut, pour cela, suivre d'abord la méthode du § 54 pour calculer la poussée, puis faire le tracé Cremona. C'est, en tous cas, une vérification fort utile de la méthode des réactions que nous avons employé pour la recherche des maxima.

Les valeurs de ΔL , ainsi calculées, ont été employées, à une échelle quintuple, à tracer le polygone des déformations (*fig.* 64 et 65). En partant des points A et C, considérés séparément comme fixes, avec l'invariabilité de direction des barres 4 et 4', on trouve les déplacements de tous les nœuds jusqu'en B. Les deux figures, qui pourraient être tracées toutes deux à partir d'un même point A, ont été ici séparées pour plus de clarté.

Le nœud B (*fig.* 63), considéré comme appartenant à la moitié de gauche, viendrait en B (*fig.* 64), — considéré comme faisant partie de la moitié de droite, il se trouverait en B' (*fig.* 65).

Reportons en B'' , dans la *fig.* 64, celui trouvé dans la deuxième figure. Les rotations autour de A et de B feraient rejoindre ces points en B'' , ce qui donne la valeur des rotations opérées complémentirement aux déformations. Les plaçant avant les déformations, nous trouverons les points B_1B_1' . Le tracé des figures homologues aux demi-arcs se fera ensuite sans difficulté, et l'on aura, en D_1D , E_1E , etc., F'_1F' , G'_1G' , etc., les chemins parcourus par les divers nœuds.

PLANCHES

Echelle des forces : 1 m.m. pour 2 millim. carrés

Echelle des longueurs : Demi-grandeur

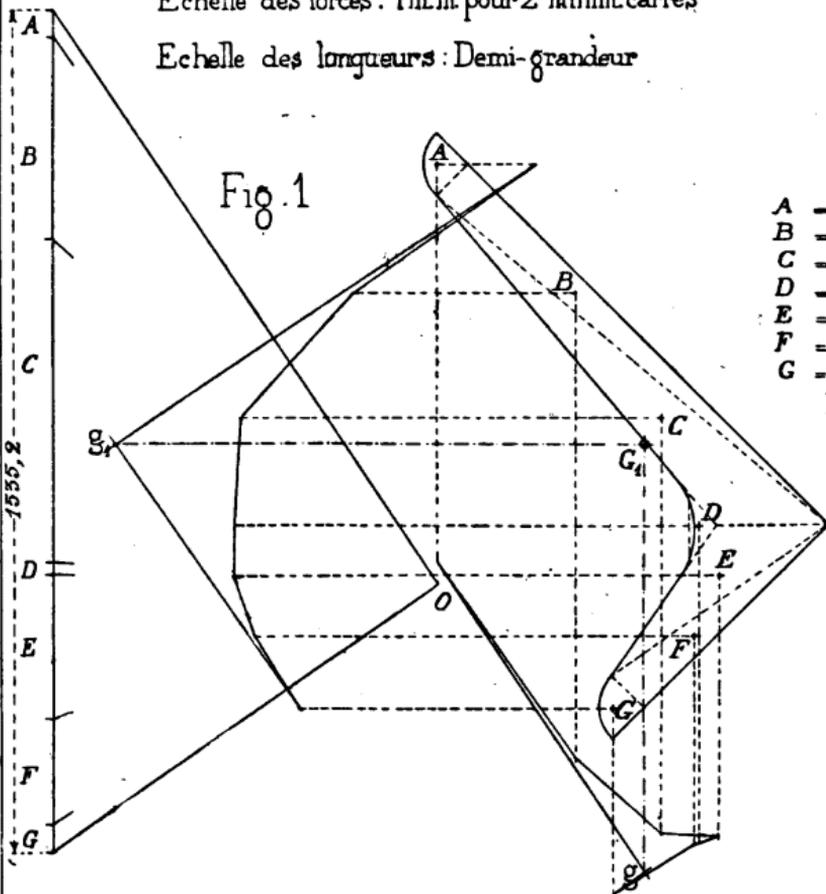
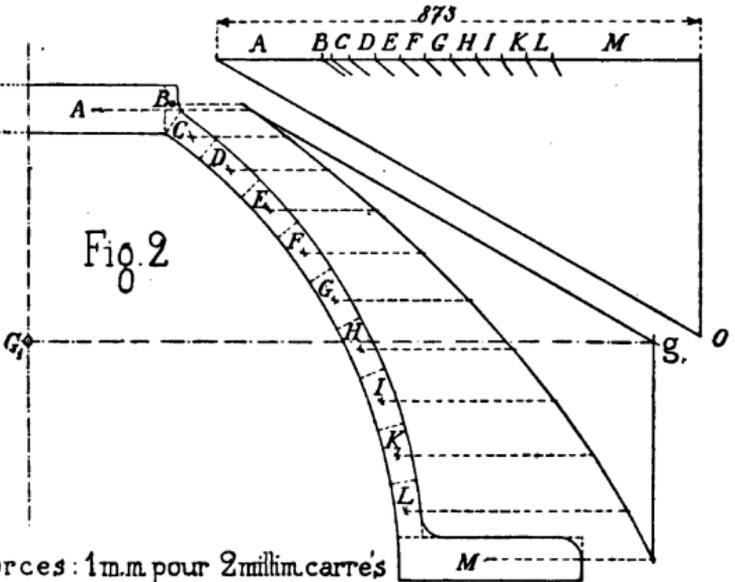


Fig. 1

A	=	50,2
B	=	368
C	=	588,8
D	=	22
E	=	264
F	=	192
G	=	60,2
		<hr/>
		1535,2

A	=	192
B	=	16
C	=	53
D..L	=	46
M	=	264

Fig. 2



Echelle des forces : 1 m.m. pour 2 millim. carrés

Echelle des longueurs : Demi grandeur

**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY**

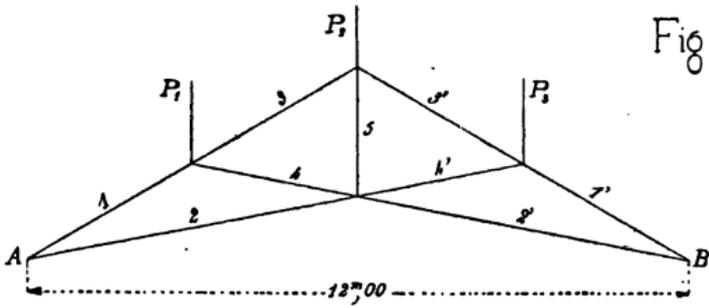


Fig 3

Echelles
 Longueurs $0^m,005$ p 1^m00
 Forces $0,01$ p 1000^K

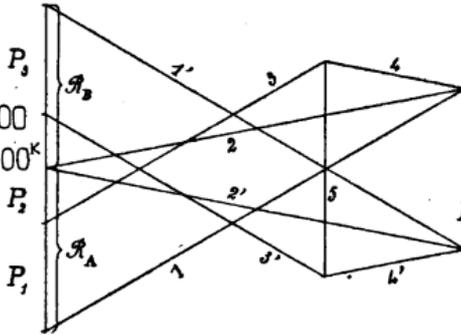


Fig 4

$P_1 - P_2 - P_2 - 1000^K$

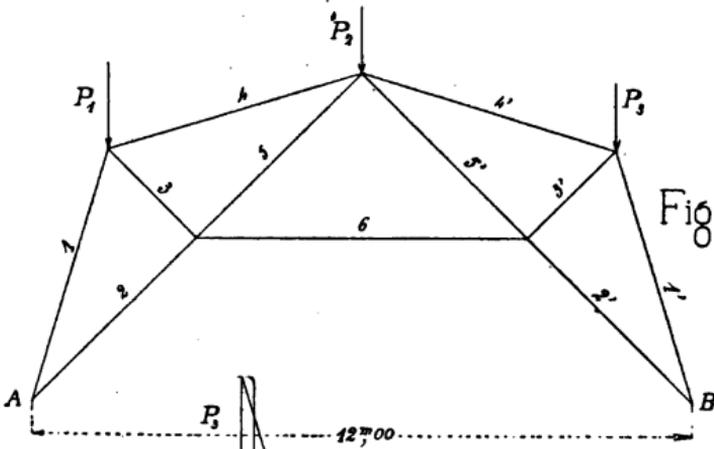


Fig 5

Echelles
 Longueurs $0^m,005$ p 1^m00
 Forces $0,01$ p 1500^K

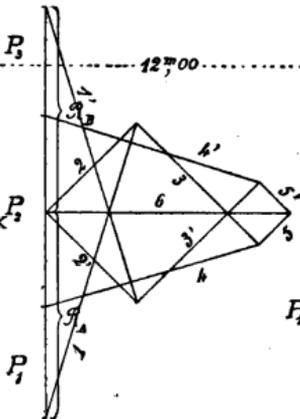


Fig 6

$P_1 - P_2 = 1500^K$

$P_2 = 2625^K$

**THE
JOHN CRERAR.
LIBRARY**

Ferme Polonceau à 1 contrefiche

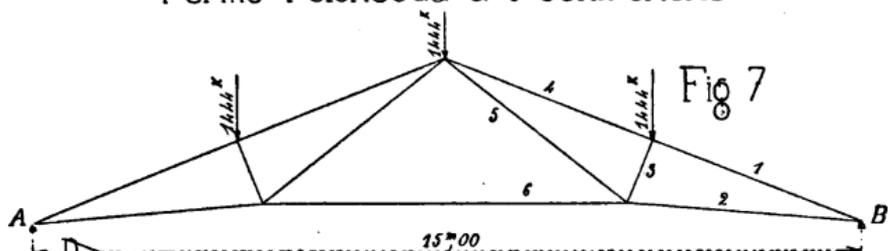


Fig 7

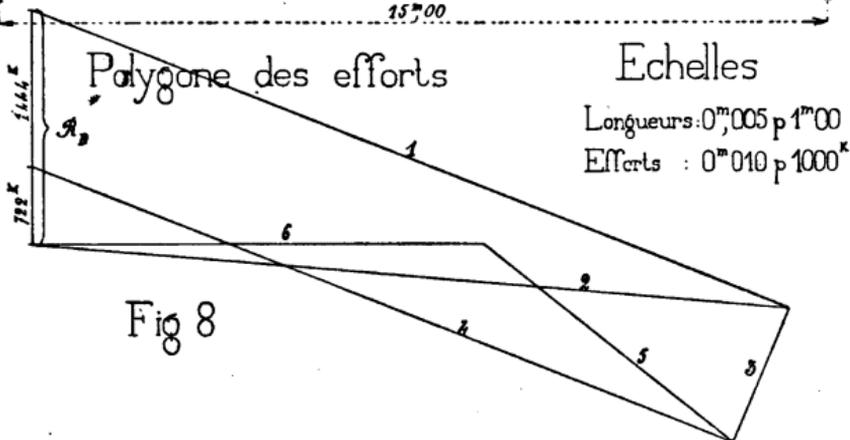
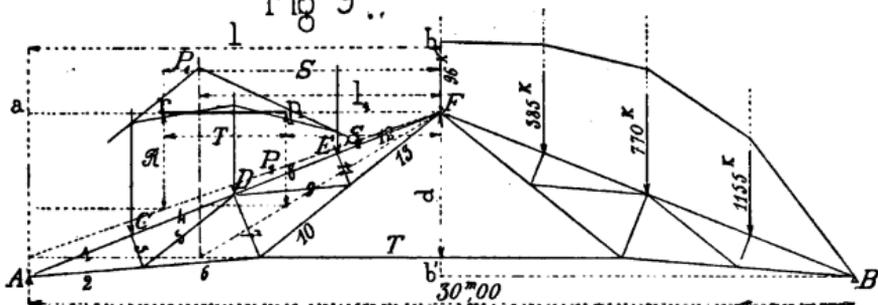


Fig 8

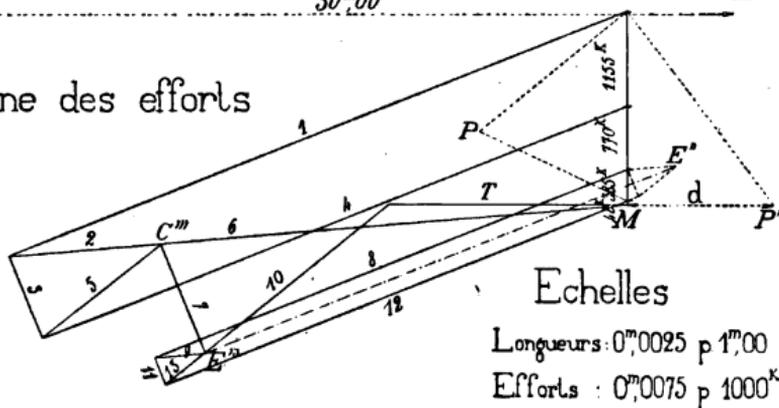
Ferme Polonceau à 3 contrefiches

Fig 9..



Polygone des efforts

Fig 10



Echelles

Longueurs: 0m,0025 p 1m00
Efforts : 0m,0075 p 1000K

**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.**

Ferme à console

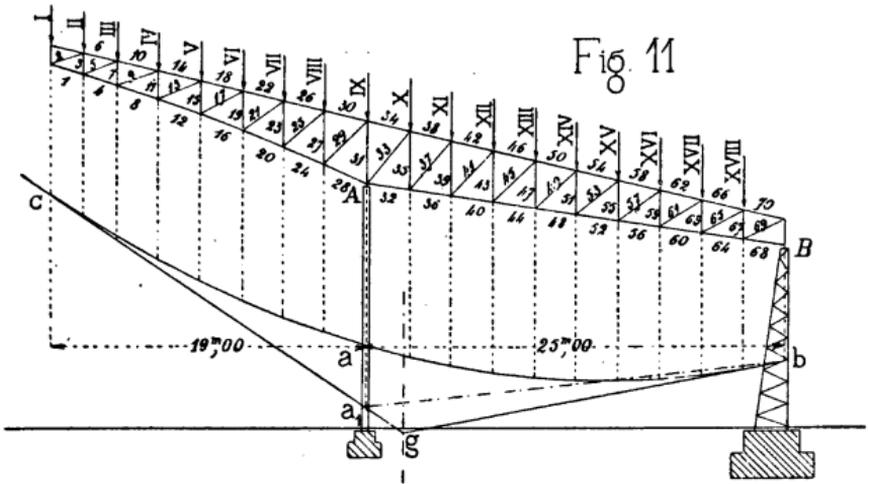
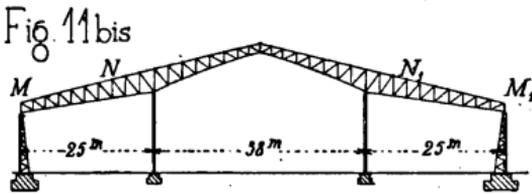


Fig. 11



Echelles

Longueurs : 0^m,0015 p 1^m,00
 Forces : 0^m,0005 p 1000^K

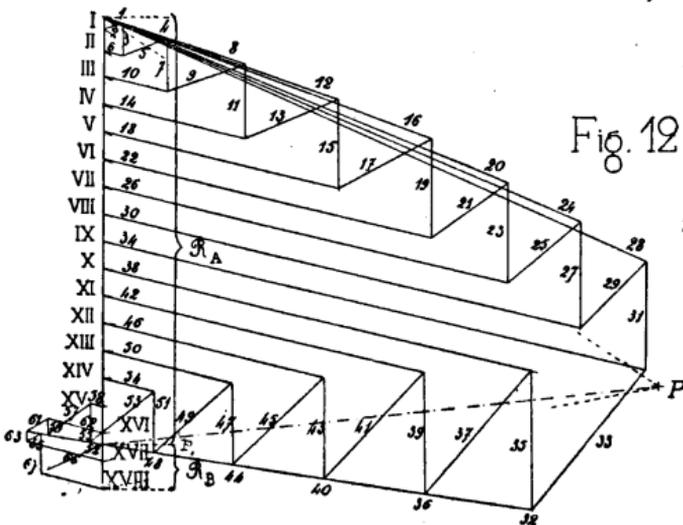


Fig. 12

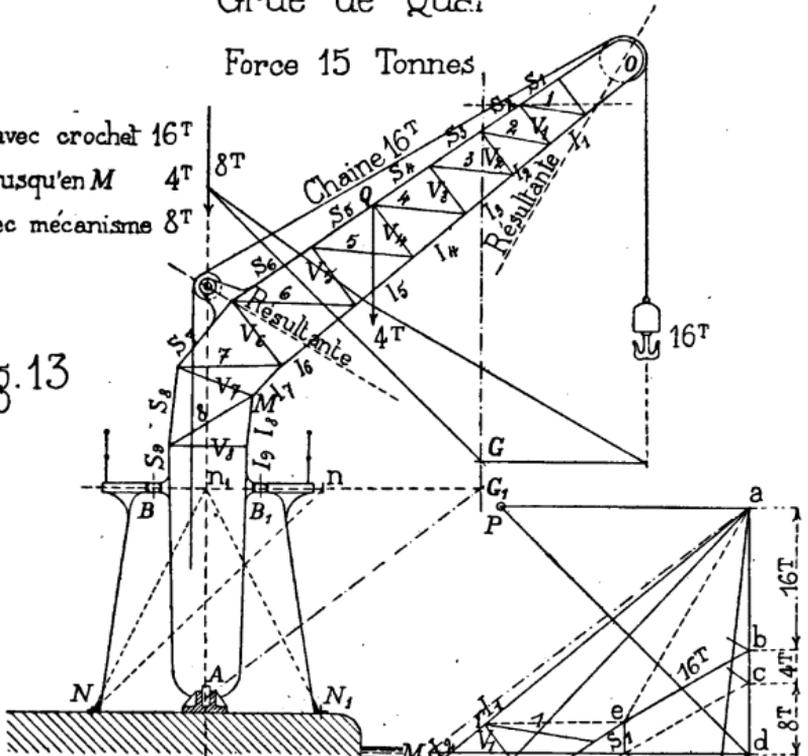
THE
JOHN CRERAR,
LIBRARY

Grue de Quai

Force 15 Tonnes

Charge avec crochet 16^T
 Flèche jusqu'en M 4^T
 Pivot avec mécanisme 8^T

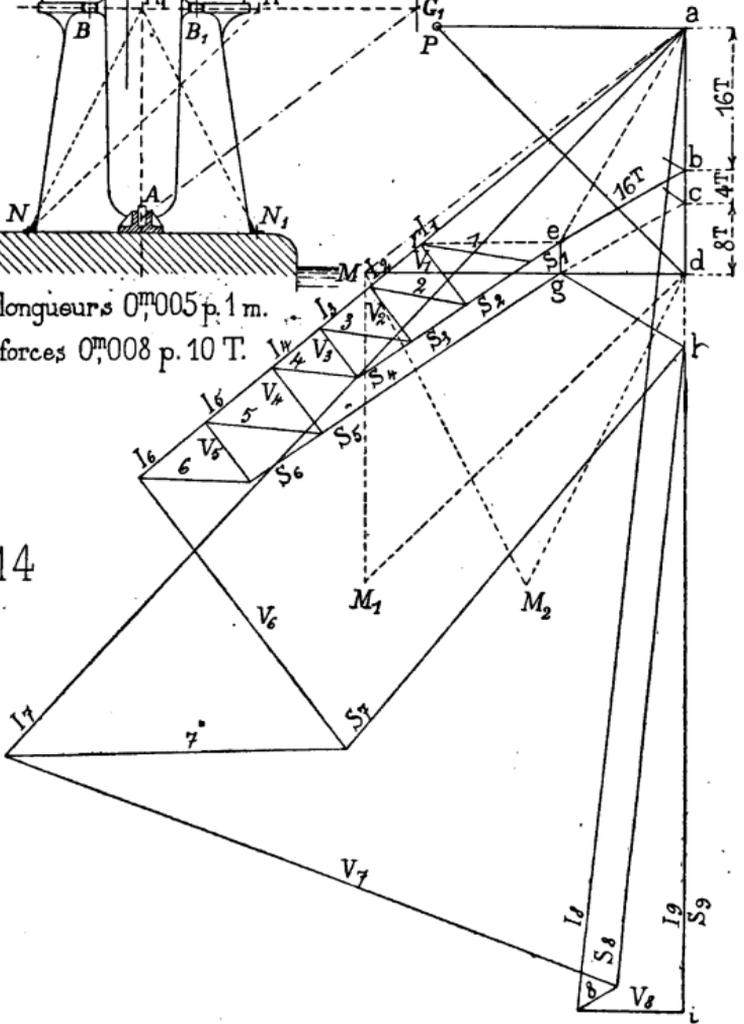
Fig. 13



Echelle des longueurs 0^m005 p. 1 m.

Echelle des forces 0^m008 p. 10 T.

Fig. 14



**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.**

Grue roulante

Fig. 15

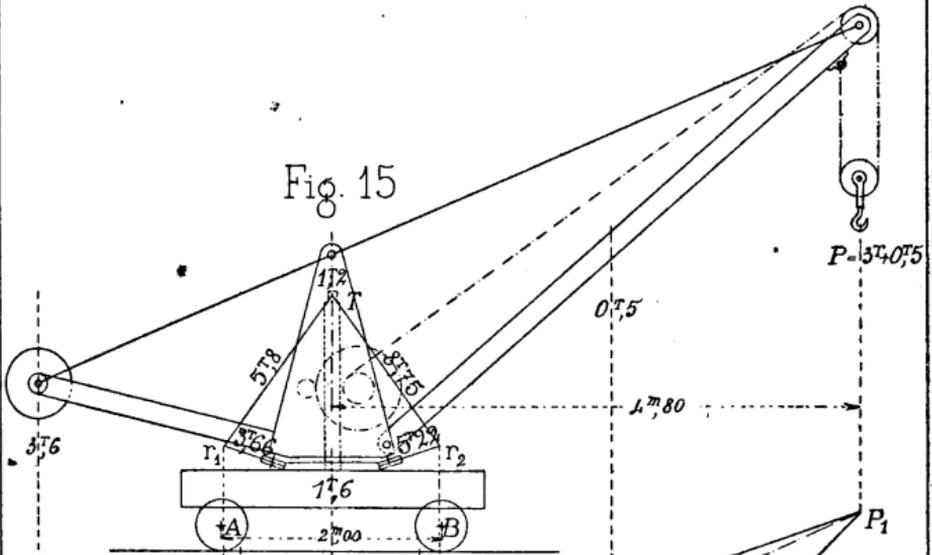


Fig. 16

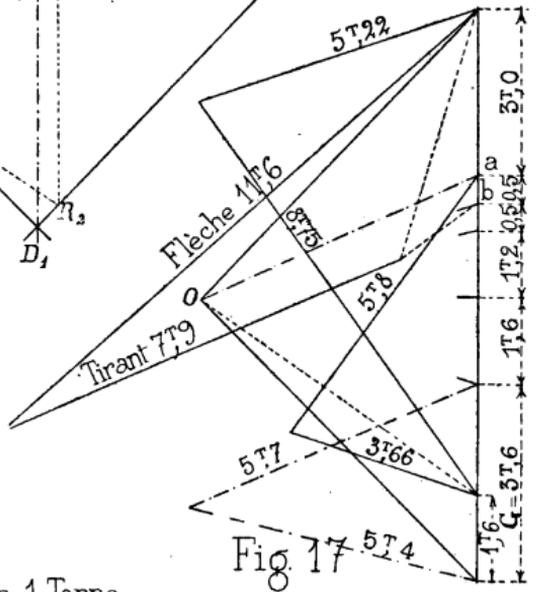
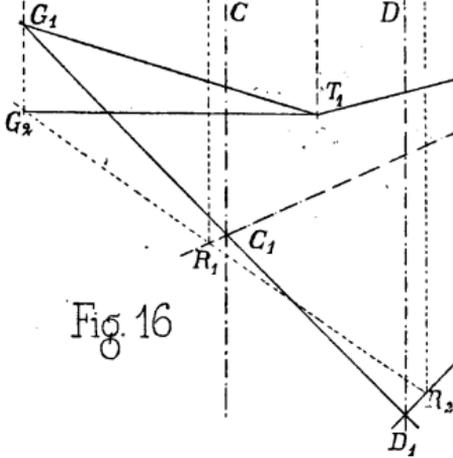


Fig. 17

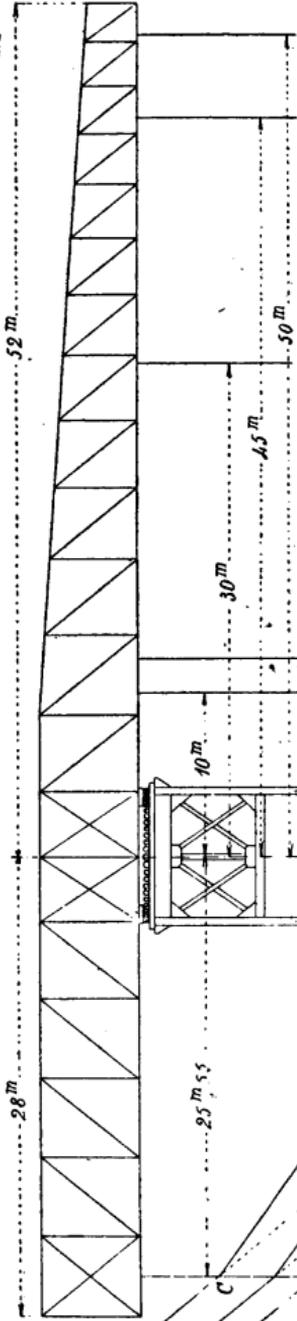
Echelle des forces 0,005 p. 1 Tonne

Echelle des longueurs 0,01 p. 1 mètre

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Grue Titan



Echelles

Longueurs : 0^m,0015 p.1^m
 Forces : 0^m,601 p.10^T

Fig 20

Fig 21

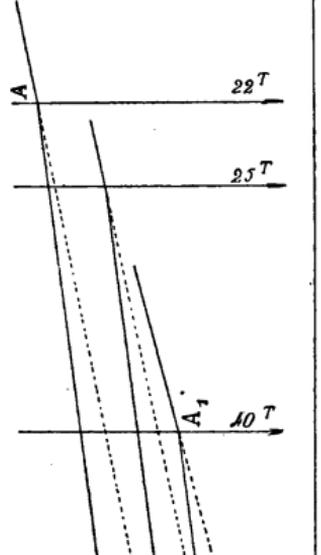
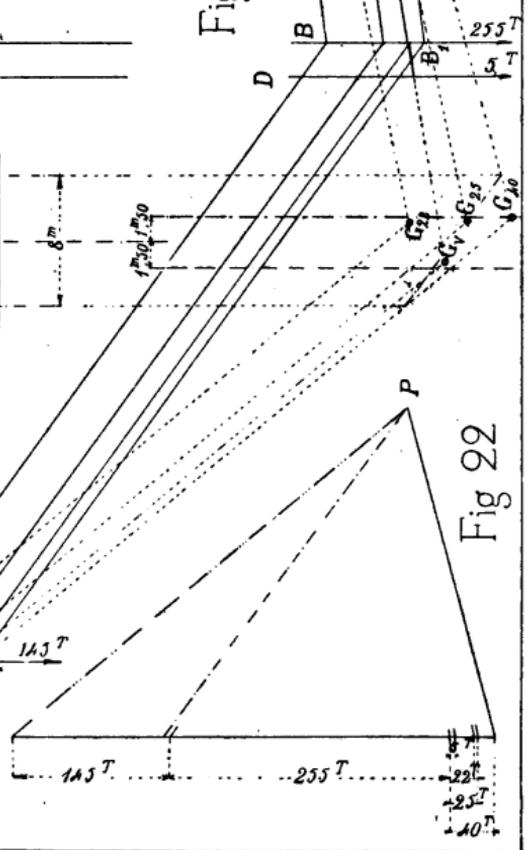


Fig 22



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

Pile métallique pour pont

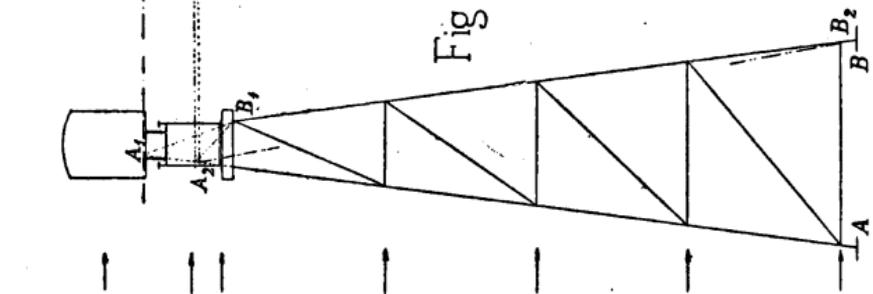


Fig 23

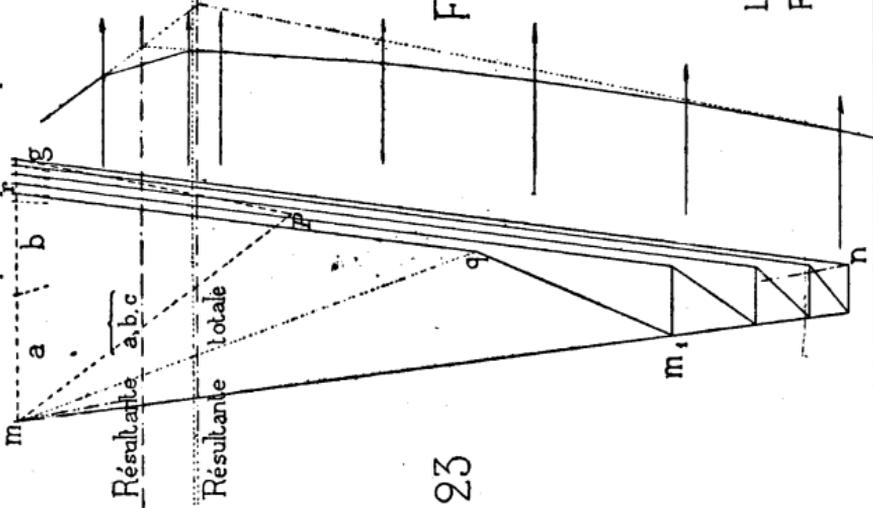


Fig 24

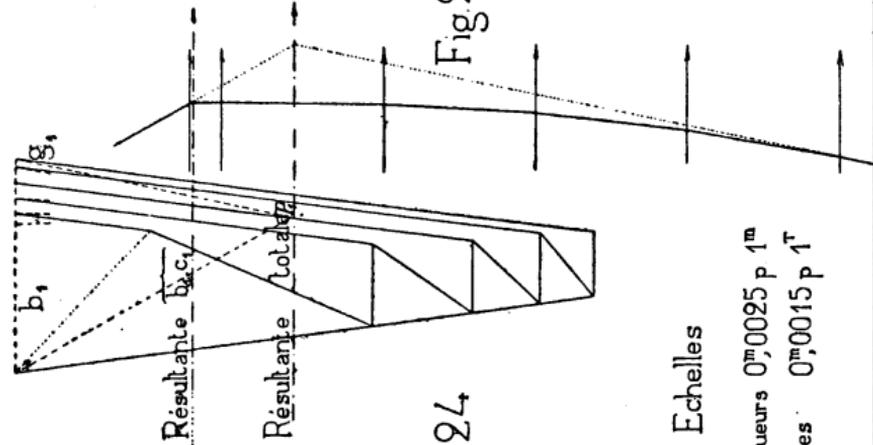


Fig 25

Efforts avec surcharge	Efforts sans surcharge
a = 7,65	
b = 5,75	b ₁ = 9,10
C = 0,44	C ₁ = 0,70
d = 0,60	d ₁ = 0,95
e = 0,60	e ₁ = 0,95
f = 0,60	f ₁ = 0,95
g = 0,30	g ₁ = 0,475

Echelles

Longueurs 0^m,0025 p 1^m

Forces 0^m,0015 p 1^T

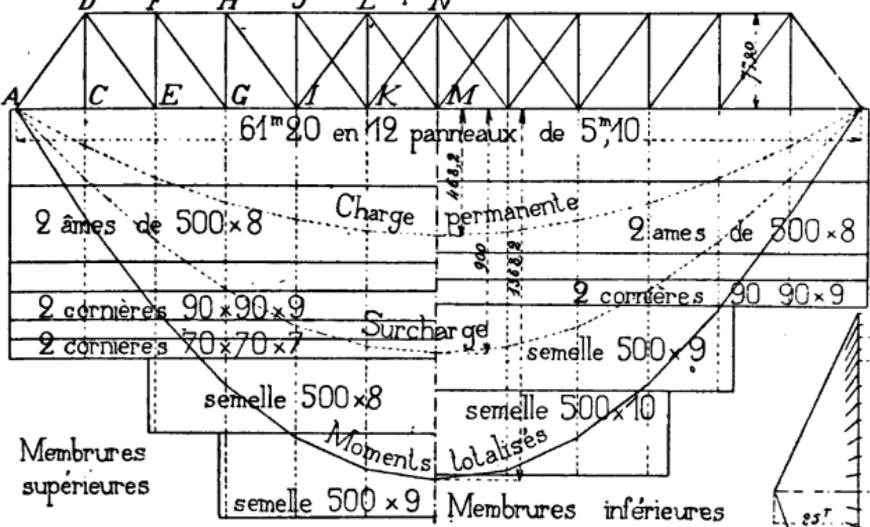
**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY**

THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

Pont pour Chemin de fer

Echelle des Longueurs $0^m,0125 p 10^m$
 Echelle des Moments $0^m,0025 p 100^m$

Fig 32



Moments fléchissants maxima

Echelles
 Long $0^m,0075 p 10^m$
 Mom $0^m,003 p 100^m$

Fig 33

Echelle $0^m,006 p 10^m$

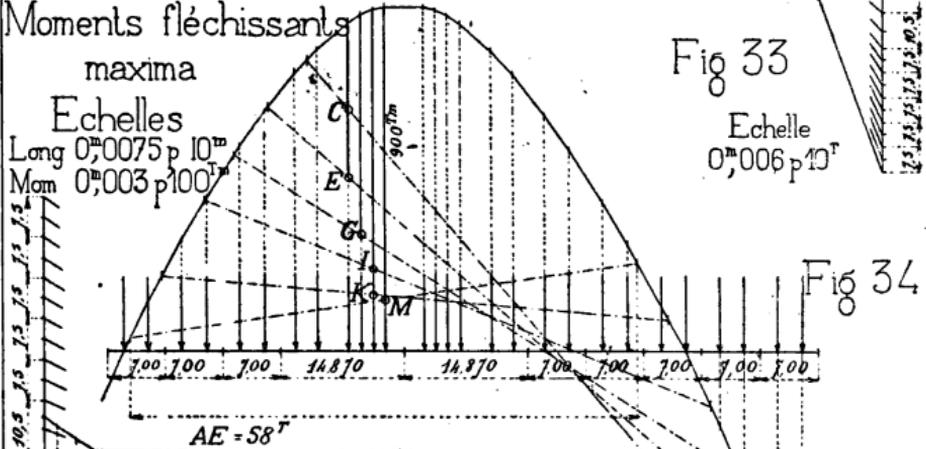


Fig 34

Efforts tranchants

Echelles
 Long $0^m,0125 p 10^m$
 Efforts $0^m,025 p 10^m$

Fig 35

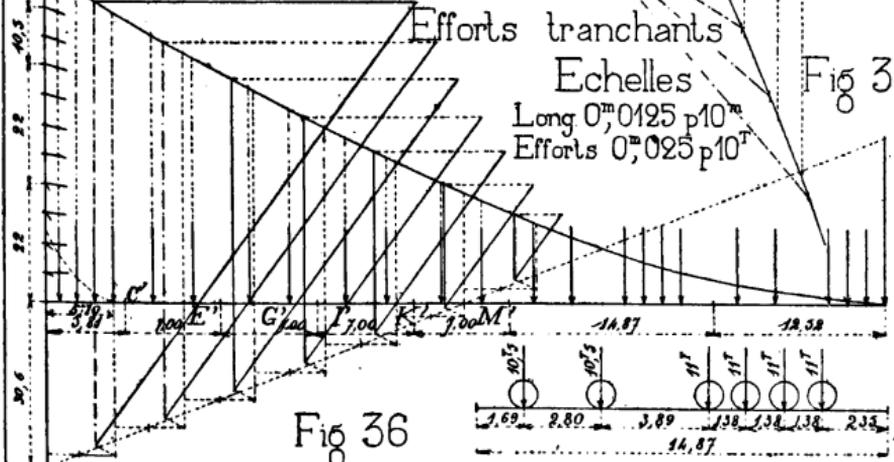
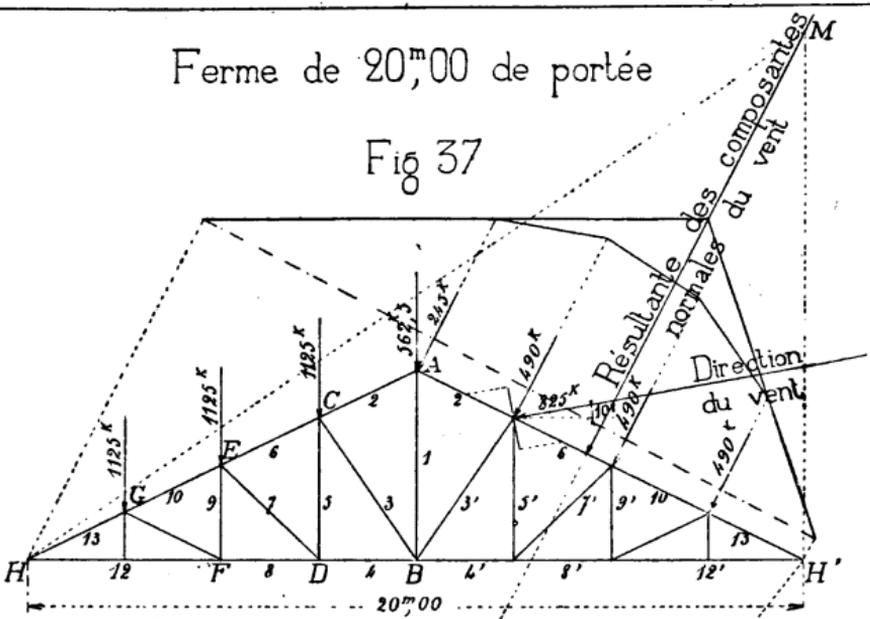


Fig 36

**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.**

Ferme de 20^m,00 de portée

Fig 37

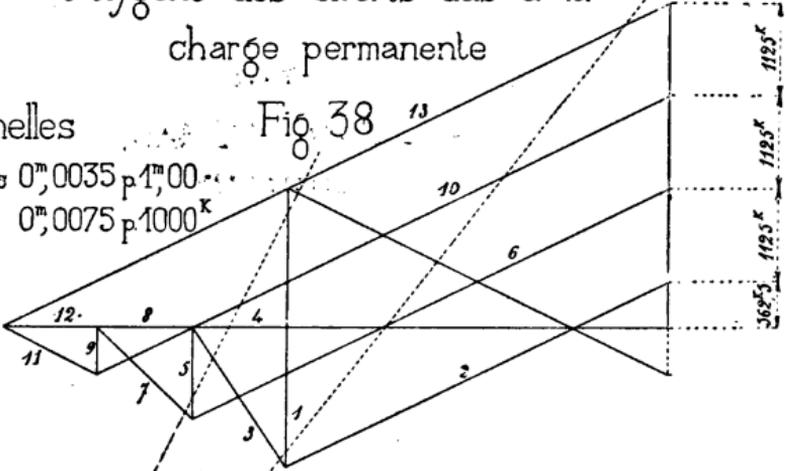


Polygone des efforts dus à la charge permanente

Echelles

Fig 38

Longueurs 0^m,0035 p 1^m,00
Efforts 0^m,0075 p 1000^K



Polygone des efforts dus au vent

Appui H mobile

Appui H' mobile

Appui H' fixe

Echelle 0^m,010 p 1000^K

Appui H fixe

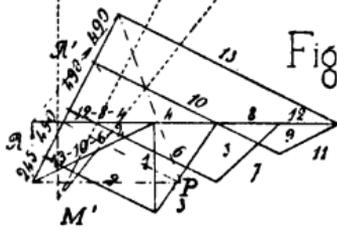


Fig 39

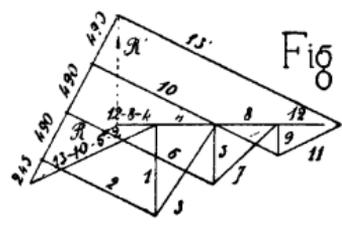


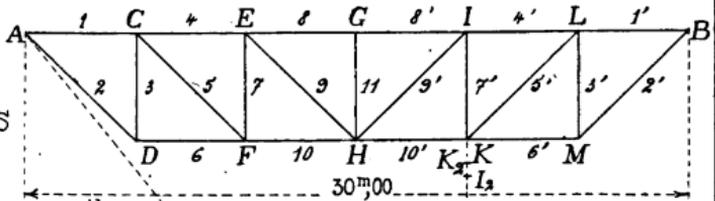
Fig 40

THE
JOHN CRERAR,
LIBRARY.

THE
JOHN CRERAR,
LIBRARY,

Déformation d'une poutre de pont pour Ch.ⁱⁿ de fer sous une surcharge dissymétrique

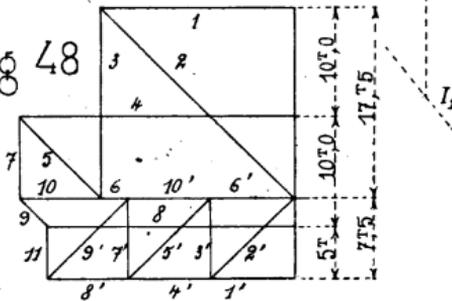
Déformations
sous une
charge dissymétrique



Polygone des Efforts
sous une surcharge
dissymétrique

Fig 47

Fig 48



Echelle des Efforts: 0,01 p. 1000K

Polygone des efforts dus à la charge B.
permanente et à la surcharge totale

Fig 49

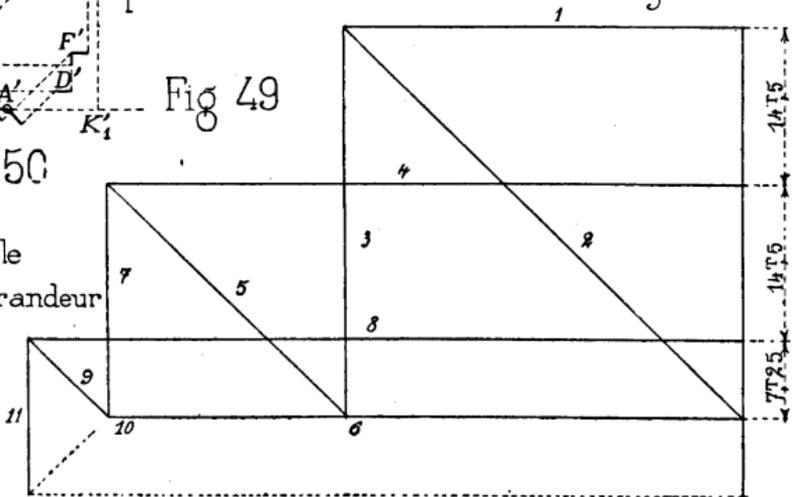
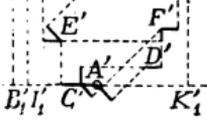


Fig 50

Echelle
Double grandeur



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY

Ferme de marquise

Echelle
5 fois
grandeur naturelle

Fig. 51

Fig. 52

Echelle: 0^m01 p. 3000^K

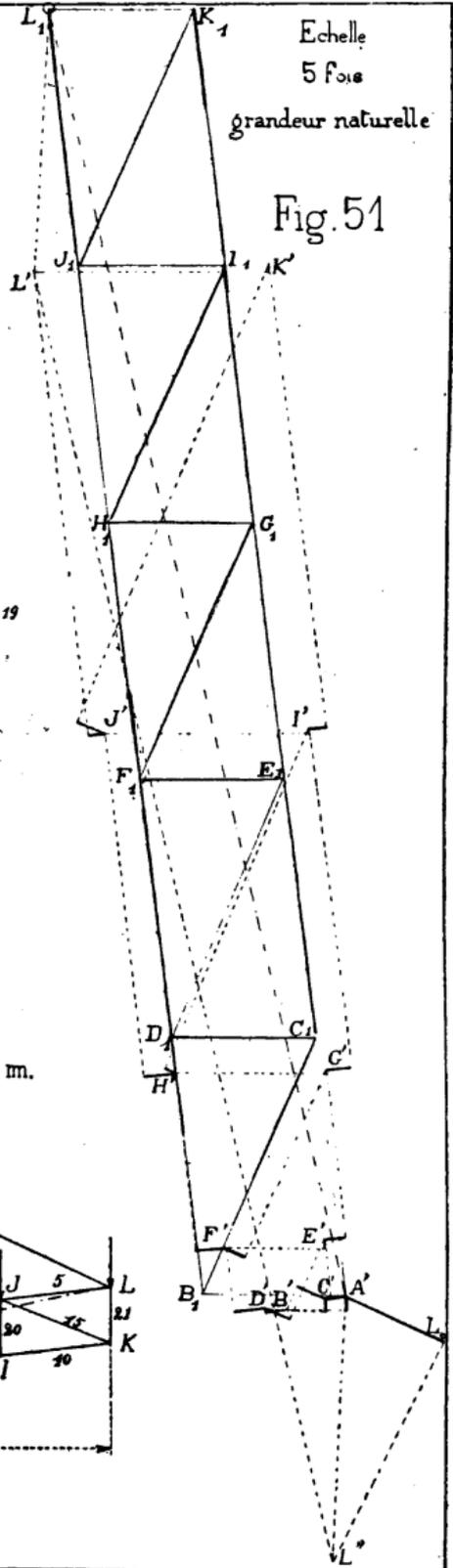
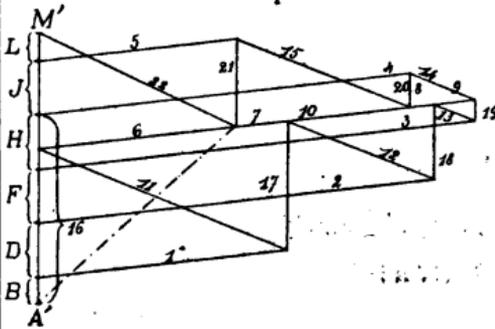
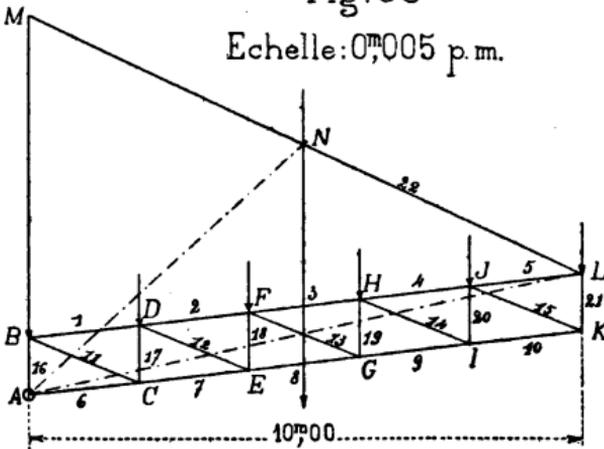
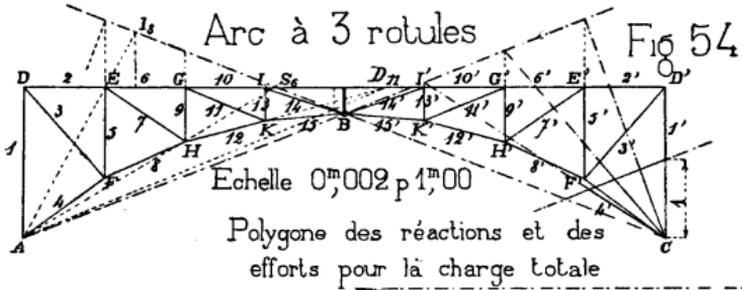


Fig. 53

Echelle: 0^m005 p. m.

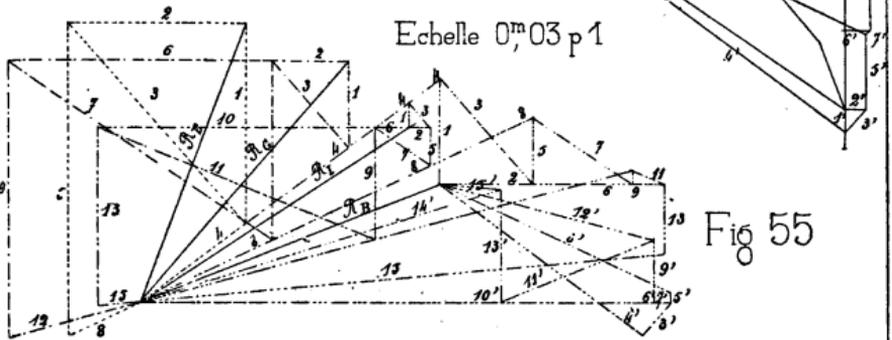


**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.**

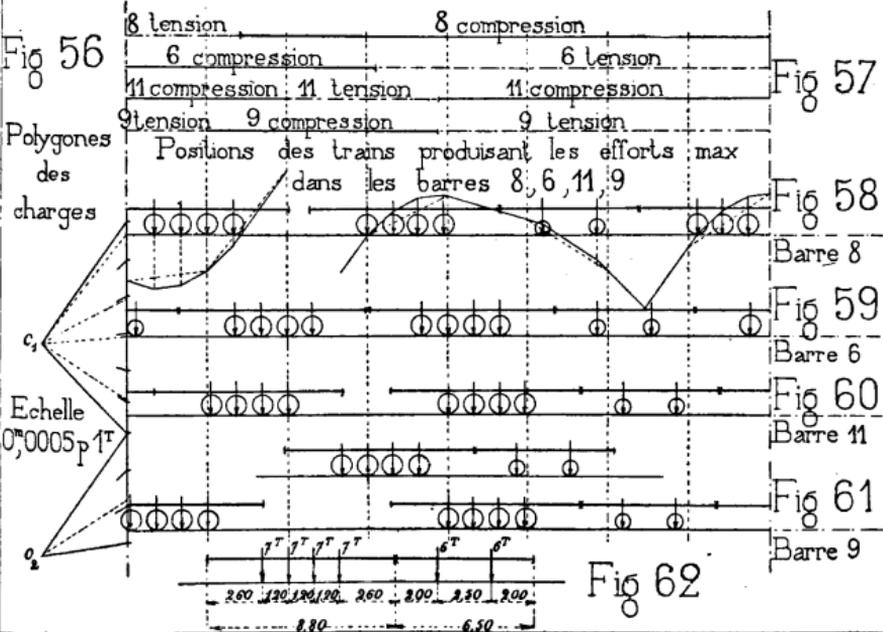


Efforts dus à des réactions en A égales à 1 pour des charges placées en E, G, I, B

Fig. 54 a



Diagrammes des limites des charges produisant les efforts max. dans les barres 8,6,11,9



THE
JOHN CRERAR
LIBRARY.

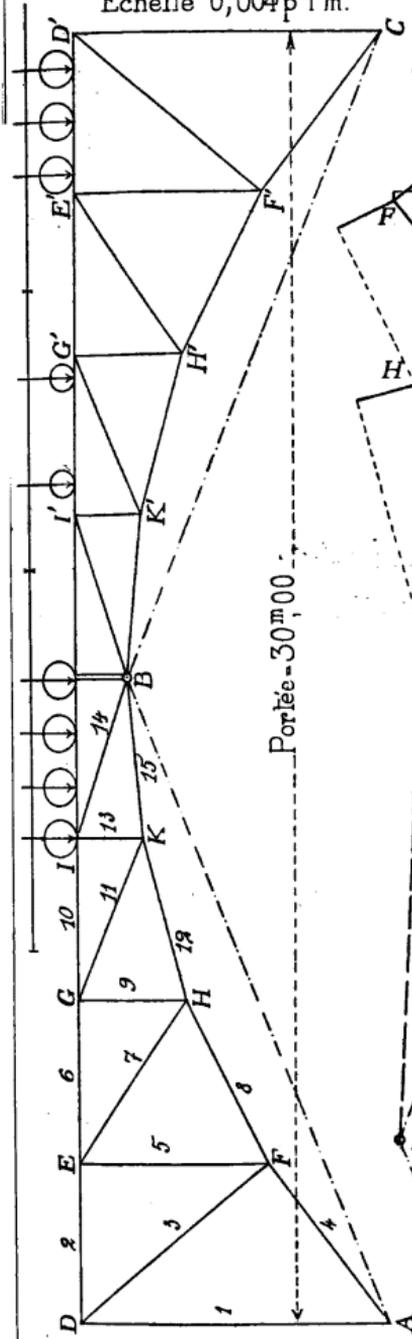
Déformation. d'un arc à trois rotules
sous la surcharge d'un train

Fig. 63

Fig. 64

Echelle 0,004 p 1 m.

Demi arc
de gauche



Portée = 30m00

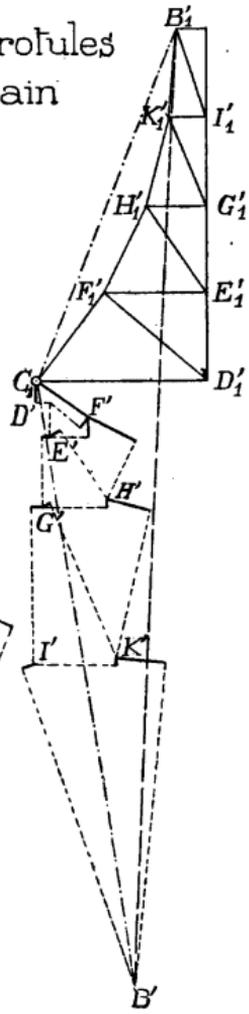
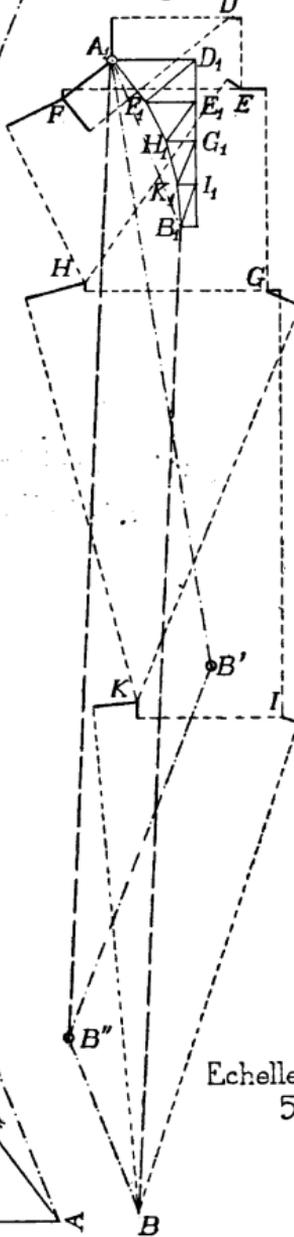


Fig. 65

Demi arc
de droite

Echelle des déformations
5 fois grandeur

**THE
JOHN CRERAR
LIBRARY**

BIBLIOGRAPHIE

Principaux ouvrages sur la Statique graphique

- C. CULMANN. — *Die Graphische Statik*. Zurich. Première édition, 1866. Deuxième édition, 1875. (La première moitié seulement a paru, voir W. Ritter). — *Traité de Statique Graphique*. Traduction faite par MM. Glasser, Jacquier et Valat, sur la deuxième édition allemande. Paris, 1880.
- L. CREMONA. — *Le figure reciproche nella Statica Grafica*. Milan, 1872.
- MAURICE LÉVY. — *La statique graphique et ses applications aux constructions*. 4 volumes. Paris, 1874-1888.
- A. J. DUBOIS. — *The New Method of Graphical Statics*. New-York, 1875.
- A. FAVARO. — *Lezioni di Statica Graphica*. Milan, 1877. — *Leçons de Statique Graphique*. Traduction très étendue par P. Terrier. Le premier volume seul a paru. Paris, 1879.
- E. WINKLER. — *Theorie der Brücken*. Vienne, 1873-1875.
- L. TETMAJER. — *Die aeussere und innere Kräfte an statisch bestimmten Brücken*. Zurich, 1875.
- SEYBIG. — *Statique graphique des systèmes triangulés*, II 10

- BÖHLK. — *Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Oeffnung*. Hanovre, 1877.
- H. F. EDDY. — *Researches in Graphical Statics*. New-York, 1878.
- J. B. CHALMERS. — *Graphical determination of forces in engineering structures*. London, 1881.
- J. BAUSCHINGER. — *Elemente der Graphischen Statik*. Munich, 1880.
- H. MULLER-BRESLAU. — *Elemente der Graphischen Statik der Bauconstructionen*. Berlin, 1881.
- *Éléments de Statique Graphique appliquée aux constructions*. Traduction par T. Seyrig. Paris, 1886.
- *Die Graphische Statik der Bauconstructionen*. 2 volumes, Leipzig, 1887 et 1892 (se continue).
- W. RITTER. — *Anwendungen der Graphischen Statik*. Zurich, 1888 et 1890 (cet ouvrage remplace la deuxième partie de la deuxième édition de Culmann : il fait emploi des documents préparés par ce dernier).
- D^r. W. WITTMANN. — *Statik der Hochbauconstructionen*. 2 volumes, Berlin, 1879, et Munich, 1884.
- M. KÄECHLIN. — *Applications de la Statique graphique*. Paris, 1889.
- HAUSSER et CUNQ. — *Statique graphique appliquée*, vol. I. Paris, 1886.
-

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE	5
Applications des méthodes graphiques	7
Centres de gravité	7
Cornière.	7
Fer Zorès.	10
Ferme de comble à deux versants symétriques	11
Ferme de comble à la Mansard.	13
Ferme Polonceau à une contrefiche	15
Ferme Polonceau à trois contrefiches, pour ro- tonde	16
Comble avec ferme-console	21
Grue de quai	27
Grue roulante.	32
Grue de montage pour bâtiments	37
Grue Titan.	40
Pile de viaduc.	43
Poutre de pont à triangles isocèles, pour route.	50
Surcharges	52
Membrures	52
Treillis	53
Poutre de pont pour chemin de fer. Surcharge d'un train	55
Membrures	57
Montants et diagonales.	60

148 STATIQUE GRAPHIQUE DES SYSTÈMES TRIANGULÉS

	Pages
Ferme de comble triangulée avec verticales . . .	64
Ferme de comble à trois rotules	70
Poutre de pont. Charge symétrique uniformé- ment répartie	73
Déformations	76
Poutre de pont. Charge uniformément répartie sur la moitié seulement de la portée. . . .	80
Ferme de marquise. Poutre en treillis soutenu par un tirant incliné.	85
Arc à trois rotules, pour chemin de fer . . .	89
Maxima dans la membrure inférieure 8 . . .	91
Maxima dans la membrure supérieure 6. . .	97
Maxima dans la diagonale II.	98
Maxima dans la verticale 9	100
Déformations	102
PLANCHES	107
BIBLIOGRAPHIE.	145

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

DIRIGÉE PAR M. LÉAUTÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

Collection de 250 volumes petit in-8 (30 à 40 volumes publiés par an)

CHAQUE VOLUME SE VEND SÉPARÉMENT : BROCHÉ, 2 FR. 50; CARTONNÉ, 3 FR.

Ouvrages parus

Section de l'Ingénieur

- PICOU. — Distribution de l'électricité. (2 vol.).
- A. GODILLY. — Air comprimé ou raréfié. — Géométrie descriptive (3 vol.).
- DWELSHAUVERS-DERY. — Machine à vapeur. — I. Etude expérimentale calorimétrique. — II. Etude expérimentale dynamique.
- A. MADAMET. — Tiroirs et distributeurs de vapeur. — Détente variable de la vapeur. — Épreuves de régulation.
- M. DE LA SOURCE. — Analyse des vins.
- ALHEILIG. — I. Travail des bois. — II. Corderie — III. Construction et résistance des machines à vapeur
- AIMÉ WITZ. — I. Thermodynamique. — II. Les moteurs thermiques.
- LINDET. — La bière.
- TH. SCHLESING fils. — Chimie agricole.
- SACVAGR. — Moteurs à vapeur.
- LE CHATELIER. — Le grisou.
- DUDEBOUT. — Appareils d'essai des moteurs à vapeur.
- CRONEAU. — I. Canon, torpilles et cuirasse. — II. Construction du navire.
- H. GAUTIER. — Essais d'or et d'argent.
- LECOMTE. — Les textiles végétaux.
- DE LAUNAY. — I. Les gites métallifères. — II. Production métallifère.
- BERTIN. — Etat de la marine de guerre.
- FERDINAND JEAN. — L'industrie des peaux et des cuirs.
- BERTHELOT. — Calorimétrie chimique.
- DE VIARIS. — L'art de chiffrer et déchiffrer les dépêches secrètes.
- GUILLAUME. — Unités et étalons.
- WIDMANN. — Principes de la machine à vapeur.
- MINEL (P.). — Électricité industrielle. (2 vol.). — Électricité appliquée à la marine. — Régularisation des moteurs des machines électriques.
- HÉBERT. — Boissons falsifiées.
- NAUDIN. — Fabrication des vernis.
- SINIGAGLIA. — Accidents de chaudières.
- GUENZ. — Décoration de la porcelaine au feu de moufle.
- VERMAND. — Moteurs à gaz et à pétrole.
- MEYER (Ernest). — L'utilité publique et la propriété privée.
- WALLON. — Objectifs photographiques.
- BLOCH. — Eau sous pression.

Section du Biologiste

- FAISANS. — Maladies des organes respiratoires.
- MAGNAN et SÉRIBUX. — I. Le délire chronique. — II. La paralysie générale.
- AUVARD. — I. Séméiologie génitale. — II. Menstruation et fécondation.
- G. WEISS. — Electro-physiologie.
- BAZY. — Maladies des voies urinaires. (2 vol.).
- TROUSSEAU. — Hygiène de l'œil.
- FERR. — Epilepsie.
- LAVERAN. — Paludisme.
- POLIN et LABIT. — Aliments suspects.
- BERGONTE. — Physique du physiologiste et de l'étudiant en médecine.
- MIGNIN. — I. Les acariens parasites. — II. La faune des cadavres.
- DEMELIN. — Anatomie obstétricale.
- CUENOT. — I. Les moyens de défense dans la série animale. — II. L'influence du milieu sur les animaux.
- A. OLIVIER. — L'accouchement normal.
- BERGÉ. — Guide de l'étudiant à l'hôpital.
- CHARRIN. — I. Les poisons de l'urine. — II. Poisons du tube digestif. — III. Poisons des tissus.
- ROGER. — Physiologie normale et pathologique du foie.
- BROcq et JACQUET. — Précis élémentaire de dermatologie (5 vol.).
- HANOT. — De l'endocardite aiguë.
- WEILL-MANTOU. — Guide du médecin d'assurances sur la vie.
- LANGLOIS. — Le lait.
- DE BRUN. — Maladies des pays chauds. (2 vol.).
- BROCA. — Tumeurs blanches des membres chez l'enfant.
- DE CAZAL et CATRIN. — Médecine légale militaire.
- LAPERSONNE (DR). — Maladies des paupières et des membranes externes de l'œil.
- KÖHLER. — Applications de la photographie aux Sciences naturelles.
- BRAUREGARD. — Le microscope.
- LESAGE. — Le choléra.
- LANNELONGUE. — La tuberculose chirurgicale.
- CORNEVIN. — Production du lait.
- J. CHATIN. — Anatomie comparée (4 v.).

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE

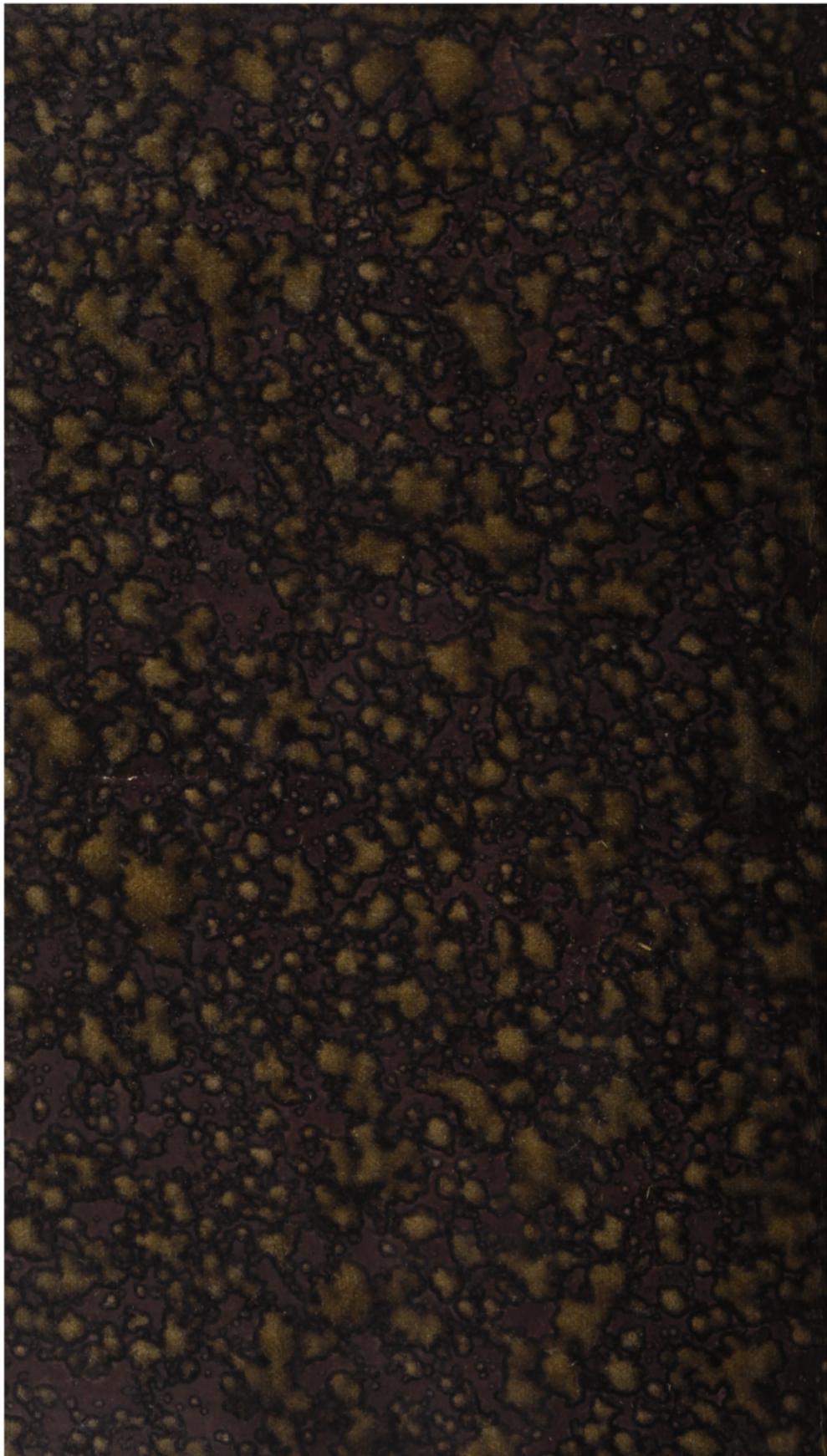
Ouvrages parus

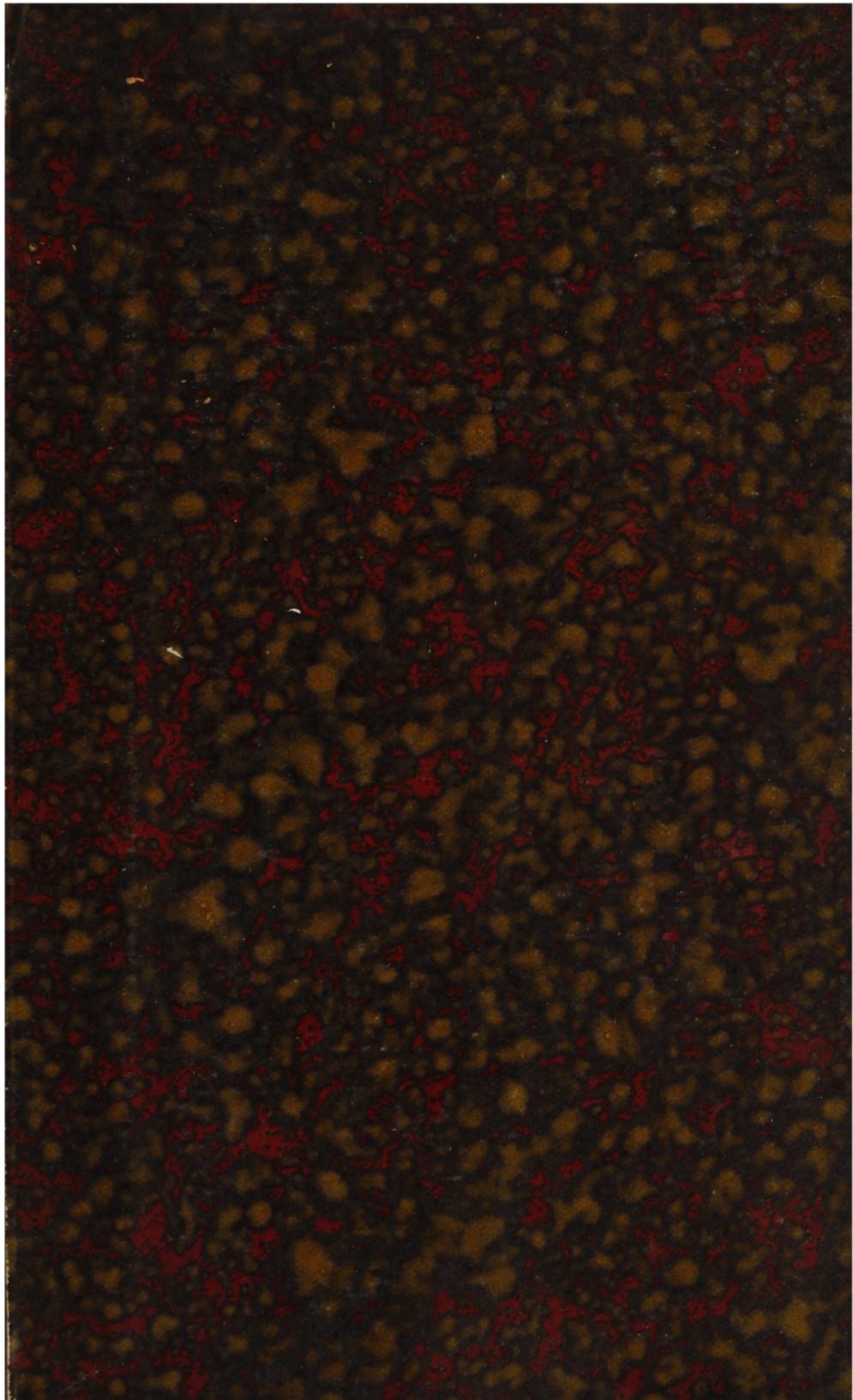
Section de l'Ingénieur

- DE MARCHENA. — Machines frigorifiques (2 vol.).
 PRUD'HOMME. — Teinture et impression.
 SOREL. — I. La rectification de l'alcool. — II. La distillation.
 DE BILLY. — Fabrication de la fonte.
 HENNEBERT (C^h). — I. La fortification. — II. Les torpilles sèches. — III. Bouches à feu. — IV. Attaque des places. — V. Travaux de campagne. — VI. Communications militaires.
 CASPARI. — Chronomètres de marine.
 LOUIS JACQUET. — La fabrication des eaux-de-vie.
 DUDEBOUT et CRONEAU. — Appareils accessoires des chaudières à vapeur.
 C. BOURLET. — Bicycles et bicyclettes.
 H. LÉAUTÉ et A. BERRARD. — Transmissions par câbles métalliques.
 DE LA BAUME PLUVINEL. — La théorie des procédés photographiques.
 HATT. — Les marées.
 H. LAURENT. — I. Théorie des jeux de hasard. — II. Assurances sur la vie. — III. Opérations financières.
 C^t VALLIER. — Balistique (2 vol.). — Projectiles. Fusées. Cuirasses (2 vol.)
 LELOUTRE. — Le fonctionnement des machines à vapeur.
 DARIÉS. — Cubature des terrasses.
 SIDERSKY. — I. Polarisation et saccharimétrie. — II. Constantes physiques.
 NIEWENGLOWSKI. — Applications scientifiques de la photographie.
 ROCQUES (X.). — Alcools et eaux-de-vie.
 MOESSARD. — Topographie.
 BOURSALUT. — Calcul du temps de pose.
 SEGUELA. — Les tramways.
 LEFÈVRE (J.). — I. La Spectroscopie. — II. La Spectrométrie. — III. L'éclairage électrique. — IV. Éclairage aux gaz, aux huiles, aux acides gras.
 BARILLOT (E.). — Distillation des bois.
 MOISSAN et OUVARD. — Le nickel.
 URBAIN. — Les succédanés du chiffon en papeterie.
 LOPÉ. — I. Accumulateurs électriques. — II. Transformateurs de tension.
 ARIES. — I. Chaleur et énergie. — II. Thermodynamique.
 FABRY. — Piles électriques.
 HENRIET. — Les gaz de l'atmosphère.
 DUMONT. — Electromoteurs.
 MINET (A.). — I. L'Electro-metallurgie. — II. Les fours électriques. — III. L'électro-chimie.
 DUFOUR. — Tracé d'un chemin de fer.
 MIRON (F.). — Les huiles minérales.
 BORNÉQUE. — Armement portatif.

Section du Biologiste

- CASTEX. — Hygiène de la voix.
 MERKLEN. — Maladies du cœur.
 G. ROCHÉ. — Les grandes pêches maritimes modernes de la France.
 OLLIER. — I. Résections sous-périostées. — II. Résections des grandes articulations.
 LETULLE. — Pus et suppuration.
 CRITZMAN. — Le cancer.
 ARMAND GAUTIER. — La chimie de la cellule vivante.
 SÉGLAS. — Le délire des négations.
 STANISLAS MEUNIER. — Les météorites.
 GREHANT. — Les gaz du sang.
 NOCARD. — Les tuberculoses animales et la tuberculose humaine.
 MOUSSOUS. — Maladies congénitales du cœur.
 BERTHAULT. — Les prairies (2 vol.).
 TROUSSERT. — Parasites des habitations humaines.
 LAMY. — Syphilis des centres nerveux.
 RECLUS. — La cocaïne en chirurgie.
 THOULET. — Océanographie pratique.
 HOUDAILLE. — Météorologie agricole.
 VICTOR MEUNIER. — Sélection et perfectionnement animal.
 HENOCQUE. — Spectroscopie biolog.
 GALIPPE et RARRÉ. — Le pain (2 v.).
 LE DANTEC. — I. La matière vivante. — II. La Bactériologie charbonneuse. — III. La Forme spécifique.
 L'HOTE. — Analyse des engrais.
 LARBALETRIER. — Les tourteaux. — Résidus industriels employés comme engrais (2 vol.).
 LE DANTEC et BERRARD. — Les sporezoaires.
 DEMMLER. — Soins aux malades.
 DALLEMAGNE. — Etudes sur la criminalité (3 vol.).
 BRAULT. — Des artérites (2 vol.).
 RAVAZ. — Reconstitution du vignoble.
 EHLERS. — L'Ergotisme.
 BONNIER. — L'Oreille (5 vol.).
 DESMOULINS. — Conservation des produits et denrées agricoles.
 LOVERDO. — Le ver à soie.
 DUBREUILH et BEILLE. — Les parasites animaux de la peau humaine.
 KAYSER. — Les levures.
 COLLET. — Troubles auditifs des maladies nerveuses.
 LOUTRE. — Essences forestières.
 MONOD. — L'Appendicite.
 DALLEMAGNE. — La Volonté (3 vol.).
 DELOBELLE et COZETTE. — La Vaccine.





531.2 P801 c.1

Statique graphique des systmes tria



086 633 409

UNIVERSITY OF CHICAGO